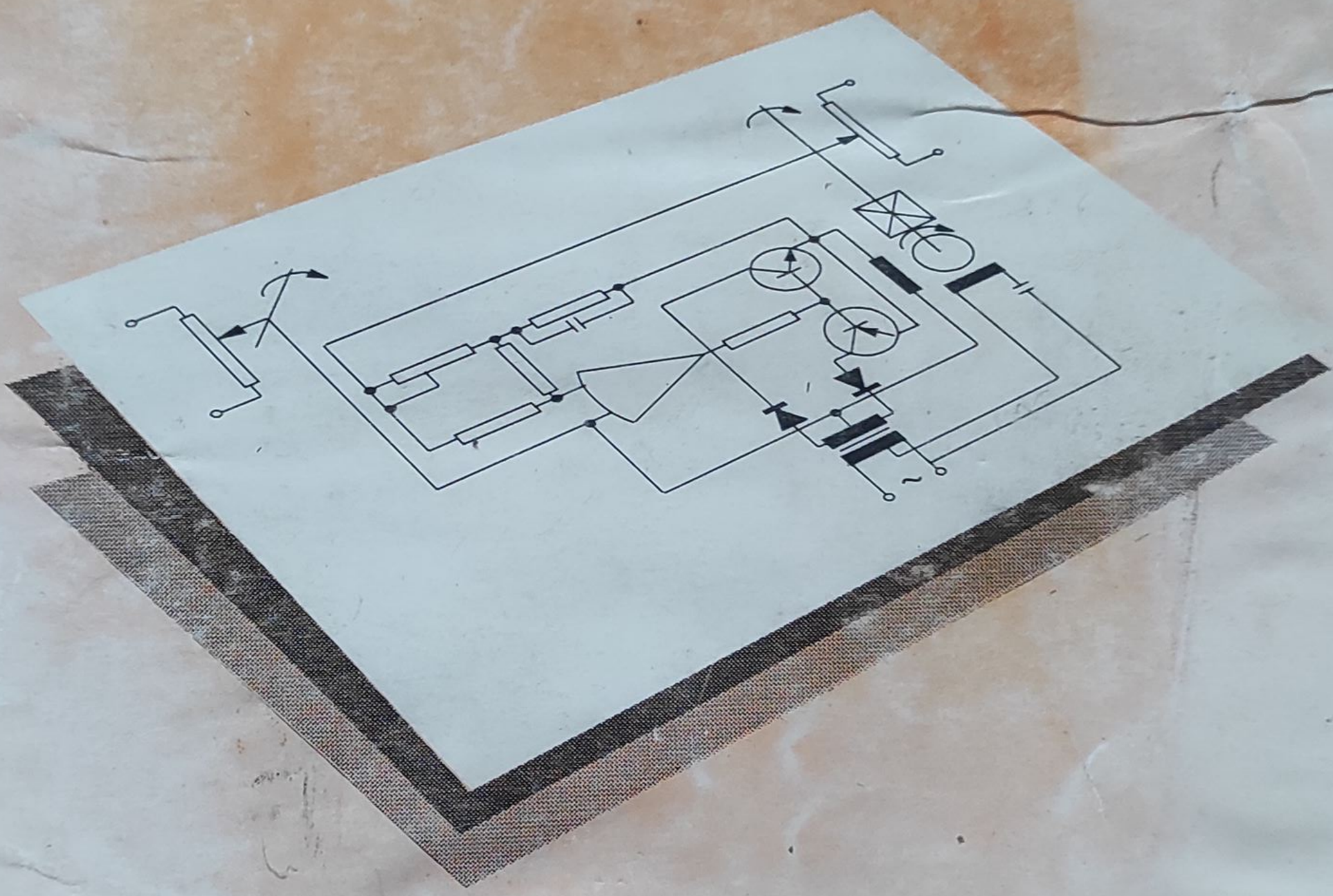
MIHAIL VOICU

INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ



MIHAIL VOICU - INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ

Editura Dosoftei

Mihail Voicu

INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ

Editura Dosoftei
Iaşi

... Ne-am însuşit o parte din comoara agonisită de premergătorii noştri şi modul de a vedea lumea este, pentru mulţi dintre noi, de-a dreptul format, pentru unii cel puţin întărit, pentru toţi, întrucâtva modificat prin colaborarea tainică a autorilor citiţi.

Titu Maiorescu

Idealul ar fi să te poţi repeta precum... Bach.

Emil Cioran

The continued health of control theory requires a steady flow of talented young mathematical scientist, with a broad mathematical background and some training in applications.

Soc. for Ind. & Appl. Math

The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.

Albert Einstein

Cuprins

CAPITOLUL I. INTRODUCERE 1
1. Automatizarea: conţinut, categorii şi scopuri 1
2. De la mecanizare la automatizare 2
3. Ce este un sistem automat? 5
4. Câteva repere istorice 6
5. Automatica şi cibernetica; sisteme şi semnale 9
CAPITOLUL II. TRANSFERUL INTRARE–IEŞIRE AL SISTEMELOR DINAMICE LINIARE 11
1. Descrierea matematică a sistemelor dinamice 11
1.1. De ce sunt necesare modelele matematice? 11
1.2. Ecuaţiile sistemelor fizico-tehnice 11
1.3. Liniaritate şi invarianţă în timp 15
1.4. Funcţia de transfer 17
2. Scheme bloc structurale 22
2.1. Preliminarii 22
2.2. Conexiuni elementare 24
2.3. Transfigurarea schemelor bloc structurale 26
2.4. Scheme bloc operaţionale asociate unei funcţii de transfer 32
2.5. Grafuri de fluenţă 34
3. Răspunsul la impulsul Dirac 37
3.1. Definiţie 37
3.2. Proprietăţi 38
3.3 Produsul de convoluţie 41
4. Răspunsul indicial 42
4.1. Definiţie 42
4.2. Proprietăţi 43
4.3. Integrala Duhamel 47
5. Polii şi zerourile funcţiei de transfer 48
5.1. Răspunsul la semnalul exponenţial 48
5.2. Transferul "rezonant" 50
5.3. Transferul blocat 51
6. Stabilitatea intrare-ieşire 52
6.1. Definiţia stabilităţii BIBO 52
6.2. Caracterizări ale stabilităţii BIBO 53
6.3. O condiţie necesară de stabilitate BIBO 54
6.4 Criteriul Hurwitz 55
6.5. Criteriul Routh 57
6.6. Stabilitatea relativă 58
6.7. Domenii parametrice de BIBO-stabilitate 60

7. Corelaţia dintre calitatea răspunsului indicial şi configuraţia poli-zerouri 61
7.1. Indici de calitate ai răspunsului indicial 61
7.2. Elemente de transfer tipice 62
7.3. Obţinerea funcţiei de transfer pe baza răspunsului indicial 71
7.4. Poli şi zerouri dominante 73
7.5. Configuraţii cu doi poli dominanţi 75
7.6. Efectul unui zero suplimentar 77
7.7. Efectul unui pol suplimentar 78
7.8. Simbolizarea operatorială a sistemelor dinamice liniare 79
CAPITOLUL III. PROPRIETĂŢILE SISTEMELOR AUTOMATE 81
1. Clasificarea sistemelor dinamice după structură 81
1.1. Sisteme cu structură deschisă 81
1.2. Sisteme cu structură inchisă 84
2. Sisteme automate monovariabile 88
2.1. Schema bloc funcţională 88
2.2 Schema bloc structurală standard 91
3. Implicaţii ale principiului abaterii 92
3.1. O formă analitică a principiului abaterii 92
3.2. Semnificaţia funcţiei $F(s)$ 93
3.3. Abaterea staţionară 94
3.4. Efectul perturbaţiei 95
3.5. Senzitivitatea la variaţia parametrilor 98
3.6. Efectul zgomotelor 102
4. Stabilitatea 103
4.1. Polii şi zerourile sistemului automat 103
4.2. Stabilitatea structurală 105
5. Precizia unui sistem automat 108
5.1. Eroarea ; implicaţii ale principiului abaterii 108
5.2. Eroarea staţionară 110
6. Performanţele unui sistem automat 114
6.1. Indici de calitate 114
6.2. Indicatori sintetici de calitate 115
CAPITOLUL IV. LEGI DE REGLARE 117
1. Regulatoare realizate cu amplificatoare operaţionale 117
1.1. Amplificatorul operaţional 117
1.2. Regulatoare uzuale 119
1.3. Caracteristici ale regulatoarelor din categoria PID 120
2. Proprietăţi ale sistemelor automate cu regulatoare P, PD, PI şi PID 121
2.1. Regulatorul P 121
2.2. Regulatorul PD 122
2.3. Regulatorul PI 123
2.4. Regulatorul PID 125
CAPITOLUL V. METODA LOCULUI RĂDĂCINILOR 127
1. Generalităţi 127
1.1. Formularea problemei 127
1.2. Ecuaţiile fundamentale ale locului rădăcinilor 130
2. Reguli de trasare a locului rădăcinilor 131
3. Efectul unui zero suplimentar 136

4. Efectul unui pol suplimentar 138
5. Sinteza regulatorului 141
5.1. Tema de proiectare 141
5.2. Rezolvarea temei de proiectare 141
CAPITOLUL VI. METODA FRECVENȚIALĂ 145
1. Răspunsul la frecvență 145
1.1. Semnificația funcției $G(j\omega)$ 145
1.2. Definiții 146
2. Reprezentări grafice ale răspunsului la frecvență 147
2.1. Locul de transfer 147
2.2. Diagrama Bode 149
2.3. Elemente de transfer tipice 150
2.4. Trasarea diagramei Bode prin linii poligonale aproximante 154
3. Principiul non-anticipării 155
3.1. Filtre ideale 155
3.2. Sisteme dinamice realiste 161
3.3. Sisteme de defazaj minim 166
4. Stabilitatea şi stabilizarea sistemelor automate 168
4.1. Principiul argumentului 168
4.2. Criteriul Nyquist 171
4.3. Corecția sistemelor automate 181
CAPITOLUL VII. SISTEME AUTOMATE NELINIARE 189
1. Metoda funcției de descriere 191
1.1. Procedeul celor două locuri 191
1.2. Stabilitatea oscilațiilor întreținute 200
1.3. Stabilitatea punctului de echilibru 204
1.4. Problema stabilizării 213
2. Stabilitatea absolută 215
2.1. Problema lui Lurie 216
2.2. Criteriul Popov 217
2.3. Forma grafică a criteriului Popov 220
2.4. Conjectura Aizerman 222
2.5. Cazul sectorului $[K_1, K_2]$ 222
2.6. Compensarea serie a părții liniare 223
2.7. Criteriul cercului 224
ANEXA A. TRANSFORMĂRI INTEGRALE 226
1. Transformarea Laplace 226
1.1. Transformarea directă 226
1.2. Transformarea inversă 227
2.Transformarea Fourier 228
2.1. Transformarea directă 228
2.2. Transformarea inversă 229
3. Transformarea Fourier-Plancherel 230
ANEXA B. NOȚIUNI DE TEORIA DISTRIBUȚIILOR 231
1. Elemente introductive 231
1.1. Noțiunea de funcțională 231
2. Noțiunea de distribuție 232

2.1.Continuitatea unei funcţionale 232
2.2. Definiţia distribuţiei 232
2.3. Distribuţia Dirac 233
2.4. Produsul de convoluţie 233
3. Transformarea Fourier 234
3.1. Distribuţii temperate 234
3.2.Pseudofuncţii 235
3.3. Transformarea Fourier a distribuţiilor şi a pseudofuncţiilor 235
3.4. Transformate Fourier ale unor distribuţii 236
4. Transformarea Laplace unilaterală 237
5. Tabel de transformate Laplace uzuale 237
Bibliografie 238

Capitolul I

INTRODUCERE

1. Automatizarea: conţinut, categorii şi scopuri

Termenii *automat* şi *automatizare* fac parte din categoria celor mai utilizaţi atât în limbajul ingineresc cât şi, păstrând proporţiile, în limbajul curent.

În limba română cuvântul *automat* se foloseşte cu valoare de substantiv şi cu valoare de adjectiv.

Adjectival, cuvântul *automat* desemnează calitatea unui sistem fizico-tehnic de a efectua, pe baza unei comenzi, o operaţie sau un complex de operaţii fără participarea directă a operatorului uman.

Substantival, un *automat* este un dispozitiv, un aparat sau o instalaţie - în general un *sistem* care operează sau funcţionează în mod automat, adică are calitatea desemnată prin adjectivul automat.

În acest context *automatizarea* reprezintă acţiunea de concepere, de realizare de automate şi de echipare a sistemelor fizico-tehnice cu automate pentru efectuarea în mod automat a unor operaţii, mişcări, acţiuni etc. Cele mai importante categorii de automatizări sunt următoarele: de comandă, de măsurare, de reglare, de protecţie, şi de semnalizare (toate realizabile, după caz, ca automatizări locale sau ca teleautomatizări).

În cadrul societăţii industriale şi al celei postindustriale scopurile generale ale automatizării sunt următoarele: creşterea productivităţii, scăderea consumurilor specifice (de materii prime, de materiale, de combustibil şi de energie), asigurarea preciziei execuţiei, creşterea siguranţei în funcţionare, protejarea instalaţiilor, scoaterea operatorului uman din medii nocive şi, nu în ultimul rând, eliberarea acestuia de participarea nemijlocită la producţia de bunuri şi de servicii.

Sub aspect socio-economic automatizarea conferă omului o poziţie calitativ nouă în raport cu producţia de bunuri şi de servicii. Omul, eliberându-se de munca fizică nemijlocită şi de participarea directă la procesul de producţie, conduce, comandă şi supraveghează instalaţiile (automatizate) create de el însuşi.

Crearea instalaţiilor *tehnologice* şi a tehnologiilor corespunzătoare este un atribut esenţial al *ingineriei*.

Ingineria, în sens larg, constă în cunoaşterea şi utilizarea materialelor şi forţelor naturii pentru beneficiul umanităţii, de regulă cu ajutorul unor construcţii, maşini şi instalaţii (în general - sisteme fizico-tehnice) concepute, realizate şi utilizate în cadrul unor organizaţii socio-economice. În acest cadru *inginerul automatist* are menirea ca, pe baza cunoaşterii sistemelor fizico-tehnice, să conceapă şi să realizeze automatizarea acestora. În mod firesc aceasta profesie este inter- şi multidisciplinară deoarece exercitarea ei competentă necesită cunoştinţe de matematică, fizică, chimie, biologie, electrotehnică, electronică, tehnică de calcul, informatică şi, nu în ultimul rând, de *automatică*, toate adecvat operante în conceperea, realizarea şi utilizarea automatizărilor. Cu alte cuvinte, inginerul automatist trebuie să aibă o vastă cultură ştiinţifică şi tehnică dublată de o autentică viziune sistemică astfel încât să-i

permită abordarea şi soluţionarea problemelor de automatizare a celor mai diverse sisteme fizico-tehnice (mecanice, electrice, termice, fluidice, chimice, biologice sau combinaţii ale acestora).

2. De la mecanizare la automatizare

Dezvoltarea producţiei de bunuri şi de servicii în cadrul societăţii umane a fost marcată hotărâtor de două mari evenimente:

- revoluţia industrială din secolul XVIII, caracterizată de utilizarea pe scară largă a maşinilor unelte şi a altor maşini şi utilaje acţionate de maşina cu vapori;
- revoluţia ştiinţifico - tehnică contemporană, caracterizată de automatizarea sistemelor fizico-tehnice şi de altă natură, precum şi de informatizarea globală a societăţii omeneşti.

La scara istoriei, producţia de bunuri şi de servicii s-a dezvoltat pe următoarele trepte:

- manufactură
- mecanizare
- automatizare, care a intrat în faza de cibernetizare, caracterizată prin prelucrarea complexă a informaţiei folosind tehnica de calcul (inclusiv în cadrul unor structuri distribuite) şi proceduri matematice şi informatice adecvate.

Prin trecerea de la o treaptă la alta (fără părăsirea definitivă a treptelor precedente) omul a transferat maşinilor rolul de executant (pe treapta mecanizării), rămânând un participant direct şi necesar în cadrul procesului de producţie, respectiv s-a eliberat de participarea directă la procesul de producţie (în cazul automatizării şi cibernetizării), dobândind funcţii noi: de conducere, de comandă şi de supraveghere a respectivului proces.

Prin mecanizare munca manuală a omului se înlocuieşte cu mecanisme, aparate şi maşini acţionate de convertori de energie adecvaţi. Operatorul uman ia parte la procesul de producţie în calitate de manipulator al mijloacelor de mecanizare, ca un component necesar al desfăşurării normale a procesului de producţie. Operatorul uman se eliberează de efortul fizic direct. Procesele de producţie devin mai rapide, mai eficiente (creşte raportul calitate/preţ), mai complicate şi mai cuprinzătoare. Operatorul uman urmăreşte numeroase mărimi fizice şi pe baza lor influenţează, prin dispozitive şi aparate adecvate, fluxurile de substanţă, de energie şi de informaţie. Activitatea sa constă în prelucrarea

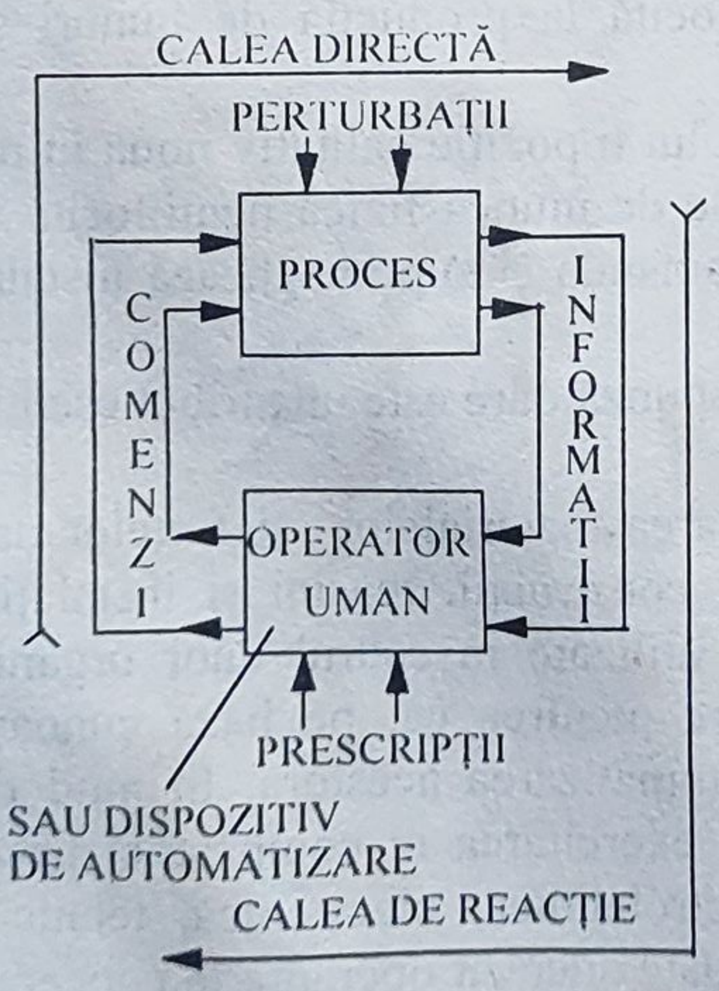


Fig. I.1 Structura şi relaţiile în cadrul unei mecanizări sau al unei automatizări

- cerebrală a *informaţiilor* despre proces (pe baza cunoştinţelor şi a experienţei privind evoluţia procesului) şi din *comenzi de dirijare a procesului în conformitate cu prescripţiile* privind evoluţia corectă (normală) a procesului. Între proces şi operatorul uman se stabilesc astfel anumite relaţii care pot fi exprimate grafic ca în fig. I.1. Participarea operatorului uman este necesară deoarece *perturbaţiile* care acţionează asupra procesului tind să-l abată de la desfăşurarea sa conform prescripţiilor. Rolul operatorului este acela de a sesiza aceste *abateri* şi de a acţiona, prin *comenzi*, în sensul reducerii efectului perturbaţiilor, respectiv al reducerii *abaterii* dintre evoluţia *prescrisă* şi cea *curentă* a procesului. În acest sens operatorul uman constituie *calea de reacţie* (preponderent informaţională şi de nivel energetic redus), în timp ce procesul constituie *calea directă* (preponderent

procesoare de substanță și de energie, și în subsidiar de informație), așa cum se menționează pentru sistemul proces-operator uman reprezentat în fig. I.1.

Exemplul 2.1

Pentru exemplificarea unei mecanizări și totodată pentru concretizarea structurii din fig. I.1, se consideră instalația tehnologică cu schema de principiu din fig. I.2. Aceasta trebuie să furnizeze unor consumatori tehnologici un debit Q_2 (variabil prin robinetul R, dar conform unor necesități imprevizibile) de lichid tehnologic LT, la presiune și temperatură prescrise (de exemplu constante). O soluție simplă constă în menținerea unui nivel constant al lichidului din RT prin debitul Q_1 (prin care să se compenseze consumul Q_2) și a temperaturii constante a lichidului din RT prin debitul Q_t al agentului termic care străbate schimbătorul de căldură SC (prin care să se compenseze variația de temperatură produsă de adaosul de lichid rece, prin Q_1). Rolul operatorului uman Op este acela de a urmări indicațiile nivelmetrului N și termometrului T și în funcție de *abaterile valorilor curente* ale nivelului și temperaturii față de valorile lor *prescrise* (conform prescripțiilor tehnologice ale consumatorilor) să pornească sau să oprească adecvat motorul M (de acționare a pompei P) prin comutatorul C și să deschidă sau să închidă adecvat robinetul R_t.

În cadrul acestei mecanizări funcțiile operatorului uman sunt următoarele:

- prelevarea informației despre proces (activitate *senzorială*),
- prelucrarea informației și elaborarea deciziei de comandă (activitate *intelectuală*),
- acționarea organelor de reglare (activitate *motorie*).

Aceste funcții sunt exercitate în sensul *reducerii abaterii* dintre valoarea *prescrisă* (constantă) și valoarea *curentă* (a nivelului și respectiv a temperaturii), abatere provocată în primul rând de acțiunea *perturbației*. Concret, debitul Q_2 perturbă nivelul și debitul Q_1 perturbă temperatura lichidului din RT.■

În procesele tehnologice automatizate operatorul uman este înlocuit cu un *dispozitiv de automatizare* care realizează, *mutatis mutandis*, aceleași funcții ca și operatorul uman, conform unei structuri ca aceea din fig. I.1.

Exemplul 2.2

O soluție simplă de automatizare a sistemului din fig. I.2 este ilustrată (principial) în fig. I.3, în care nivelmetrul N acționează direct (și adecvat) contactorul C și termometrul T (cu mercur, având o pereche de contacte - unul în masa metalică și altul în zona liberă a capilarului) acționează direct electroventilul EV_t. În acest fel motorul M (implicit pompa P) este pornit sau oprit în mod *automat* în funcție de scăderea sau creșterea valorii curente a nivelului față de valoarea prescrisă și respectiv electroventilul EV_t (a cărui construcție principială este prezentată în fig. I.4) se deschide sau se închide în funcție de scăderea sau creșterea valorii curente a temperaturii față de valoarea sa prescrisă.

Modificarea valorilor prescrise (dacă este necesar) este posibilă prin schimbarea lungimii tijei nivelmetrului N - în cazul reglării automate a nivelului și respectiv deplasarea contactului superior al termometrului T - în cazul reglării automate a temperaturii.■

Pentru realizarea funcțiilor sale dispozitivul de automatizare, în general, este constituit din:

- *traductor*, cu ajutorul căruia se măsoară valoarea curentă (a nivelului sau a temperaturii);
- *regulator*, care elaborează comanda, pe baza unui algoritm, astfel încât evoluția sistemului să aibă loc în sensul anulării abaterii dintre valorile prescrisă (existentă în regulator) și cea curentă (măsurată de traductor);

- *element de execuţie*, care reproduce comanda elaborată de regulator la un nivel energetic adecvat şi care acţionează prin organul de reglare (existent în proces) asupra fluxurilor de energie şi/sau de substanţă implicate în procesul automatizat.

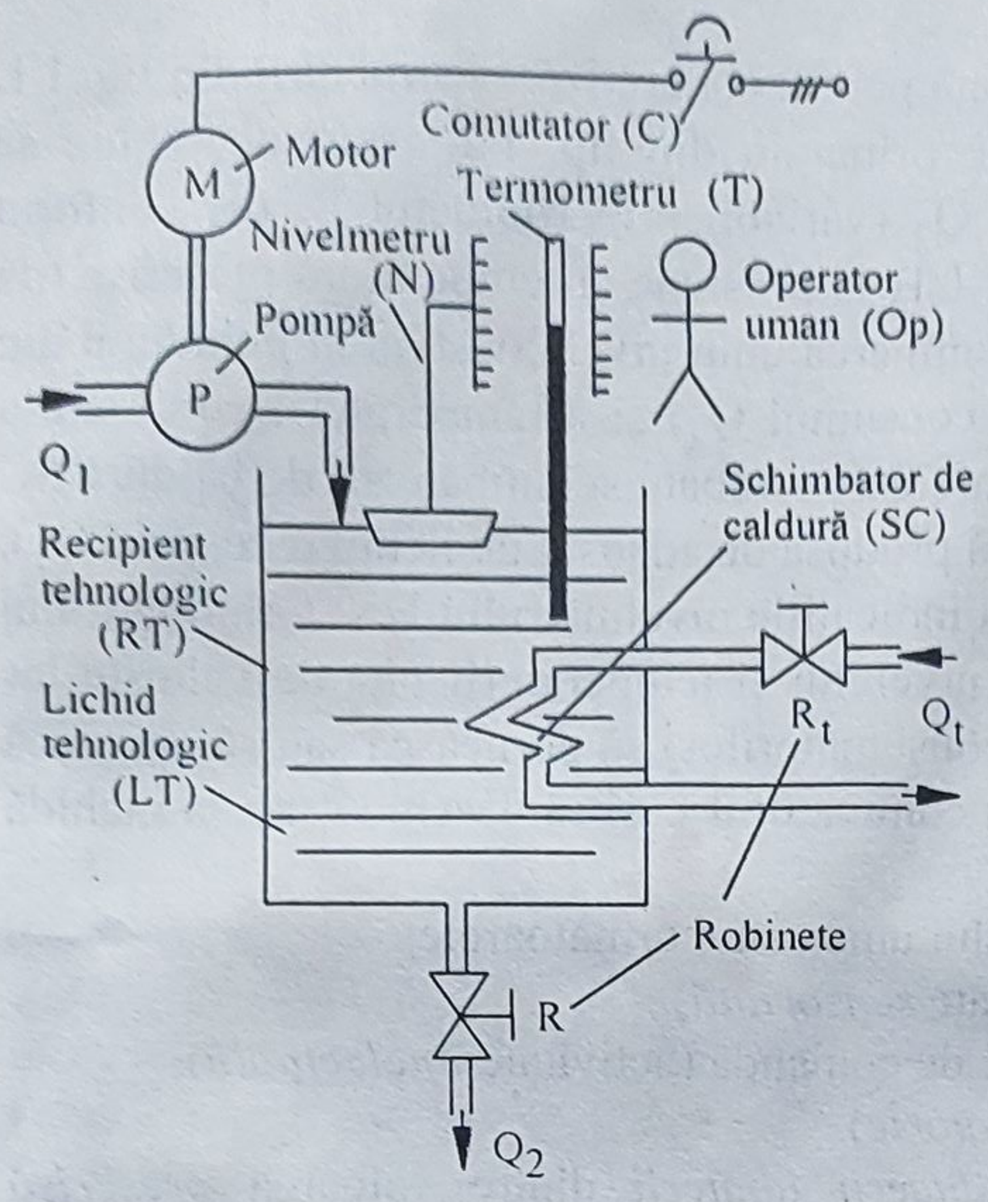


Fig. I.2. Instalaţie tehnologică mecanizată: , Q_1 - debitul de LT rece (proaspăt), Q_2 - debitul de LT cald (consumat), Q_t - debitul de agent termic

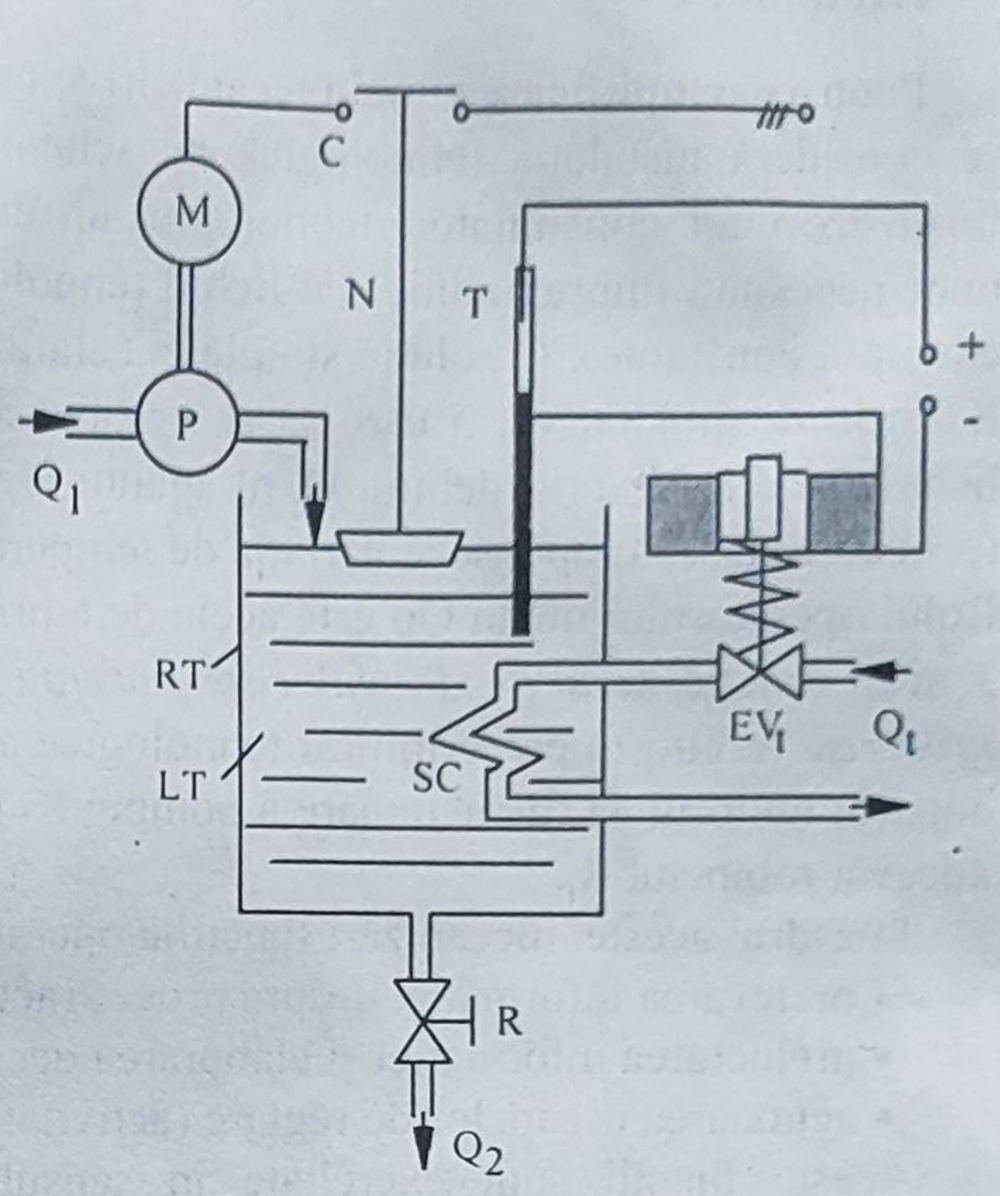


Fig. I.3. Instalaţie tehnologică automatizată (faza de mecanizare - fig. I.2); EV_t - electroventil (detalii în fig. I.4)

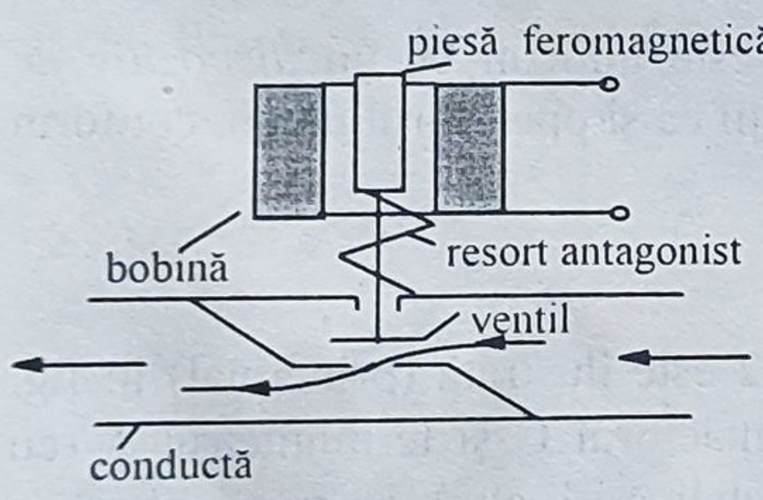


Fig. I.4. Schema unui electroventil

O comparare a celor două soluţii (fig. I.2 şi fig. I.3) din punctul de vedere al aparaturii utilizate conduce la următoarele constatări:

- în cazul mecanizării aparatele trebuie să facă posibilă includerea operatorului uman ca în fig. I.1. Astfel, aparatele de măsură oferă indicaţii *vizuale* şi organele de reglare permit (prin intermediul unor dispozitive de mecanizare) comanda *manuală*, acestea fiind interfeţele normale cu operatorul uman;
- în cazul automatizării, aparatele de măsură cu indicare vizuală şi organele de reglare comandabile manual (prin dispozitive de mecanizare) nu sunt utilizabile ca atare; ele trebuie modificate (în sensul realizării lanţului traductor-regulator-element de execuţie) astfel încât transferul, prelucrarea informaţiilor şi acţionarea organelor de reglare să aibă loc fără participarea operatorului uman.

Din aceste constatări se trage concluzia că ingineria automatizării constă în crearea unor dispozitive şi aparate specializate (traductoare, regulatoare şi elemente de execuţie) şi asamblarea lor pentru realizarea automatizării celor mai diverse procese tehnologice. În acest scop s-a dezvoltat *tehnica automatizării* (şi implicit o industrie a echipamentelor de automatizare) ale cărei componente principiale sunt:

- *tehnica măsurării*: se ocupă cu prelevarea, compararea, convertirea, amplificarea, indicarea şi înregistrarea mărimilor fizice;

- *tehnica reglării*: se ocupă cu elaborarea comenzilor, conform anumitor algoritmi, care să asigure modificarea fluxurilor de substanță, energie și informație;
- *tehnica telematicii*: se ocupă cu transmiterea la distanță a informațiilor între om și mașină sau între mașini;
- *tehnica de calcul*: se ocupă cu codificarea, prelucrarea, stocarea, decodificarea și distribuția informațiilor (inclusiv în timp real).

3. Ce este un sistem automat?

În cazul exemplelor 2.1 și 2.2 (fig. I.2 și I.3) temperatura lichidului din RT variază (este perturbată) deoarece există un consum de lichid (debitul Q_2) și un adaos de lichid proaspăt (debitul Q_1). Prin variația adecvată a debitului Q_t al agentului termic, efectul perturbației, respectiv *abaterea* dintre *valoarea prescrisă* a temperaturii și *valoarea curentă* a ei poate fi redusă până la anulare. Conform celor două exemple, realizarea practică a reducerii abaterii este posibilă pe două căi:

1° Un operator uman prelucrează informațiile prelevate din proces și acționează prin organul de reglare R_t (fig. I.2) asupra desfășurării procesului și anume în sensul anulării abaterii dintre valoarea prescrisă a temperaturii și valoarea ei curentă.

2° Un aparat, respectiv un dispozitiv de automatizare, realizează prelevarea și prelucrarea informațiilor despre proces și acțiunea asupra desfășurării procesului în sensul anulării abaterii dintre valoarea prescrisă a temperaturii și valoarea ei curentă.

În ambele cazuri, indiferent de modul de realizare, evoluția întregului proces are loc în sensul anulării abaterii dintre *valoarea prescrisă* și *valoarea curentă* a temperaturii, prin aceasta asigurându-se *compensarea efectului acțiunilor externe* (în primul rând al perturbației, dar și al mărimii prescrise a cărei valoare se poate modifica).

Funcțional cele două soluții sunt *izomorfe* în sensul că suportul abstract al ambelor soluții este unic, conform structurii din fig. I.1. În cel de al doilea caz este vorba de un *sistem automat* deoarece evoluția procesului are loc fără participarea operatorului uman. Acest lucru este posibil prin existența *căii de reacție*, constituită concret de elemente ale dispozitivelor de automatizare (în cazul mecanizării calea de reacție este constituită de operatorul uman). *Reacția* este *negativă* deoarece ea determină evoluția procesului în sensul *anulării abaterii* respectiv diferenței dintre *valoarea prescrisă* și *valoarea curentă* (a temperaturii sau nivelului).

Un concept fundamental în *automatică*, care se referă la o formă specială de comunicație în cadrul sistemelor automate, este cel de *reacție* (în l. engleză feedback = retroacțiune). Ea poate fi *negativă* (ca în cazul sistemelor automate) sau *pozitivă* (ca în cazul sistemelor generatoare de oscilații).

Ca fenomen natural, reacția este prezentă la toate nivelele și formele de organizare a materiei, organismelor biologice și societăților. În acest cadru multi-, inter- și metadisciplinar (reacția negativă sau pozitivă) este obiectul de studiu al *ciberneticii*.

Exemplul 3.1

Un exemplu al prezenței reacției negative în cadrul unui sistem biologic este <<reflexul pupilar fotomotor>> - fig. I.5. După cum este cunoscut, mușchiul pupilar este de formă inelară în centrul căruia se află pupila - orificiul circular de diametru variabil prin care lumina pătrunde în globul ocular. Rolul pupilei este acela de a regla, prin variația diametrului ei, cantitatea de lumină care pătrunde în globul ocular. Acest reglaj are loc în mod reflex (automat) și anume la variația iluminării retinei. Prin intermediul nervului optic (calea de

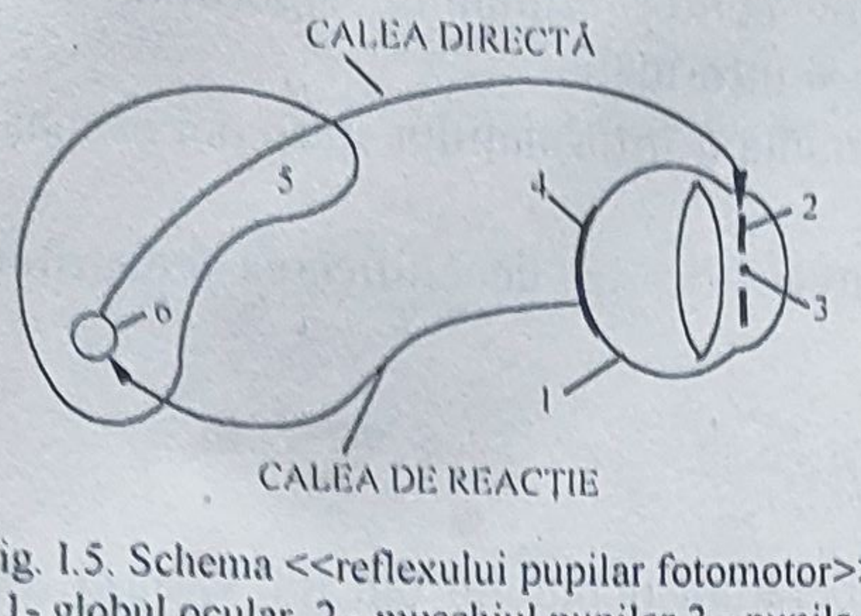


Fig. I.5. Schema <<reflexului pupilar fotomotor>>: 1- globul ocular, 2 - mușchiul pupilar,3 - pupila, 4 - retina, 5 - encefalul, 6 - centrul optic

reacție) și a centrului optic, se transmite mușchiului pupilar o comandă de deschidere sau de închidere (după cum iluminarea retinei a scăzut sau a crescut). În acest fel sistemul evoluează în sensul *anulării abaterii* dintre *valoarea prescrisă* și *valoarea curentă* a iluminării retinei, comportarea lui fiind, sub acest aspect, similară cu aceea a oricărui sistem automat. De altfel, după cum este cunoscut, aparatele de fotografiat din ultima generație sunt echipate cu sisteme de reglare automată a iluminării peliculei fotosensibile a căror structură este similară, *mutatis mutandis*, cu aceea a <<reflexului pupilar fotomotor>> prezentat principial în fig. I.5.■

În tehnică reacția negativă a început să fie utilizată, fără o conceptualizare pertinentă, odată cu realizarea primelor sisteme automate. Trebuie remarcat faptul că noțiunea de reacție a apărut relativ târziu în electronică (odată cu inventarea triodei și a amplificatorului electronic cu reacție) și universalitatea ei a fost descoperită către sfârșitul anilor '30.

4. Câteva repere istorice

Primele automatizări au fost identificate (evident, în cadrul unei evaluări retrospective) în reglarea automată a nivelului apei cu ajutorul flotorului (plutitorului) în ceasurile cu apă (ceasul lui Ktesibios, Grecia Antică, sec. IV-III î.H.), fig.I.6. În acest caz menținerea automată, de către flotor, a nivelului apei în recipientul mijlociu la o valoare constantă asigură un debit constant al apei care se scurge în recipientul inferior. Ca urmare, nivelul apei în acest recipient crește uniform în timp, fapt care a putut fi utilizat pentru măsurarea timpului.

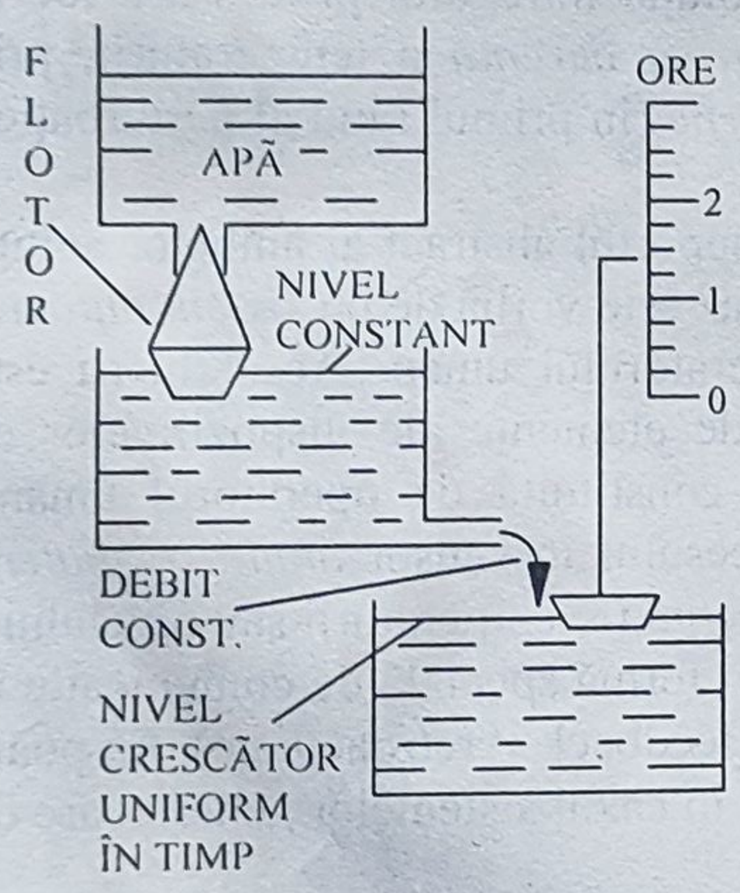


Fig. I.6. Ceasul cu apă a lui Ktesibios

În sec. I, Heron din Alexandria a scris o carte intitulată "Pneumatica" în care a descris numeroase mecanisme bazate pe reglarea automată a nivelului apei.

În Europa prima automatizare a fost realizată de olandezul Cornelis Drebbel (1572-1633), care a inventat un regulator de temperatură pentru incubatoare - fig. I.7. Acesta este constituit dintr-un termometru cu mercur (la presiune atmosferică) în care plutește un flotor. Prin intermediul unui mecanism cu pârghii, flotorul acționează obturatorul de gaze arse al focarului incubatorului. Este ușor de constatat că la creșterea/scăderea temperaturii obturatorul deschide/închide automat orificiul de evacuare a gazelor arse, asigurând în acest fel menținerea unei temperaturi (aproximativ) constante în incinta incubatorului.

Prima automatizare care a avut o largă utilizare industrială și un impact în sensul cristalizării conceptelor a fost realizată de James Watt în 1769. Este vorba despre celebrul regulator centrifugal utilizat pentru reglarea automată a turației mașinii cu vapori (inventată de același James Watt; exemplul 1.5 de la III.1.2.2°), fig.I.8. Este ușor de observat că scăderea/creșterea valorii curente a turației mașinii cu vapori are ca urmare deplasarea în jos/sus a culisei 4, respectiv în sus/jos a clapetei 5; consecința este o creștere/scădere a

debitului de abur viu, fapt ce imprimă procesului o evoluţie în sensul anulării abaterii dintre valoarea prescrisă şi valoarea curentă a turaţiei. Valoarea prescrisă a turaţiei se poate modifica prin valoarea tensiunii iniţiale a resortului 2. În ceea ce priveşte variaţia valorii curente a turaţiei, aceasta se datorează perturbaţiilor. Este vorba în primul rând de cuplul rezistent al mecanismului acţionat de maşina cu vapori, a cărui creştere/scădere determină scăderea/creşterea turaţiei, şi de parametrii aburului viu (presiunea şi temperatura).

Un studiu mai amplu al perioadei care a urmat automatizării maşinii cu vapori conduce la concluzia că până în 1869 dispozitivele de automatizare au fost concepute şi realizate pe baze empiric-intuitive. Au apărut totodată numeroase probleme de funcţionare, imprevizibile în faza de proiectare. Este vorba de fenomene oscilatorii slab amortizate şi chiar de instabilitate (oscilaţii neamortizate).

În acest cadru a apărut necesitatea unei teorii a sistemelor automate. În 1869 J. C. Maxwell a publicat primul studiu matematic privind stabilitatea unor sisteme automate. Puţin mai târziu un studiu matematic mai amplu a fost întreprins de I.A.Vyshnegradskii.

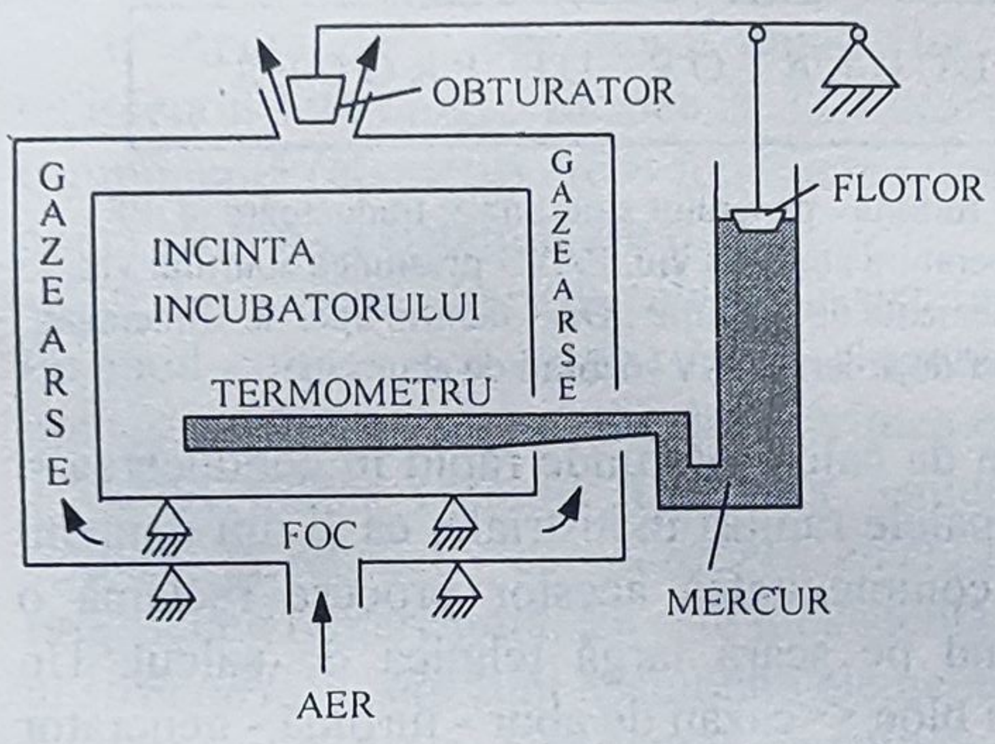


Fig. I.7. Incubatorul lui Drebbel

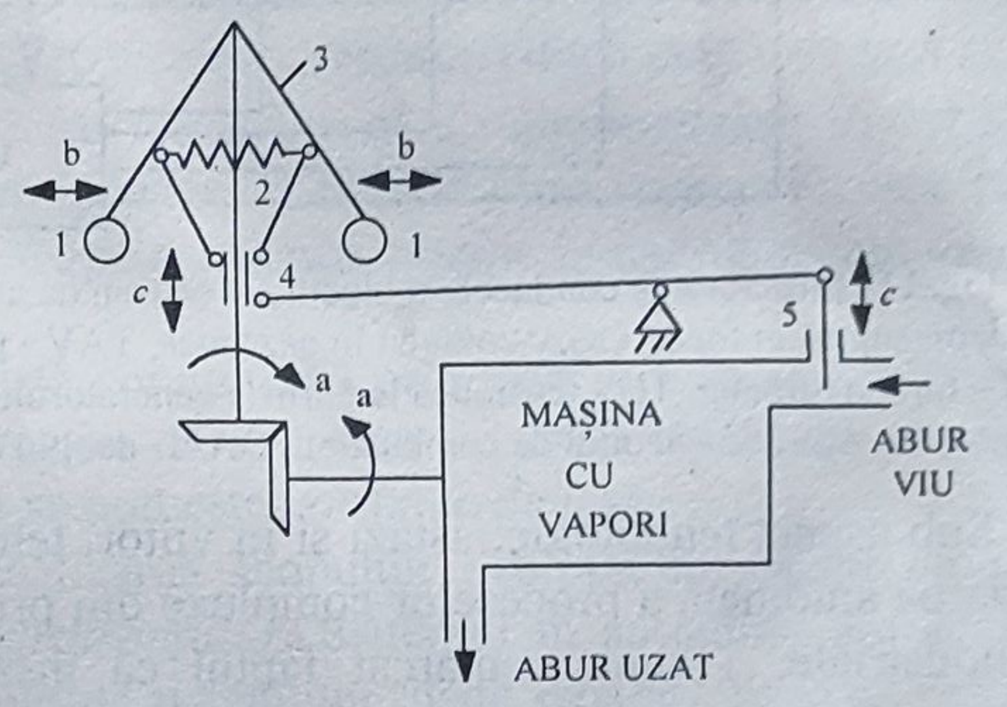


Fig. I.8. Sistem de reglare automată a turaţiei maşinii cu vapori: 1 - mase centrifugale, 2 - resort antagonist, 3 - mecanism patrulater, 4 - culisă, 5 - clapetă (organ de reglare); a - mişcare de rotaţie, b - mişcare datorită forţei centrifuge, c - mişcare de translaţie

Înainte de cel de al II-lea război mondial teoria şi practica sistemelor automate s-au dezvoltat în mod diferit în Occident şi în fosta URSS. În SUA un impuls în acest sens s-a datorat dezvoltării spectaculoase a telecomunicaţiilor bazate pe amplificatoarele electronice cu reacţie. Concret, este vorba de grupul format de Bode, Nyquist şi Black de la Bell Telephones Laboratories care au fundamentat şi utilizat *metoda frecvenţială* bazată pe transformarea Fourier. În acelaşi timp, în fosta URSS s-au implicat în studiul sistemelor automate mari matematicieni şi mecanicieni care au dezvoltat *metoda domeniului timpului* bazată pe teoria ecuaţiilor diferenţiale.

O dezvoltare remarcabilă a teoriei şi (mai ales) practicii sistemelor automate s-a produs pe parcursul celui de al II-lea război mondial. A fost necesar, în ambele tabere beligerante, să se proiecteze şi să se construiască piloţi automaţi pentru avioane, sisteme de poziţionare automată (pe ţintă) a tunurilor, sisteme de urmărire automată cu echipamente radar, ca şi alte sisteme automate de uz militar sau civil. Înainte de 1940 proiectarea sistemelor automate a fost mai degrabă o artă bazată pe "încercare - eroare". În anii '40 au fost formulate metode riguroase astfel că ingineria sistemelor automate a devenit o disciplină ştiinţifică de sine stătătoare. *Metoda frecvenţială*, bazată acum şi pe transformarea Laplace, împreună cu *metoda locului rădăcinilor* au dominat în perioada anilor '50. Totodată a fost revigorată *metoda domeniului timpului* (începând cu anii '60), ceea ce a permis o abordare nouă a problemelor stabilităţii şi optimalităţii sistemelor automate.

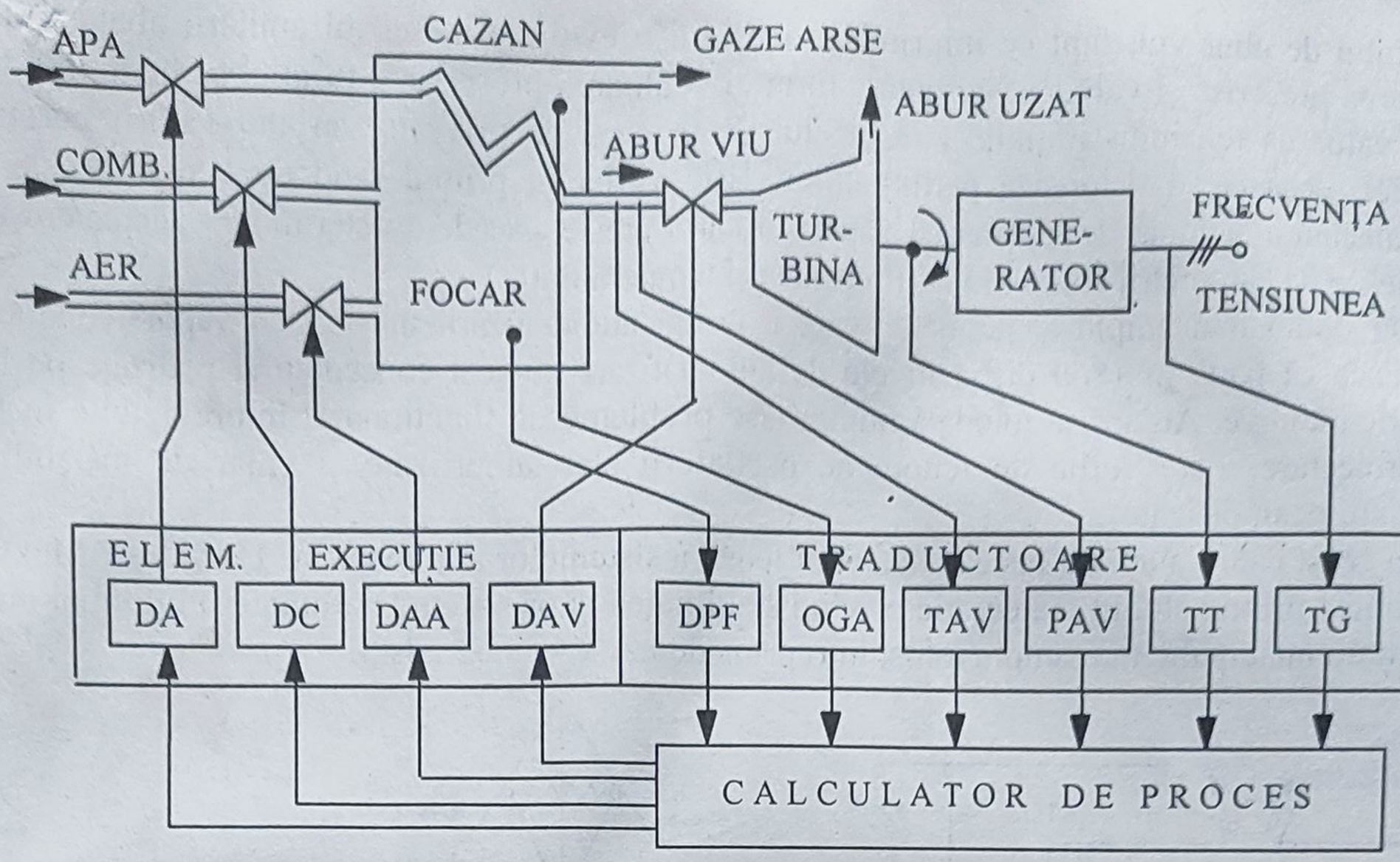


Fig. I.9. Structura de conducere a blocului <<cazan de abur - turbină - generator sincron>>; traductoare : DPF - depresiunea în focar, OGA - oxigen în gaze arse, TAV - temperatura aburului viu, PAV - presiunea aburului viu, TT - turația turbinei, TG - tensiunea la bornele generatorului; elemente de execuție : DA - debitul apei de alimentare, DC - debitul de combustibil, DAA - debitul de aer de ardere, DAV -debitul de abur viu

Sub aspect tehnologic, astăzi şi în viitor, tehnica de calcul pătrunde rapid în conducerea şi reglarea automată a proceselor complexe din principalele ramuri industriale, ca şi din domenii neindustriale. Trebuie remarcat faptul că însăşi complexitatea acestor procese reclamă o abordare nouă, posibilă tehnologic numai utilizând pe scară largă tehnica de calcul. Un exemplu elocvent în acest sens este conducerea unui bloc <<cazan de abur - turbină - generator sincron>> cu ajutorul calculatorului - fig. I.9. Calculatorul de proces, pe baza informațiilor prelevate din proces şi pe baza "cunoaşterii" de către calculator a fenomenelor (exprimate sub forma unor relații matematice) care au loc în blocul <<cazan de abur - turbină - generator sincron>>, elaborează comenzi de conducere şi reglare automată. Principalele mărimi fizice care trebuie menținute constante (asigurându-se în acest fel calitatea energiei electrice furnizate) sunt frecvența (turația turbinei) şi tensiunea (eficace) la bornele generatorului sincron. Principalele perturbații sunt puterile activă şi reactivă solicitate de consumatori, dar la acestea se mai adaugă: căldura specifică a combustibilului, temperatura apei de alimentare, temperatura aerului de ardere şi presiunea atmosferică. Mărimile (principale) de comandă ale blocului <<cazan de abur - turbină - generator sincron>>, prin care calculatorul de proces menține constante frecvența (turația turbinei) şi tensiunea (eficace) la bornele generatorului sincron sunt: debitul de combustibil, debitul de aer de ardere şi debitul de apă de alimentare.

5. Automatica şi cibernetica; sisteme şi semnale

Automatica este știința care se ocupă cu cercetarea teoretică a sistemelor automate şi cu studiul, conceperea şi realizarea mijloacelor tehnice pentru automatizarea aparatelor, maşinilor şi instalațiilor tehnologice sau de altă natură. Automatica, preluând şi utilizând legile generale ale naturii şi ca instrument de cercetare - limbajul şi rezultatele matematicii, a dobândit, acumulat, elaborat şi sistematizat pe parcursul dezvoltării ei, atât sub aspect teoretic cât şi experimental, informații şi metode de studiu proprii.

S-a remarcat deja faptul că sistemele prezentate cu ajutorul fig. I.2 şi I.3 sunt izomorfe, ele fiind formele concrete ale uneia şi aceleiaşi structuri şi anume a aceleia reprezentate în fig.I.1.

Izomorfismul ca expresie a unei trăsături dominante şi generale a fenomenelor naturii, care probează unitatea în diversitate a acesteia, a fost remarcat încă din secolul al XVII-lea de Blaise Pascal şi de mulţi alţi oameni de ştiinţă care i-au urmat.

Cibernetica, conform concepţiei întemeitorului ei, Norbert Wiener, este ştiinţa care se ocupă cu "studiul analitic al izomorfismului între structura comunicaţiilor în mecanisme, în organisme şi în societăţi". Prin investigarea zonelor de interferenţă ale diferitelor ştiinţe ("zone ale nimănui") şi pe baza acumulării unui imens volum de cunoştinţe, în special în matematică, fiziologia sistemului nervos, automatică şi electronică, s-au formulat principiile fundamentale de existenţă şi de transformare a semnalelor în maşini, în organisme şi în societăţi. Aceste principii stau la baza ciberneticii.

Cibernetica (la fel ca automatica - ştiinţă care aparţine ciberneticii) are în vedere trei aspecte privitoare la comunicaţii. Cu referire şi la exemplele 2.1 şi 2.2 (prezentate cu ajutorul fig. I.2 şi I.3 şi în subsidiar al fig. I.1), aceste aspecte se concretizează după cum urmează :

1° Aparatele şi operatorul uman (fig. I.2) sau dispozitivul de automatizare (fig. I.3) şi recipientul tehnologic formează, în fiecare caz în parte, o unitate - un *sistem*. Fiecare parte componentă (element) are o funcţie precisă şi ocupă o anumită poziţie în cadrul sistemului. Se poate afirma că sistemul are o *structură*.

2° Între două elemente ale unui sistem există comunicaţii prin care se transmit informaţii (în mod concret - *semnale*) într-o singură direcţie: de la *cauză* la *efect*. Mărimea cauză se numeşte *mărimea de intrare*, iar mărimea efect se numeşte *mărimea de ieşire*.

3° Acţiunea comună a părţilor asigură realizarea scopului: evoluţia în sensul *anulării abaterii* şi respectiv *compensarea efectului perturbaţiilor*. Sistemul în ansamblu are această proprietate remarcabilă. Ea este inexistentă în părţile sistemului (luate separat), fiind un rezultat al *structurii* în care sunt asamblate elementele şi al *comunicaţiilor* dintre acestea.

În acest context, cibernetica constituie un corpus de concepte şi metode cu ajutorul cărora se studiază proprietăţile şi legile generale ale trasferului şi prelucrării informaţiei prin şi în sisteme ca şi sistemele însele. Este mai puţin importantă natura concretă a sistemelor. Ele pot fi în particular sisteme tehnice, biologice, economice, sociale etc.

Un *sistem* este o *unitate* relativ delimitată faţă de mediu, delimitarea fiind evidenţiată de *structura* sa internă.

Noţiunea de sistem este relativă. Una şi aceeaşi realitate poate conţine mai multe sisteme. În cazul exemplelor prezentate în fig. I.2 şi I.3 se disting două sisteme: unul de reglare (automată) a nivelului (în care temperatura lichidului are o influenţă neglijabilă) şi unul de reglare (automată) a temperaturii, care îl include pe primul (variaţia nivelului influenţează temperatura lichidului din recipient).

S-a văzut că între subsisteme (elemente, părţi ale unui sistem) sau între sisteme există anumite legături, respectiv se transmit informaţii.

Sensul ştiinţific al noţiunii de *informaţie* a fost obţinut prin abstractizarea semnificaţiilor sale uzuale.

În limbajul curent <<a se informa>> înseamnă a lua cunoştinţă de anumite evenimente sau date. Pentru a găsi un formalism în acest domeniu, a fost necesar un efort de abstractizare, având în vedere marea varietate de informaţii ce se pot vehicula. Ceea ce este *comun* tuturor informaţiilor particulare este faptul că ele *nu sunt cunoscute aprioric*, respectiv realizarea unei informaţii (adică ea devine efectiv cunoscută) duce la înlăturarea unei *incertitudini*. Se are în vedere numai *existenţa* acestei incertitudini şi *valoarea* ei, aspectele concrete ale informaţiei fiind semnificative numai din punct de vedere utilitar.

Transmiterea (transferul, prelucrarea) unei informații are întotdeauna un suport material. O mărime fizico-tehnică prin care se transmite o informație se numește *semnal*. Caracteristica fizică a unui semnal care se modifică dependent de informație se numește *parametru informațional*.

Concomitent semnalele sunt funcții de timp. Acesta este al doilea parametru al semnalelor. Din punct de vedere matematic timpul este variabila independentă ce evoluează continuu în sens unic: de la trecut, prin prezent, spre viitor (un moment situat în trecut nu mai poate fi atins niciodată).

Semnalele (şi implicit sistemele, de care semnalele sunt inseparabile) se pot clasifica în conformitate cu foarte multe criterii. Câteva din posibilele clasificări se prezintă în continuare:

1° După natura fizică a semnalului:
- semnale *mecanice* (deplasare, forță etc);
- semnale *electrice* (tensiune, curent etc);
- semnale *optice* (intensitate, culoare etc).

2° După mulțimea de valori ale parametrului informațional:
- semnale *discrete*: parametrul informațional este definit pe o mulțime finită sau numărabilă (izomorfă cu mulțimea numerelor naturale); semnalele discrete pot fi *digitale*, adică valoarea parametrului informațional este multiplu al unei cuante; dacă parametrul informațional ia numai două valori, semnalul se numeşte *binar*;
- semnale *analogice*: parametrul informațional este definit pe un interval al mulțimii numerelor reale.

3° După mulțimea de valori ale parametrului timp:
- semnale *continue*: pentru fiecare valoare a timpului se defineşte o valoare a parametrului informațional;
- semnale *eşantionate* (discrete în timp): parametrul informațional este definit numai pentru anumite valori ale timpului; dacă valorile timpului sunt echidistante, semnalul se numeşte *eşantionat uniform*.

4° După previzibilitatea evoluției în viitor:
- semnale *deterministe*: evoluția în viitor este complet cunoscută;
- semnale *stohastice* (*aleatoare*): evoluția în viitor este previzibilă cu o anumită probabilitate.

Întrucât *sistemele* procesează *semnale* (noțiunile sunt duale în sensul că se poate afirma că în lipsa semnalelor/sistemelor existența sistemelor/semnalelor este insesizabilă), rezultă că tipurile de semnale care se transmit între elementele unui sistem îi imprimă acestuia caracterul respectivelor semnale. Se trage în mod firesc concluzia că se pot distinge: sisteme *discrete* sau *analogice*, sisteme *continue* sau *cu eşantionare* şi sisteme *deterministe* sau *stohastice* (*aleatoare*).

TRANSFERUL INTRARE–IEŞIRE AL SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

Capitolul II

1. Descrierea matematică a sistemelor dinamice

1.1. De ce sunt necesare modelele matematice?

În scopul înţelegerii funcţionării sistemelor dinamice (şi în acest cadru şi a sistemelor automate), atât sub aspect fenomenologic cât şi sub aspect relaţional-cantitativ, trebuie să se cunoască modelele lor matematice. În consecinţă este necesar să se analizeze relaţiile dintre variabilele unui sistem dat şi să se scrie ecuaţiile corespunzătoare. Deoarece sistemele care vor fi avute în vedere evoluează în timp, adică sunt *sisteme dinamice*, relaţiile dintre variabile au forma unor *ecuaţii diferenţiale* şi/sau *integro-diferenţiale*. Adesea aceste ecuaţii sunt *liniare* (sau se *liniarizează* în scopul simplificării tratării). În această situaţie se aplică *transformarea Laplace* fie în scopul soluţionării ecuaţiilor diferenţiale şi/sau integro-diferenţiale (liniare sau liniarizate), fie pentru analize mai profunde ale sistemului, după cum se va vedea în cadrul acestei lucrări.

Setul de ecuaţii diferenţiale şi/sau integro-diferenţiale care descriu un sistem dinamic real se numeşte *modelul matematic* al respectivului sistem. Întrucât modelul matematic are el însuşi atributele unui sistem, se mai spune că modelul matematic este un *sistem abstract*. Fireşte, la nivel conceptual noţiunile de sistem real şi sistem abstract (model matematic) sunt distincte în sensul că ele desemnează entităţi distincte în contextul în care sistemul abstract este o *imagine* (obţinută de analistul de sisteme) a sistemului real. La nivel concret această imagine este mai mult sau mai puţin simplificată şi/sau idealizată. Din acest motiv orice sistem abstract (model matematic), odată obţinut, trebuie validat prin comparaţie cu sistemul real. De regulă criteriul de validare este acela al erorii admisibile dintre evoluţia sistemului real şi evoluţia corespunzătoare, obţinută în condiţii similare pe baza sistemului abstract (modelului matematic), prin simulare numerică.

1.2. Ecuaţiile sistemelor fizico-tehnice

Aceste ecuaţii se obţin pe baza legilor generale ale naturii. Un sumar al variabilelor caracteristice pentru sistemele fizico-tehnice uzuale se prezintă în tabelul II.1. Pe baza caracterului relaţiilor dintre aceste variabile se ajunge la concluzia că ele pot fi împărţite (în mod natural) în două mari clase:

- variabile longitudinale
- variabile transversale.

Această dihotomie va fi mai uşor inteligibilă dacă se are în vedere faptul că din punct de vedere energetic se disting următoarele clase de sisteme:

- sisteme disipative
- sisteme cu acumulare inductivă
- sisteme cu acumulare capacitivă.

Tabelul II.1. Sumar al variabilelor fizico-tehnice

TIP: / SISTEM:	VARIABILA LONGITUDINALĂ		VARIABILA TRANSVERSALĂ	
ELECTRIC	CURENTUL	i	TENSIUNEA	u
MECANIC	FORȚA	f	VITEZA DE TRANSLAȚIE	v
	CUPLUL	c	VITEZA UNGHIULARĂ	ω
FLUIDIC	DEBITUL	q	PRESIUNEA	p
TERMIC	FLUXUL TERMIC	q	TEMPERATURA	θ

Prin coroborarea clasificărilor variabilelor şi sistemelor se obține, pentru sistemele uzuale, sumarul din tabelul II.2 al principalelor tipuri de ecuații utilizabile în modelarea matematică.

Tabelul II.2. Sumar al ecuațiilor sistemelor

SISTEM DE TIP:	NATURA FIZICĂ:	PARAMETRUL FIZIC:		ECUAȚIA
DISIPATIV	ELECTRIC	REZISTENȚA ELECTRICĂ	R	$i = \frac{1}{R}u$
	MECANIC	COEFICIENTUL DE FRECARE	K_f	$f = K_f v$
				$c = K_f \omega$
	FLUIDIC	REZISTENȚA FLUIDICĂ	R_f	$q = \frac{1}{R_f}p$
	TERMIC	REZISTENȚA TERMICĂ	R_t	$q = \frac{1}{R_t}\theta$
ACUMULATOR INDUCTIV	ELECTRIC	INDUCTANȚA ELECTRICĂ	L	$u = L\frac{di}{dt}$
	MECANIC	COEFICIENTUL DE ELASTICITATE	K	$v = \frac{1}{K}\frac{df}{dt}$
				$\omega = \frac{1}{K}\frac{dc}{dt}$
	FLUIDIC	INERTANȚA FLUIDICĂ	I	$p = I\frac{dq}{dt}$
ACUMULATOR CAPACITIV	ELECTRIC	CAPACITATEA ELECTRICĂ	C	$i = C\frac{du}{dt}$
	MECANIC	MASA INERTĂ	M	$f = M\frac{dv}{dt}$
		MOMENTUL DE INERȚIE	J	$c = J\frac{d\omega}{dt}$
	FLUIDIC	CAPACITATEA FLUIDICĂ	C_f	$q = C_f\frac{dp}{dt}$
	TERMIC	CAPACITATEA TERMICĂ	C_t	$q = C_t\frac{d\theta}{dt}$

Exemplul 1.1

Pentru exemplificarea utilizării ecuaţiilor din tabelul II.2 se consideră sistemul mecanic <<resort - amortizor - masă inertă>> reprezentat în fig.II.1. Acest sistem este format din următoarele:

- un element disipativ (amortizorul) descris de:

$f_a = K_f v$ (forţa de frecare vâscoasă),

- un element acumulator inductiv (resortul) descris de:

$f_r = K\int_0^t v(t)dt$ (forţa elastică; legea lui Hooke),

- un element acumulator capacitiv (masa inertă) descris de:

$f_i = M\frac{dv}{dt}$ (forţa inerţială; legea lui Newton),

asupra căruia acţionează forţa externă f.

Echilibrul dinamic al sistemului este exprimat de ecuaţia de bilanţ de forţe:

$f_i + f_a + f_r = f$.

Din cele patru ecuaţii de mai sus rezultă modelul matematic al sistemului:

$$M\frac{dv}{dt} + K_f v + K\int_0^t v(\tau)d\tau = f(t). \qquad (1.1)$$

Acestei ecuaţii i se asociază condiţiile iniţiale:

$x(t_0) = x_0,\ dx(t)/dt\big|_{t=t_0} = v(t_0) = v_0,\ t_0 \geq 0,$ în care: $x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau$.

Aceste două condiţii iniţiale definesc starea iniţială a celor două elemente acumulatoare de energie (şi anume alungirea iniţială a resortului şi viteza iniţială a masei inerte) prin care se precizează de fapt energia iniţială acumulată în resort şi energia cinetică iniţială a masei inerte.■

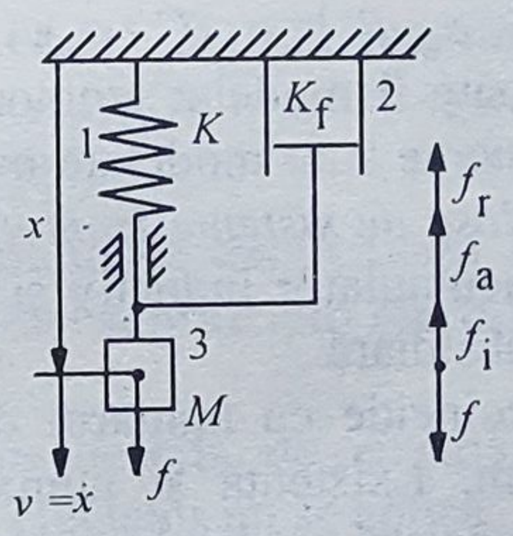


Fig.II.1. Sistemul format din resort (1), amortizor (2) şi masă inertă (3) sub acţiunea forţei externe f

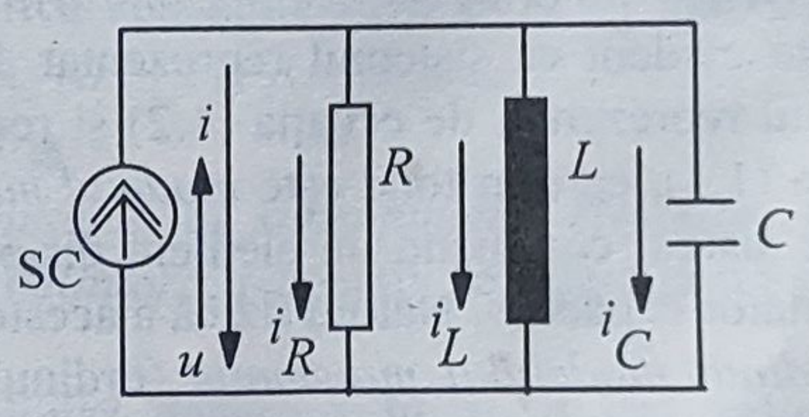


Fig.II.2.Sistemul <<*R,L,C*>> alimentat de la sursa de curent SC

Exemplul 1.2

Pentru a evidenţia analogiile fizice conform tabelelor II.1 şi II.2 se consideră în continuare sistemul electric <<rezistenţă - inductanţă - capacitate>> reprezentat în fig.II.2. Acest sistem este format din următoarele:

- un element disipativ (rezistenţa) descris de:

$i_R = \frac{1}{R}u$ (legea lui Ohm),

- un element acumulator inductiv (inductanţa) descris de:

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau$$ (consecință a legii inducției),

- un element acumulator capacitiv (capacitatea) descris de:

$$i_C = C\frac{du}{dt}$$ (consecință a definiției capacității electrice),

conectate în paralel, în care se injectează curentul *i* furnizat de sursa de curent SC.

Ecuația de bilanț a curenților (legea I a lui Kirchhoff) are forma:

$$i_C + i_R + i_L = i.$$

Din cele patru ecuații de mai sus rezultă modelul matematic al sistemului:

$$C\frac{du}{dt} + \frac{1}{R}u + \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau = i(t). \qquad (1.2)$$

Acestei ecuații i se asociază două condiții inițiale, corespunzătoare stării inițiale a celor două elemente acumulatoare de energie (și anume tensiunea inițială la bornele capacității și curentul inițial prin inductanță) prin care se precizează energia electrică inițială acumulată în capacitate și energia electromagnetică inițială acumulată în inductanță.■

Comparând ecuațiile (1.1) și (1.2) rezultă că, pe de o parte, viteza *v* și tensiunea *u* (variabile transversale - tabelul II.1) și, pe de altă parte forța *f* și curentul *i* (variabile longitudinale - același tabel) sunt respectiv într-o relație de similitudine. În fond sistemele însele (reprezentate în fig.II.1 și II.2) sunt similare sau izomorfe. La nivel abstract suportul lor comun este de același tip și anume modelul matematic:

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t), \qquad (1.3)$$

căruia i se asociază condițiile inițiale: $y(t_0) = y_0$, $dy(t)/dt|_{t=t_0} = \dot{y}_0$, $t_0 \geq 0$.

Formal, ecuația (1.3) se obține din (1.1) (înlocuind $v \Rightarrow dy/dt$, $f \Rightarrow u - K_{y0}$, $K = a_0$ $K_f = a_1$, $M = a_2$) sau din (1.2) (înlocuind $u \Rightarrow dy/dt$, $i \Rightarrow u - L^{-1}y_0$, $L^{-1} = a_0$, $R^{-1} = a_1$, $C = a_2$).

Este evident că sistemul reprezentat de ecuația (1.1) poate fi modelat izomorfic-fizic de sistemul reprezentat de ecuația (1.2) și reciproc. Ambele sisteme sunt modelate matematic de ecuația (1.3), care în fond este *modelul matematic* al unei *clase de sisteme izomorfe* între ele, fiecare sistem conținând un element disipativ, un element acumulator inductiv și un element acumulator capacitiv. Natura fizică a acestor elemente este subsidiară.

Ordinul modelului matematic (ordinul ecuației (1.3)) coincide cu numărul de elemente acumulatoare de energie independente conținute de sistem. Existența și numărul acestor elemente determină direct și numărul de condiții inițiale asociate modelului matematic. Ele corespund de fapt stării inițiale în care se află elementele acumulatoare de energie conținute de sistem și care, împreună cu acțiunea externă (forța *f* - fig.II.1, respectiv curentul *i* - fig.II.2), îi determină evoluția ulterioară.

Aceste concluzii sunt deosebit de utile analistului de sisteme deoarece îi oferă mijloace de înțelegere a unor clase foarte diverse de sisteme și de formalizare matematică a relațiilor care le caracterizează.

În aceste circumstanțe analiza și sinteza sistemelor dinamice (bazate pe utilizarea modelelor matematice) au condus la formarea *concepției sistemice*, respectiv la formularea unor rezultate cu caracter general, valabile pentru clase de sisteme izomorfe și particularizabile pentru o mare diversitate de sisteme concrete. În această ultimă situație rezultatele generale trebuie interpretate conform naturii concrete a fenomenelor și specificului tehnologic al proceselor, deoarece numai în această ipostază ele pot fi efectiv operante în abordarea aplicațiilor.

Pe de altă parte, sub aspect profesional, se trage concluzia că inginerul automatist, pe lângă o viziune sistemică asupra realităţii, trebuie să aibă cunoştinţe foarte variate la nivel conceptual - fenomenologic - tehnologic, o deschidere spre multi-, inter- şi metadisciplinaritate şi, nu în ultimul rând, abilităţi de experimentator cu o bine exersată înţelegere a relaţiilor de cauzalitate şi a dinamicităţii fenomenelor.

1.3. Liniaritate şi invarianţă în timp

Mareă majoritate a sistemelor reale au o comportare liniară în domenii de variaţie ale variabilelor bine precizate sau precizabile. De exemplu, sistemul <<resort - amortizor - masă inertă>> - fig.II.1 este liniar pentru micile variaţii ale variabilei x în jurul poziţiei de echilibru. Dacă x ia valori mari, resortul nu se mai comportă liniar (apar abateri faţă de legea lui Hooke).

Pentru formalizarea proprietăţii de liniaritate se are în vedere că un sistem materializează relaţia dintre *mărimea de intrare* (cauza) şi *mărimea de ieşire* (efectul). Simbolizarea grafică a transferului mărimii de intrare $u(t)$ în mărimea de ieşire $y(t)$ este dată în fig.II.3.

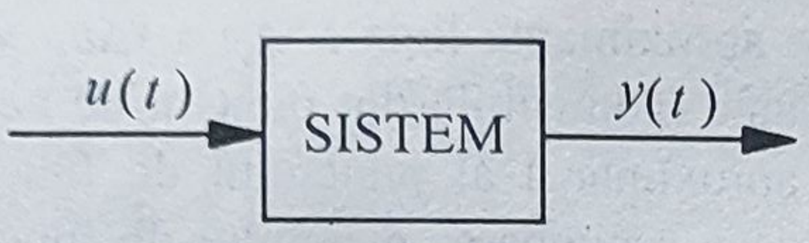


Fig.II.3. Simbolizarea grafică a unui sistem

Cele două mărimi sunt simbolizate prin segmente de dreaptă orientate (săgeţi) prin care se indică totodată sensul (unic) al transferului intrare - ieşire prin sistem. Într-o formă mai puţin nuanţată acest fapt se poate exprima prin:

$$u(t) \rightarrow y(t). \tag{1.4}$$

Fie $u(t) = u_1(t)$ şi $u(t) = u_2(t)$ două mărimi de intrare oarecare care se transferă în mărimile de ieşire $y(t) = y_1(t)$ şi respectiv $y(t) = y_2(t)$. Se scrie:

$$u(t) = u_1(t) \rightarrow y(t) = y_1(t), \qquad u(t) = u_2(t) \rightarrow y(t) = y_2(t).$$

Definiţia 1

Sistemul (1.4) - fig.II.3 este *liniar* dacă pentru orice constante reale c_1 şi c_2 mărimea de intrare $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ se transferă în $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, adică:

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \rightarrow y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \blacksquare$$

Această definiţie explicitează binecunoscutul *principiu al suprapunerii efectelor*. Orice abatere de la acest principiu reprezintă o comportare *neliniară*, respectiv se referă la un *sistem neliniar*.

Un sistem descris de ecuaţia: $y = u^2$ este neliniar deoarece în acest caz principiul suprapunerii efectelor nu se aplică.

Un sistem descris de ecuaţia $y = au+b$, în care a şi b sunt două constante reale, este de asemenea neliniar dacă $b \neq 0$ (se mai numeşte liniar afin). Se observă însă că acest sistem este liniar în jurul unui punct de funcţionare. Fie (u_0, y_0) un punct de funcţionare conform relaţiei $y_0=au_0+by_0$ şi fie variaţiile Δu şi Δy astfel încât $u=u_0+\Delta u$, $y=y_0+\Delta y$. Ca urmare se poate scrie $y_0+\Delta y=a(u_0+\Delta u)+b$, ceea ce conduce la $\Delta y = a\Delta u$, care este o ecuaţie liniară, dar numai pentru variaţiile Δu şi Δy în jurul punctului de funcţionare (u_0, y_0).

Pentru sistemele electrice şi mecanice liniaritatea este de regulă asigurată pe domenii precizabile ale variabilelor. Pentru alte categorii de sisteme se constată frecvent prezenţa neliniarităţilor în structura lor. În mod obişnuit se practică liniarizări ale acestora pentru micile variaţii ale variabilelor în jurul unor puncte de funcţionare.

Fie relaţia intrare-ieşire neliniară $y = f(u)$, în care f este o funcţie cunoscută, de exemplu având graficul din fig.II.4.

Punctul normal de funcţionare este desemnat prin (u_0,y_0) şi este caracterizat de $y_0 = f(u_0)$.

În virtutea continuităţii şi derivabilităţii funcţiei $y = f(u)$ în punctul (u_0,y_0) se poate face uz de formula lui Taylor:

$$y = f(u) = f(u_0) + \left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u_0} \frac{u-u_0}{1!} + R_2(u,u_0),$$

în care $R_2(u, u_0)$ este restul seriei Taylor corespunzătoare.

Pentru variaţiile $\Delta u = u - u_0$, $\Delta y = y - y_0$, suficient de mici, se înlocuieşte neliniaritatea cu aproximanta tangenţială:

$$y - y_0 = k(u - u_0),\ k = df(u)/du\big|_{u0} = \operatorname{tg}\alpha_0,$$

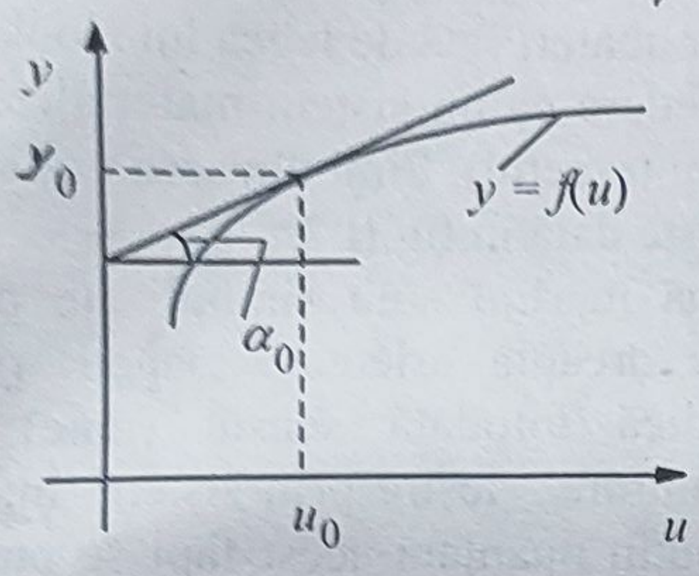


Fig. II.4. Aproximanta liniară a unei neliniarităţi

aşa cum se arată în fig. II.4, şi care reprezintă un sistem liniar afin. În fine, pentru micile variaţii Δu şi Δy se obţine aproximanta liniară $\Delta y = k\Delta u$, valabilă într-o vecinătate (admisibilă din punctul de vedere al erorilor de aproximare) al punctului de funcţionare (u_0, y_0). Evident, schimbarea punctului de funcţionare atrage după sine modificarea corespunzătoare a constantei k.

Eroarea pe care o introduce aproximanta liniară este dată de restul $R_2(u, u_0)$. Dacă valoarea absolută a erorii nu depăşeşte o limită admisibilă impusă, atunci pe baza restului $R_2(u, u_0)$ se pot determina $\max|\Delta u|$ şi $\max|\Delta y|$ pentru care aproximanta liniară este validă.

Exemplul 1.3

Se consideră pendulul fizic reprezentat schematic în fig.II.5.

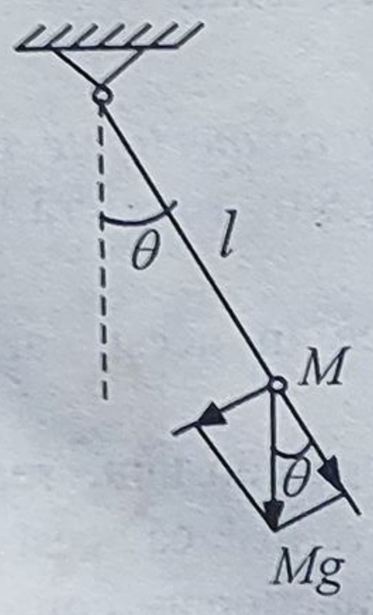


Fig.II.5 Pendulul matematic - sistem dinamic neliniar

Cele trei cupluri care acţionează asupra pendulului sunt:

$c_g = Mgl\sin\theta$ (cuplul forţei de gravitaţie)

$c_f = K_f \frac{d\theta}{dt}$ (cuplul de frecare vâscoasă)

$c_i = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (cuplul inerţial).

Ecuaţia de bilanţ de cupluri are forma: $c_i + c_f + c_g = 0$, ceea ce conduce la modelul matematic:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + K_f\frac{d\theta}{dt} + Mgl\sin\theta = 0.$$

Evident, acesta este un model matematic neliniar. Neliniaritatea este: $f(\theta) = \sin\theta$.

Pentru punctul de funcţionare $\theta = 0$ (care în situaţia $\dot\theta = 0$ reprezintă starea de echilibru stabil a pendulului) şi pentru micile variaţii ale unghiului θ în jurul acestui punct se poate scrie $f(\theta) \cong \theta$ ceea ce conduce la modelul matematic liniarizat:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+K_f\frac{d\theta}{dt}+Mgl\theta=0.$$

Se constată că modelul matematic liniarizat este acceptabil pentru $|\theta|\le\pi/6$. De exemplu eroarea între $\theta=\pi/6$ şi $f(\pi/6)=\sin(\pi/6)$ este 0,523 – 0,5 = 0,023, ceea ce reprezintă mai puţin de 4,7%.■

În toate exemplele considerate până aici modelele matematice obţinute sunt *ecuaţii diferenţiale ordinare liniare cu coeficienţi constanţi.* Acest fapt nu este general valabil, dar existenţa lui nu este întâmplătoare. Această categorie de modele matematice caracterizează o clasă relativ largă de sisteme din realitatea fizico-tehnică (în care se includ şi sistemele automate, care fac obiectul acestei lucrări).

Liniaritatea a fost formalizată în cadrul definiţiei 1. Pentru formalizarea celorlalte atribute ale categoriei de sisteme (şi modele matematice aferente) care va fi avută în vedere în prezenta lucrare se enunţă următoarele două definiţii.

Definiţia 2

Sistemul (1.4) - fig.II.3 se numeşte *neted* şi *cu parametri concentraţi* dacă el este reprezentat de o ecuaţie sau un set de ecuaţii diferenţiale ordinare.■

Specificarea <<neted>> desemnează faptul că sistemul respectiv procesează (transferă, prelucrează) semnale în conformitate cu operaţia de derivare. Această specificare împreună cu a doua, şi anume <<cu parametri concentraţi>>, se corelează cu ceea ce este o ecuaţie sau un set de ecuaţii diferenţiale ordinare.

Definiţia 3

Sistemul (1.4) - fig.II.3 se numeşte *invariant în timp* dacă toţi parametrii săi sunt invarianţi în timp.■

Noţiunea de <<parametru>> are aici sensul bine cunoscut din fizică (tabelul I.1).

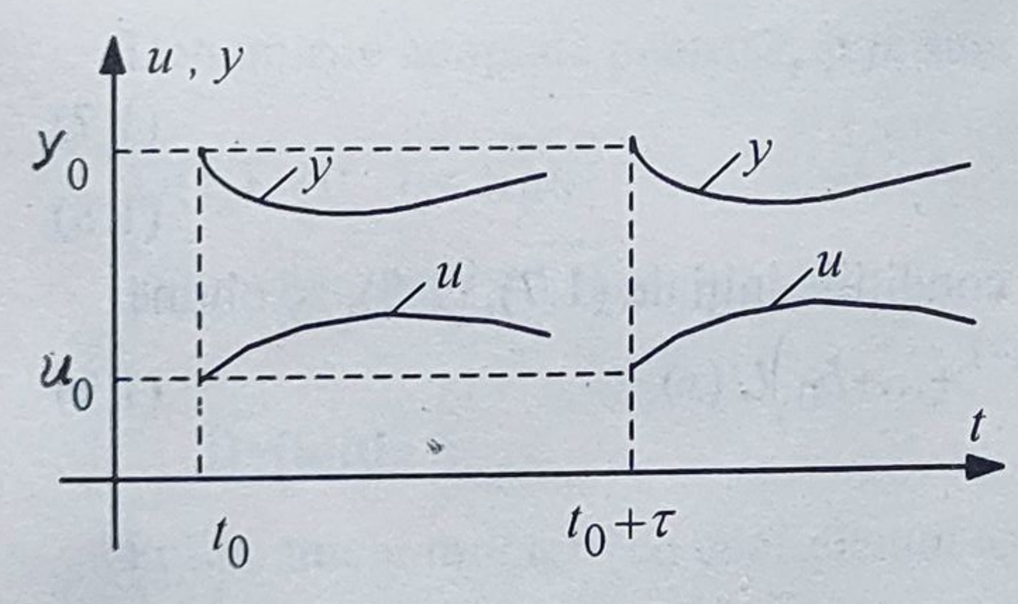


Fig.II.6 Ilustrarea invarianţei în timp

Calitatea esenţială a unui astfel de sistem este aceea că, sub acţiunea mărimii de intrare $u(t)$, evoluţia mărimii de ieşire $y(t)$ este invariantă în raport cu orice translaţie a momentului iniţial al acestei evoluţii, cu condiţia ca starea iniţială a sistemului să fie de fiecare dată aceeaşi şi mărimea de intrare să fie translată corespunzător în timp. Această proprietate este ilustrată în fig.II.6, din care transpare şi deosebita ei importanţă practică şi anume că transferul $u(t)\rightarrow y(t)$ este repetabil oricare ar fi momenul iniţierii lui, starea iniţială a sistemului fiind de fiecare dată aceeaşi şi mărimea de intrare fiind translată corespunzător în timp.

Pe cale de consecinţă, un *sistem neted, cu parametri concentraţi* şi *invariant în timp* este reprezentat de o ecuaţie sau un set de ecuaţii diferenţiale ordinare (liniare sau neliniare) cu coeficienţi constanţi în timp.

1.4. Funcţia de transfer

În general un sistem dinamic neted, cu parametri concentraţi, liniar şi invariant în timp, cu o singură mărime de intrare şi o singură mărime de ieşire (ambele funcţii scalare de timp, motiv

pentru care sistemul se mai numeşte *monovariabil*) este descris de o ecuaţie diferenţială ordinară, liniară, cu coeficienţi constanţi, de forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 u, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1.5}$$

în care $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$, $a_n \neq 0$, $b_i \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1,m}$. Numerele naturale m şi n sunt corelate cu numărul de elemente acumulatoare de energie, independente între ele, conţinute de sistem.

Pentru fixarea cadrului tratării şi în conformitate cu definiţia transformării Laplace (Anexa A1), de care se va face uz în continuare, se admite că până la momentul iniţial $t = 0$ sistemul descris de ecuaţia (1.5) se află în repaus, ceea ce analitic se exprimă prin:

$$u(t) \equiv 0, \; y(t) \equiv 0, \; t < 0. \tag{1.6}$$

Observaţia 1.1

În conformitate cu *principiul cauzalităţii* condiţia (1.6) poate fi citită şi în felul următor: *cauza* nulă produce *efectul* nul. Întrucât în (1.6) se defineşte starea de repaus în timp a sistemului (pentru $t < 0$), principiul cauzalităţii se exprimă aici şi sub forma mai nuanţată a *principiului non-anticipării*, conform căruia *efectul* nu anticipează *cauza*.■

Definiţia 4

Un sistem care satisface (1.6) se numeşte *non-anticipativ*. În cazul în care pentru $t < 0$, $u(t) \equiv 0$ implică $y(t) \neq 0$, sistemul se numeşte *anticipativ*.■

Experienţa acumulată până în prezent a învederat faptul că în lumea (macroscopică) reală sistemele (naturale sau fizico-tehnice) sunt non-anticipative.

O abordare riguroasă a problemelor care decurg din definiţia 4 (şi în general din principiul cauzalităţii) se va face în subcap.VI.3.

Din (1.6) rezultă că:

$$u^{(k)}(-0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1.7}$$

$$y^{(k)}(-0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{1.8}$$

Aplicând ecuaţiei (1.5) transformarea Laplace, cu condiţiile iniţiale (1.7), (1.8), se obţine:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right) U(s), \tag{1.9}$$

în care $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Din (1.9) se obţine:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} U(s), \tag{1.10}$$

care exprimă transferul intrare - ieşire în domeniul transformatelor Laplace (al funcţiilor imagine).

Definiţia 5

Raportul dintre transformatele Laplace ale mărimilor de ieşire şi de intrare ale sistemului dinamic (modelului matematic) (1.5) se numeşte *funcţia de transfer*.■

Se notează funcţia de transfer cu $G(s) = Y(s)/U(s)$ şi conform ecuaţiei (1.9) rezultă:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}. \tag{1.11}$$

Ca urmare transferul intrare - ieşire, ecuaţia (1.10), se exprimă şi sub forma:

$$Y(s) = G(s)U(s), \tag{1.12}$$

cu (1.11), căreia i se asociază schema bloc din fig.II.7, corespunzătoare aceleia din fig.II.3.

Se remarcă faptul că în (1.12) mărimea de intrare (cauza) $U(s)$ apare în membrul drept (împreună cu $G(s)$), şi mărimea de ieşire (efectul) apare în membrul stâng. În acest fel se evidenţiază în mod clar că $Y(s)$ este rezultatul acţiunii lui $U(s)$ prin intermediul lui $G(s)$.

Funcţia de transfer (1.11) este o funcţie (fracţie) raţională de variabila complexă s. În virtutea liniarităţii sistemului pe care îl reprezintă, funcţia de transfer nu depinde nici de mărimea de intrare $U(s)$ şi nici de mărimea de ieşire $Y(s)$, ci numai de structura şi parametrii sistemului însuşi, aşa cum rezultă de altfel şi din (1.11).

Întrucât $G(s)$ este o fracţie raţională (raportul a două polinoame cu coeficienţi reali), ea mai poate fi scrisă sub forma factorizată:

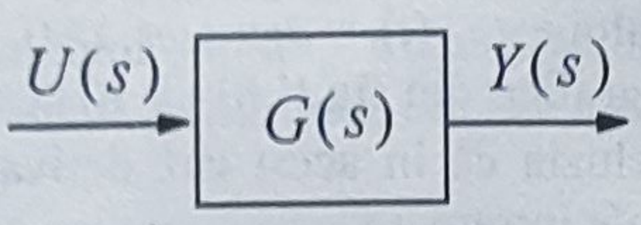


Fig.II.7. Schema bloc a sistemului (1.5) (reprezentat de funcţia de transfer (1.11))

$$G(s) = \frac{b_m \prod_1^m (s - z_i)}{a_n \prod_1^n (s - p_j)}, \tag{1.13}$$

în care $z_i \in \mathbf{C}$, $i = \overline{1,m}$, sunt *zerourile finite* ale funcţiei de transfer (sistemului) şi $p_j \in \mathbf{C}$, $j = \overline{1,n}$, sunt *polii finiţi* ai funcţiei de transfer (sistemului).

Pentru cele ce urmează se admite că cele două polinoame din (1.13) sunt relativ prime între ele (nu au nici un divizor comun, iar dacă ei au existat, au fost deja eliminaţi prin simplificare), astfel că se poate scrie:

$$z_i \neq p_j, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.14}$$

Denumirile adoptate pentru z_i şi p_j sunt justificate de:

$$G(z_i) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.15}$$

$$\left|G(p_j)\right| = +\infty, \; j = \overline{1,n}. \tag{1.16}$$

Definiţia 6

Polinoamele monice (cu coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1):

$$z(s) = \prod_1^m (s - z_i), \tag{1.17}$$

$$p(s) = \prod_1^n (s - p_j) \tag{1.18}$$

se numesc respectiv *polinomul zerourilor* şi *polinomul polilor* ale sistemului descris de funcţia de transfer $G(s)$.■

Este uşor de observat că polinomul polilor funcţiei de transfer $G(s)$ - relaţia (1.11) - este identic cu polinomul caracteristic al ecuaţiei (1.5) (exceptând eventual o constantă multiplicativă, aceeaşi pentru toţi coeficienţii).

Dacă $m > n$, la cei n poli finiţi ai lui $G(s)$ se adaugă şi punctul de la infinit ($|s| = +\infty$) ca pol de multiplicitate $m - n$, deoarece în acest caz pentru $|s| = +\infty$ rezultă $|G(s)| = +\infty$. Aşadar $G(s)$ are în total $n + (m - n) = m$ poli (egal cu numărul de zerouri finite).

Dacă $m < n$, la cele m zerouri finite ale lui $G(s)$ se adaugă şi punctul de la infinit ($|s| = +\infty$) ca zero de multiplicitate $n - m$, deoarece în acest caz pentru $|s| = +\infty$ rezultă $|G(s)| = 0$. Aşadar $G(s)$ are în total $m + (n - m) = n$ zerouri (egal cu numărul de poli finiţi).

Dacă $m = n$, punctul de la infinit nu este nici pol şi nici zero al funcţiei $G(s)$.

Numărul $\rho = \max(m, n)$ se numeşte ordinul sistemului şi el este egal cu numărul minim de elemente acumulatoare de energie (conservative), conţinute de sistem şi independente între ele, corespunzătoare ecuaţiei (1.5), respectiv funcţiei de transfer (1.13), cu (1.14).

Cele două polinoame al căror raport este funcţia de transfer (1.11) au roluri operatoriale diferite în cadrul transferului temporal intrare - ieşire. Acest fapt poate fi intuit pe baza teoremelor derivatei originalului şi integralei originalului (transformarea Laplace - Anexa A1).

Concret, pentru evidenţierea caracterului operatorial diferit al polinoamelor (1.17) şi (1.18) se consideră în continuare două cazuri limită semnificative (a căror simplitate facilitează expunerea):

1° $G(s) = s$. Conform ecuaţiei (1.12), transferul intrare - ieşire are forma $Y(s) = sU(s)$, căreia în domeniul timpului, în condiţiile (1.6), îi corespunde $y(t) = \dot{u}(t)$

Rezultă că sistemul considerat este un derivator.

Pentru $\omega > 0$, fixat, şi $u(t) = \sin \omega t$, $t > 0$, răspunsul sistemului este $y(t) = \omega \cos \omega t$, $t > 0$.

Este uşor de observat (îndeosebi pe baza reprezentărilor grafice din fig.II.8) că $y(t)$ este în avans de fază cu $\pi/2$ faţă de $u(t)$, ceea ce conduce la concluzia că în acest caz derivatorul produce o mărime de ieşire care anticipează evoluţia mărimii de intrare.

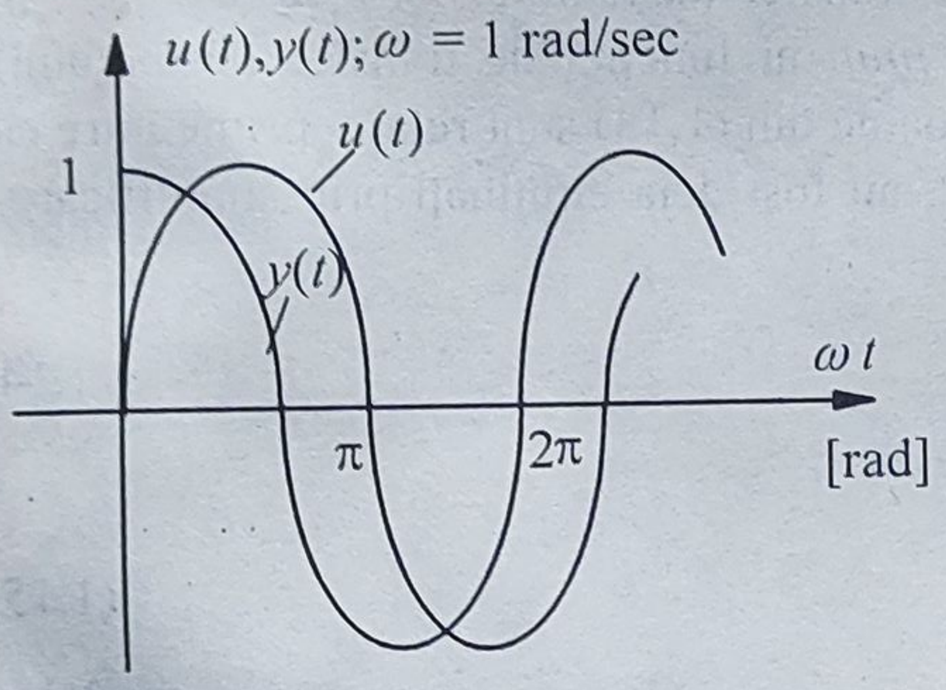


Fig.II.8. Ilustrarea efectului de anticipare produs de derivatorul $G(s) = s$

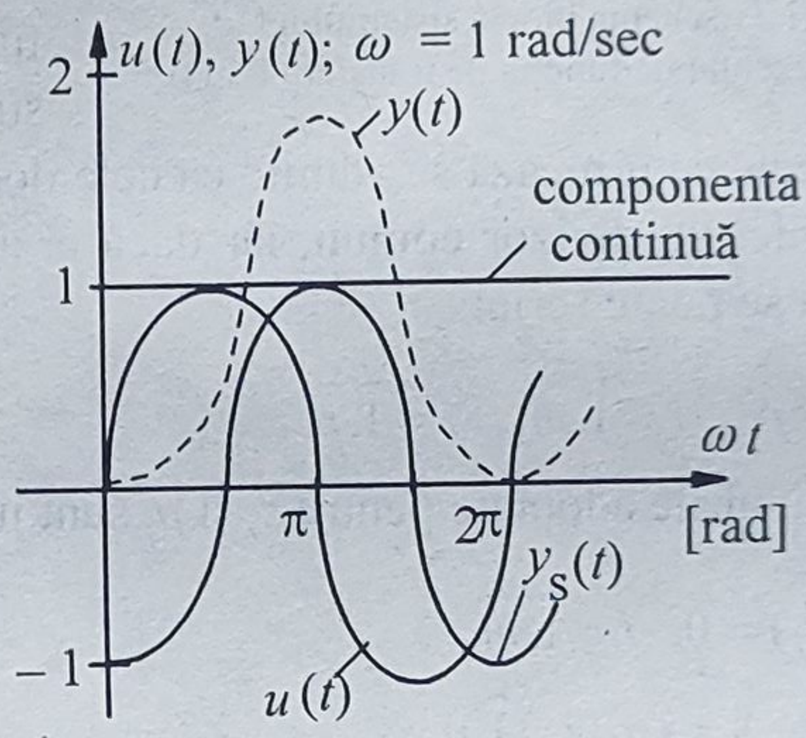


Fig.II.9. Ilustrarea efectului de întârziere produs de integratorul $G(s) = 1/s$

2° $G(s) = 1/s$. Conform ecuaţiei (1.12), transferul intrare - ieşire are expresia $Y(s) = U(s)/s$ căreia, în domeniul timpului, îi corespunde: $y(t) = \int_0^t u(\theta) d\theta$. Rezultă că sistemul considerat este un integrator.

Pentru aceeaşi mărime de intrare (ca la cazul 1°) răspunsul sistemului este $y(t) = (1 - \cos \omega t)/\omega$, $t > 0$ a cărui componentă periodică (sinusoidală) este: $y_s(t) = -\cos \omega t/\omega$, $t > 0$.

Şi în acest caz este uşor de observat (fig.II.9) că $y_s(t)$ este în întârziere de fază cu $\pi/2$ faţă de $u(t)$, ceea ce conduce la concluzia că în acest caz integratorul produce o întârziere a mărimii de ieşire faţă de mărimea de intrare.

Observaţia 1.2

Faţă de aceste două cazuri limită, foarte simple, se poate afirma, în general, că:

- Polinomul zerourilor $z(s)$ - relaţia (1.17), al funcţiei de transfer $G(s)$ - relaţia (1.13), modelează, în esenţă, operaţii de amplificare şi derivare; în cadrul transferului temporal intrare-

ieşire acesta are un efect de *amplificare - anticipare* a mărimii de ieşire față de mărimea de intrare.

• Inversul polinomului polilor $p(s)$ - relația (1.18), al funcției de transfer $G(s)$ - relația (1.13), modelează, în esență, operații bazate pe integrare (cu o anumită complexitate, conform expresiei polinomului $p(s)$); în cadrul transferului temporal intrare - ieşire acesta are un efect de *întârziere* a mărimii de ieşire față de mărimea de intrare.

Alte considerații privitoare la aceste două concluzii se vor face la 2.4 (fig.II.26).■

Observația 1.3

S-a arătat la observația 1.1 că în lumea reală (macroscopică) procesele se desfăşoară în timp cu respectarea principiului *non-anticipării*, conform căruia efectul nu anticipează cauza. Din punct de vedere practic se poate afirma chiar mai mult şi anume că efectul devine sesizabil cu o anumită întârziere față de cauză în sensul că relația de la cauză la efect nu este nici anticipativă şi nici instantanee, ea introducând de fapt o întârziere a efectului față de cauză. Ca urmare, în funcția de transfer $G(s)$, care respectă această condiție, operatorul bazat pe integrare (inversul polinomului polilor) trebuie să fie dominant față de operatorul de amplificare - derivare (polinomul zerourilor), ceea ce are loc numai dacă:

$$m < n. \tag{1.19}$$

În această situație (de asemenea pentru $m \le n$) ordinul sistemului este $\rho = n$.

Considerații riguroase privitoare la condiția (1.19) se vor face în subcap.VI.3.■

Definiția 7

O funcție rațională care satisface inegalitatea (1.19) se numeşte *strict proprie*. În caz contrar ea se numeşte *proprie* (pentru $m = n$) şi respectiv *improprie* (pentru $m > n$).■

Exemplul 1.4

Pot apărea situații în care $G(s)$ nu satisface condiția (1.19) datorită faptului că pe parcursul elaborării modelului matematic (1.5) s-au făcut idealizări şi/sau simplificări care au avut ca rezultat $m \ge n$. În acest sens un exemplu elocvent este cel al amplificatorului electronic de curent continuu.

În mod obişnuit se adoptă (pentru zona de liniaritate a amplificatorului) modelul matematic $y(t) = Ku(t)$ pentru care $m = n = 0$, ceea ce înseamnă că amplificatorul realizează o relație de la cauză la efect (intrare - ieşire) instantanee.

Această relație nu este riguros conformă cu rezultatele experimentale. O analiză corectă bazată pe aceste rezultate conduce la o funcție de transfer de forma: $G(s)=K/(a_3s^3+a_2s^2+a_1s+1)$, în care coeficienții polinomului polilor satisfac condițiile $0 < a_i << 1$, $i = \overline{1,3}$. Conform acestei funcții de transfer amplificatorul introduce o întârziere a mărimii de ieşire față de mărimea de intrare, fapt evidențiat de rezultatele experimentale. Totodată trebuie remarcat faptul că pentru $u(t)$ suficient de lent variabil în timp, întârzierea devine nesemnificativă (neglijabilă).

Evident, considerând $a_i \cong 0$, $i = \overline{1,3}$, se obține $G(s) \cong K$, dar acest lucru este posibil pentru $|s|$ suficient de mic (respectiv pentru t suficient de mare, conform teoremei valorii finale; Anexa A1) şi pentru $u(t)$ suficient de lent variabil în timp.■

Observația 1.4

Există şi situații în care, în mod deliberat, se lucrează cu funcții de transfer proprii sau improprii (care nu satisfac (1.19)). Trebuie reținut faptul că se ajunge în astfel de ipostaze în urma unor idealizări şi/sau simplificări realizate (relativ frecvent) pe parcursul modelării

matematice sau direct în modelul matematic. Rezultatele care se obţin în astfel de situaţii trebuie privite cu o anumită doză de circumspecţie deoarece ele încalcă principiul non-anticipării (în forma din observaţia 1.1 sau în forma mai nuanţată din observaţia 1.3). Evident, interpretarea rezultatelor obţinute cu astfel de modele matematice implică valorificarea pertinentă a tuturor idealizărilor şi/sau simplificărilor care au condus la respectivele funcţii raţionale proprii sau improprii.■

2. Scheme bloc structurale

2.1. Preliminarii

S-a arătat la 1.4 că prin aplicarea transformării Laplace ecuaţia diferenţială (modelul matematic) (1.5) se transformă în ecuaţia algebrică (1.9) care permite explicitarea (1.12) cu (1.11), respectiv reprezentarea grafică din fig.II.7, corespunzătoare transferului intrare - ieşire (de la cauză la efect, conform săgeţilor) realizat de sistem.

De regulă modelul matematic este rezultatul unei proceduri care de la debut are caracter analitic. Acest caracter derivă din aplicarea *metodei analitice* ca metodă (clasică) de investigare ştiinţifică. Ea este rezultatul structurii secvenţiale a procesului cunoaşterii de către om a naturii (ca şi a altor activităţi umane, conform dictonului "divide et impera").

Aplicarea metodei analitice constă în împărţirea sistemului analizat în elementele sale componente cele mai simple, urmată de studiul lor separat, cu descrierea matematică a fenomenelor conform legilor care le guvernează şi evidenţierea mărimilor cauze şi mărimilor efecte pentru fiecare element în parte. În cazul în care elementele sunt liniare se poate aplica transformarea Laplace, astfel că se poate asocia fiecărui element, luat de sine stătător, câte o schemă bloc parţială. Prin reunirea adecvată a tuturor schemelor bloc parţiale, în cadrul unei operaţii de *sinteză* bazată pe conexiunile existente între elemente, se obţine *schema bloc structurală* a sistemului analizat.

Exemplul 2.1

Se consideră un motor electric de curent continuu, cu excitaţie separată, a cărui schemă este reprezentată în fig.II.10. Pentru simplificarea analizei se au în vedere numai fenomenele electrice, electromagnetice şi electromecanice. Se face abstracţie de fenomenele termice şi de neliniarităţile de tip feromagnetic. În aceste condiţii sistemul poate fi împărţit în următoarele cinci elemente (pentru care se scriu şi ecuaţiile corespunzătoare):

(a) Circuitul electric rotoric:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + e$$ (legea a II-a, Kirchhoff),

(b) Circuitul electric rotoric - sediu al tensiunii contraelectromotoare:

$$e = k_1\omega$$ (cf. $e = Blv$, *mutatis mutandis*),

(c) Rotorul - corp rigid în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe:

$$J\frac{d\omega}{dt} = m_m - m_f - m$$ (legea lui Newton),

(d) Rotorul - sediu al cuplului motor (electromagnetic),

$$m_m = k_2 i$$ (cf. $f = Bil$, *mutatis mutandis*),

(e) Rotorul - sediu al cuplului de frecare:

$$m_f = k_3\omega$$ (legea frecării vâscoase),

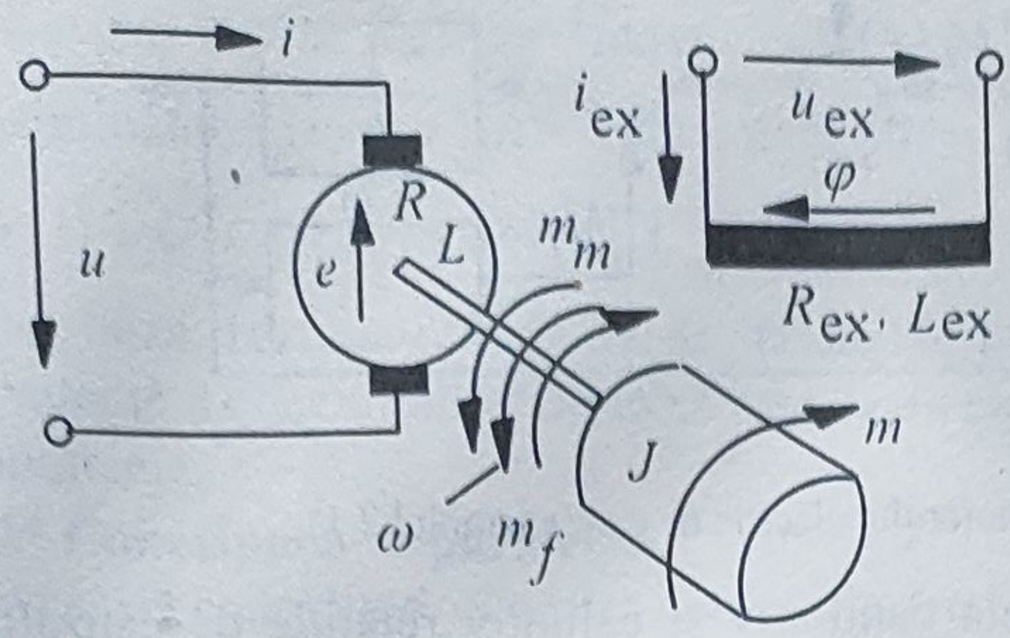


Fig. II.10. Schema motorului electric de c.c. de la exemplul 2.1; u - tensiunea de comandă, i - curentul rotoric, e - tensiunea contraelectromotoare, R - rezistența rotorică, L - inductanța rotorică, ω- viteza unghiulară a rotorului, m - cuplul de sarcină (perturbator), m_m- cuplul motor, m_f- cuplul de frecare, J - momentul de inerție al rotorului, φ = const. - fluxul de excitație.

în care mărimile fizice și parametrii au semnificațiile din fig. II.10 și k_1, k_2, k_3 sunt coeficienți (constructiv - funcționali) constanți.

Cea mai frecventă utilizare a motorului electric de c.c. este în cadrul acționărilor electrice cu turație (viteză unghiulară) reglabilă. Astfel, prin reglarea tensiunii de comandă u (prin dispozitive adecvate, nereprezentate în fig. II.10) se modifică viteza unghiulară ω. Prin schimbarea semnului tensiunii u se obține inversarea sensului de rotație a rotorului. În același timp creșterea/scăderea cuplului de sarcină (perturbator) provoacă scăderea/ creșterea vitezei unghiulare, ceea ce poate avea consecințe nedorite asupra procesului tehnologic în care este implicată acționarea electrică. Din acest motiv acționările electrice de acest tip se automatizează în sensul că se includ de fapt în cadrul unor sisteme automate de reglare a turației. Proiectarea unui astfel de sistem se bazează în primul rând pe analiza proprietăților de transfer ale motorului electric de c.c. cu ajutorul schemei bloc structurale.

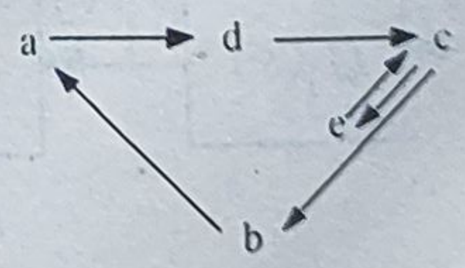
Pentru obținerea schemelor bloc parțiale ale celor cinci elemente și în final a schemei bloc structurale a motorului electric de c.c. se procedează în continuare la aplicarea transformării Laplace ecuațiilor elementelor (cu condiții inițiale nule). Explicitând fiecare ecuație rezultată în conformitate cu relația de cauzalitate materializată de fiecare element, luat de sine stătător, se obține:

$$I(s)=\frac{1}{Ls+R}\left[U(s)-E(s)\right] \quad \text{(a)}, \qquad E(s)=k_1\Omega(s) \quad \text{(b)},$$

$$\Omega(s)=\frac{1}{Js}\left[M_m(s)-M_f(s)-M(s)\right] \quad \text{(c)}, \qquad M_m(s)=k_2 I(s) \quad \text{(d)}, \qquad M_f(s)=k_3\Omega(s) \quad \text{(e)}.$$

Schemele bloc parțiale asociate acestor ecuații sunt reprezentate în fig. II.11(a - e), în care cercuțele simbolizează sumatoarele algebrice (semnele operanzilor sunt plasate lângă săgețile care simbolizează mărimile).

În această fază se poate alcătui schema bloc structurală prin sinteza schemelor bloc parțiale din fig. II.11, respectiv prin înlănțuirea acestora pe baza mărimilor comune (intrare/ieșire). La această operație se ține seama de utilizarea efectivă a sistemului și anume că transferul principal este $u(t) \rightarrow \omega(t)$. Ca urmare, schema de înlănțuire are forma:



și rezultatul obținut este reprezentat în fig. II.12.

Este vizibil faptul că sistemul conține, în mod natural, două reacții negative.

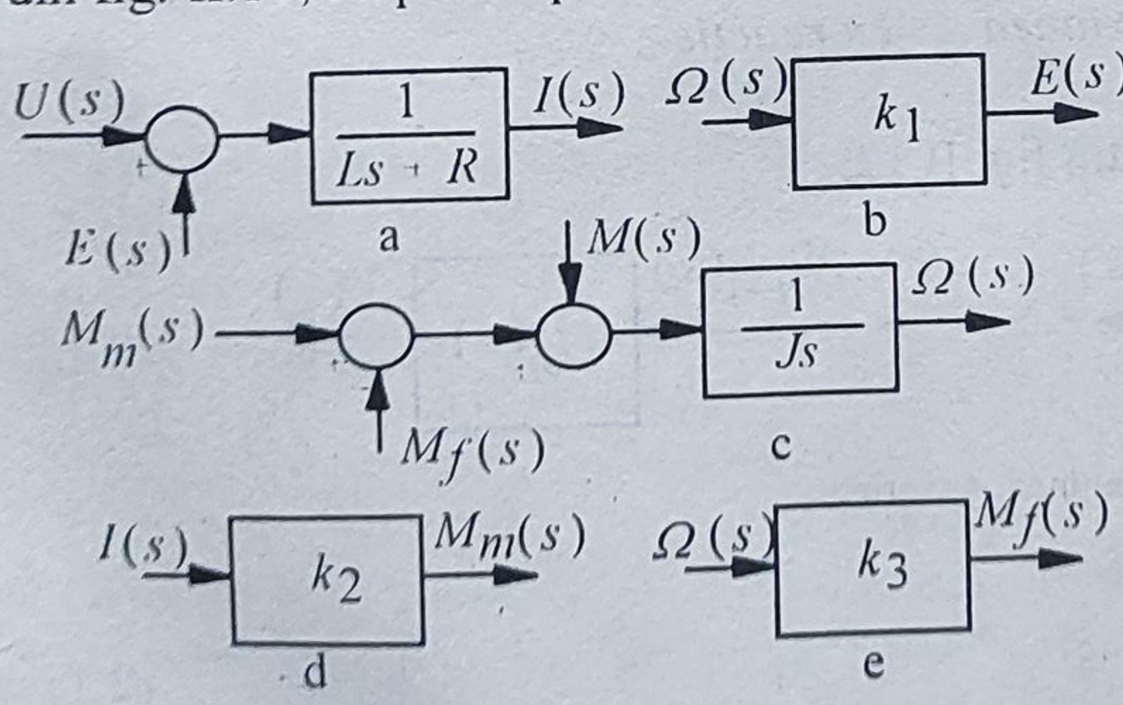


Fig. II.11. Schemele bloc parțiale la exemplul 2.1 (corespunzătoare ecuațiilor (a) - (e)).

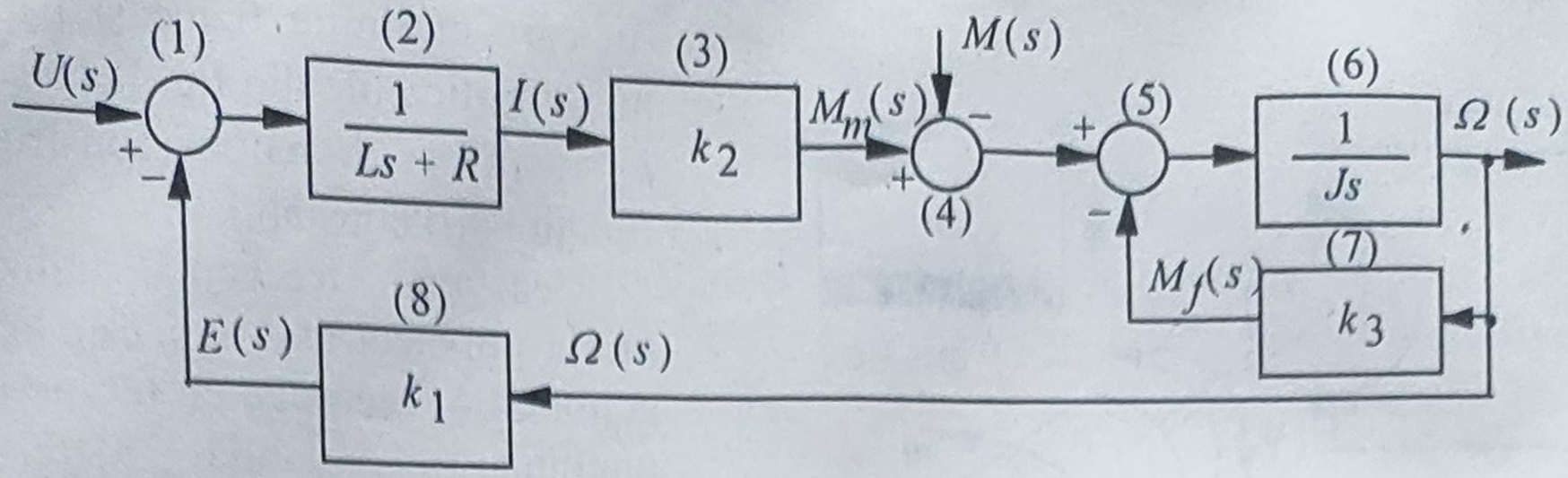


Fig. II.12. Schema bloc structurală a motorului electric de c.c. (exemplul 2.1).

Cu ajutorul acestei scheme se pot interpreta cantitativ şi calitativ relaţiile de cauzalitate existente între mărimile sistemului (inclusiv privind rolul celor două reacţii negative). De exemplu, la creşterea (prin salt, de la o valoare constantă la o altă valoare constantă) a tensiunii u, prin (1) şi (2) - fig. II.12, urmează o creştere a curentului i (mai lentă, datorită elementului cu întârziere (2)) şi a cuplului motor m_m (prin (3)) şi apoi, prin (4), (5), (6), o creştere a lui ω (mai lentă ca a lui i, datorită integratorului (6)). Această creştere, prin reacţia negativă (7), (5), duce la scăderea cuplului rezultant $m_m - m - m_f$, ceea ce determină scăderea vitezei de creştere a lui ω. În acelaşi timp, prin reacţia negativă (8), (1), scade tensiunea rezultantă $u - e$, ceea ce duce la o reducere (cu întârziere, prin (2)) a curentului i, a cuplului motor m_m (prin (3)) şi în final, prin (6), la o reducere suplimentară a vitezei de creştere a lui ω. Procesul continuă în acest fel până la atingerea unei anumite turaţii constante.

Evaluări similare se pot face privitor la efectele cuplului de sarcină (perturbator) m asupra turaţiei.■

După cum rezultă şi din exemplul precedent, *schema bloc structurală* a unui sistem este imaginea grafică a relaţiilor de cauzalitate existente între mărimile sistemului, exprimate prin intermediul funcţiilor de transfer şi pe baza conexiunilor blocurilor cu transfer unidirecţional asociate acestor funcţii de transfer.

2.2. Conexiuni elementare

Este cunoscut faptul că mulţimea funcţiilor (fracţiilor) raţionale formează o structură algebrică de corp comutativ (grup aditiv comutativ şi grup multiplicativ comutativ). În acest context rezultă că orice combinaţii de funcţii de transfer (conform operaţiilor de sumare şi înmulţire) constituie de asemenea funcţii de transfer.

În mulţimea combinaţiilor posibile ale elementelor descrise de funcţii de transfer se disting trei combinaţii minimale tipice care reprezintă cele trei *conexiuni elementare : conexiunea <<serie>>, conexiunea <<paralel>>* şi *conexiunea <<cu reacţie>>*.

1°Conexiunea <<serie>>

Conform denumirii, conexiunea are forma din fig. II.13.

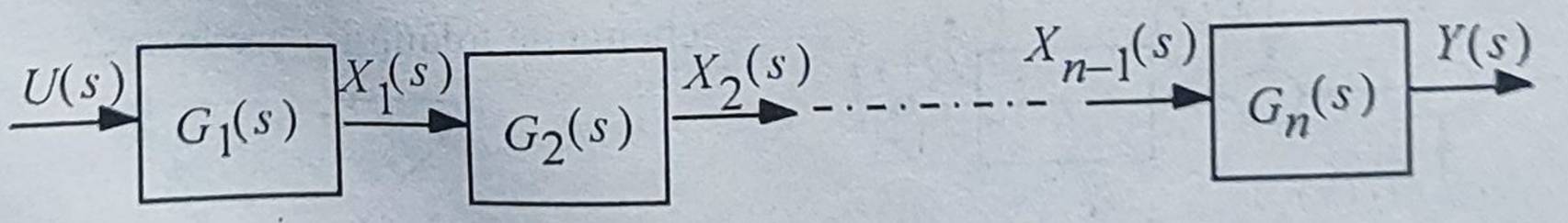


Fig. II. 13. Conexiunea <<serie>>

Relaţiile care o guvernează sunt:

$$X_i(s) = G_i(s)X_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}\ , \tag{2.1}$$

cu

$$X_0(s) = U(s), \quad X_n(s) = Y(s). \tag{2.2}$$

Eliminând $X_i(s)$, $i = \overline{1, n-1}$, între ecuaţiile (2.1) şi ţinând seama de (2.2) se obţine:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s). \tag{2.3}$$

Pe baza rezultatului (2.3) se poate formula următoarea regulă: funcţia de transfer echivalentă a conexiunii <<serie>> este egală cu produsul funcţiilor de transfer ale elementelor componente.

2° Conexiunea <<paralel>>

Această conexiune, conform denumirii, are forma din fig. II.14.

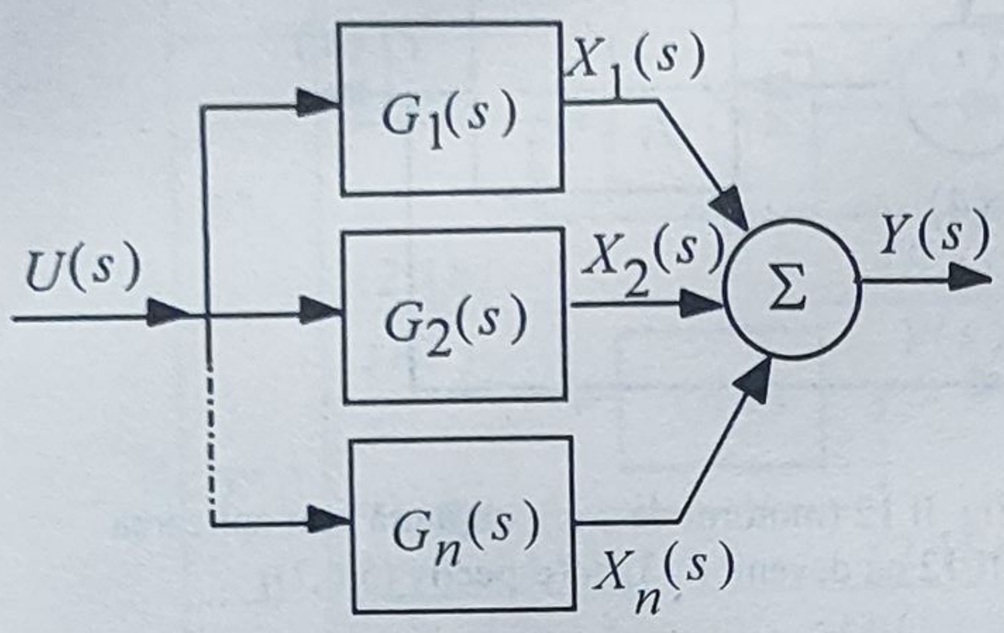


Fig. II.14. Conexiunea <<paralel>>

Relaţiile care o guvernează sunt:

$$X_i(s) = G_i(s)U(s), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.4}$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} X_i(s). \tag{2.5}$$

Înlocuind (2.4) în (2.5) se obţine:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s). \tag{2.6}$$

Rezultatul (2.6) conduce la următoarea regulă: funcţia de transfer echivalentă a conexiunii <<paralel>> este egală cu suma funcţiilor de transfer ale elementelor componente.

3° Conexiunea <<cu reacţie>>

Structura cea mai simplă de acest tip este prezentată în fig. II.15. Se disting : *calea directă* - sumatorul şi blocul reprezentat de $G_1(s)$, *calea de reacţie* - blocul reprezentat de $G_2(s)$ şi sumatorul; *bucla deschisă* în punctul P - blocurile înseriate reprezentate de $G_1(s)G_2(s)$. Reacţia poate fi: fie *negativă* ($X_2(s)$ intră în sumator cu semnul "–"), fie *pozitivă* ($X_2(s)$ intră în sumator cu semnul "+"). Structura din fig. II.15, în care reacţia este negativă, este tipică pentru sistemele automate.

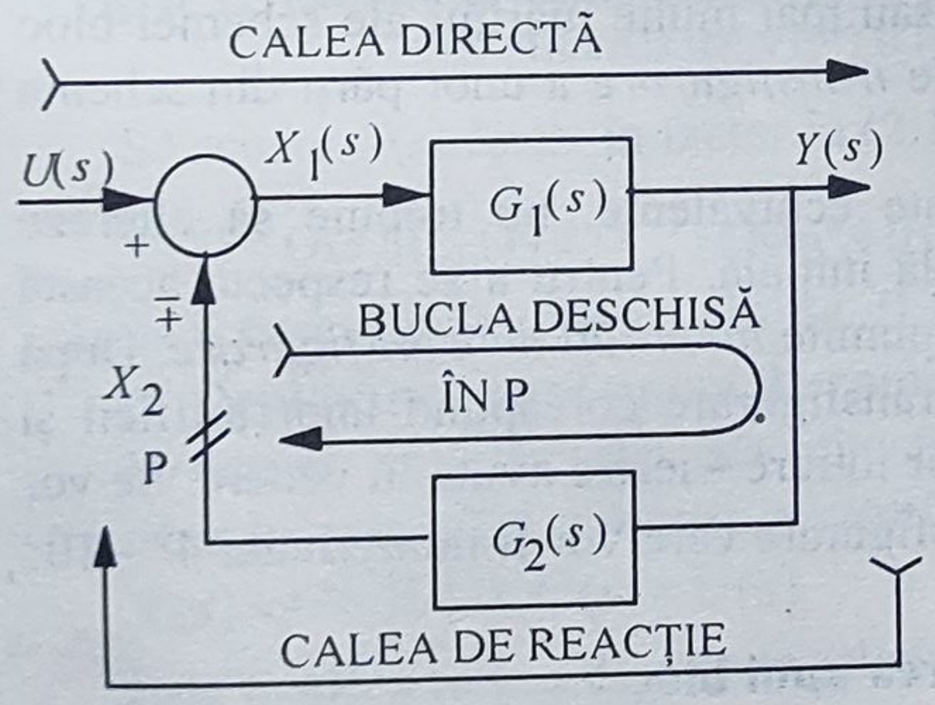


Fig. II.15. Conexiunea cu <<reacţie>>; reacţia negativă: la sumator "$-X_2$"; reacţia pozitivă: la sumator "$+X_2$"

Conform fig. II. 15 se pot scrie ecuaţiile:

$$X_1(r) = U(s) \mp X_2(s) \tag{2.7}$$

$$Y(s) = G_1(s)X_1(s) \tag{2.8}$$

$$X_2(s) = G_2(s)Y(s). \tag{2.9}$$

Eliminând $X_1(s)$ şi $X_2(s)$ între (2.7) – (2.9) se obţine:

$$[1 \pm G_1(s)G_2(s)]Y(s) = G_1(s)U(s), \tag{2.10}$$

din care rezultă:

$$Y(s) = G_0(s)U(s), G_0(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}. \tag{2.11}$$

Din (2.11) se extrage următoarea regulă: funcţia de transfer echivalentă a conexiunii <<cu reacţie>> este egală cu raportul dintre funcţia de transfer a căii directe şi 1± funcţia de transfer a buclei deschise în punctul P (semnul "+" pentru reacţia negativă şi semnul "–" pentru reacţia pozitivă).

Exemplul 2.2

Pentru exemplificarea aplicării celor trei reguli se consideră schema bloc a motorului electric de c.c. din fig. II.12. În cadrul acestei scheme se disting: o conexiune <<serie>> - blocurile (2), (3), şi o conexiune <<cu reacţie>> - blocurile (5)-(7). Aplicând regulile de la 1° şi 3° se ajunge la schema bloc echivalentă din fig. II.16. Prelucrarea în continuare a acestei scheme utilizând regula de la 3° nu mai este posibilă deoarece pe calea directă există un sumator, situaţie care va fi avută în vedere la punctul 2.3.6°.■

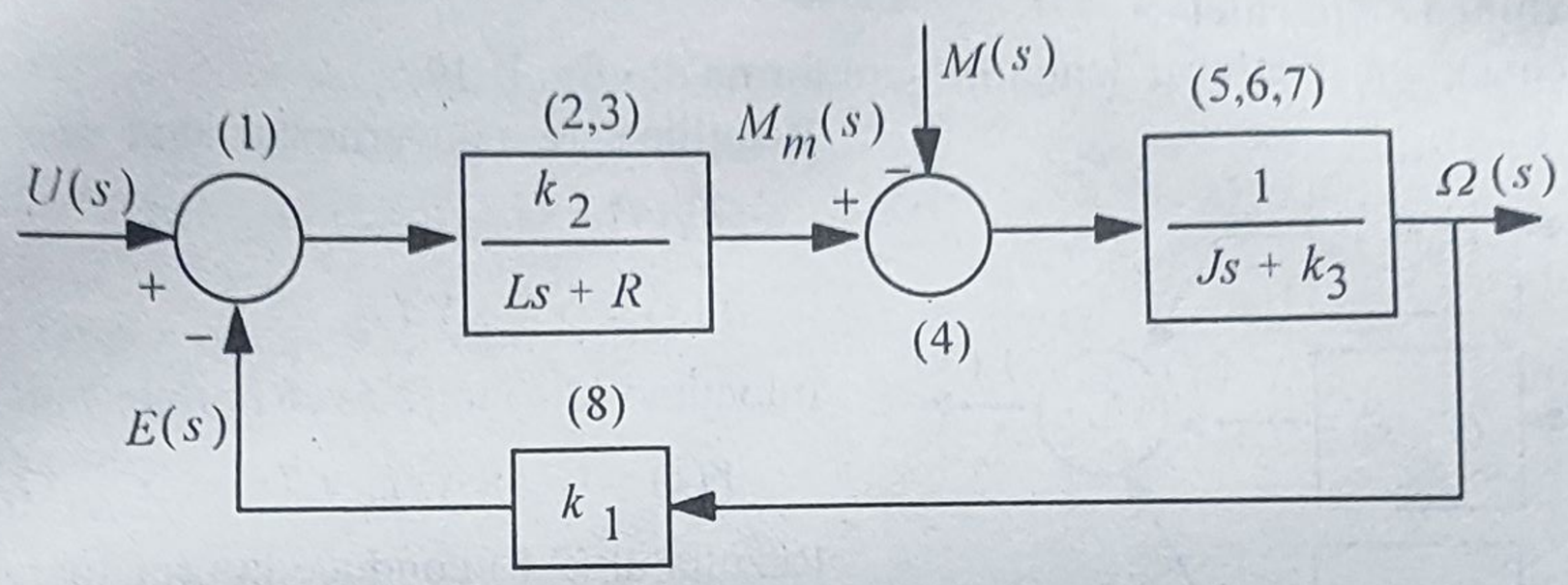


Fig. II.16. Schema bloc structurală echivalentă a aceleia din fig. II.12 (motorul de c.c.), obţinută prin aplicarea regulilor de la 1° şi 3° ((2), (3) şi (5), (6), (7) din fig. II.12 au devenit (2,3) şi respectiv (5,6,7)).

2.3. Transfigurarea schemelor bloc structurale

Posibilităţile de aplicare a regulilor de la 2.2 sunt limitate deoarece ele se referă numai la trei tipuri de conexiuni elementare identificabile în schemele bloc structurale întâlnite uzual în aplicaţii.

Pe de altă parte, necesităţile de analiză şi de sinteză ale sistemelor dinamice reclamă frecvent determinarea relaţiilor care există între două sau mai multe mărimi ale schemei bloc structurale. Acestea implică efectuarea unor operaţii de *transfigurare* a unor părţi din schema bloc structurală sau a acesteia în întregime.

Evident, transfigurările, pentru a produce rezultate echivalente, nu trebuie să altereze relaţiile cantitative existente în schema bloc structurală iniţială. Pentru a se respecta această condiţie, transfigurările se execută în conformitate cu anumite *identităţi de transfigurare*. După cum se va vedea în continuare, aceste identităţi de transfigurare corespund unor artificii şi manipulări matematice foarte simple aplicabile relaţiilor intrare - ieşire avute în vedere. Se vor prezenta în continuare şapte astfel de identităţi de transfigurare care vor fi numerotate 4° - 10° (ca o continuare a regulilor 1° - 3° de la 2.2).

4° Deplasarea unui sumator de la intrarea la ieşirea unui bloc

Structura iniţială avută în vedere este cea din fig. II.17.4°.a. Relaţia intrare - ieşire corespunzătoare are forma:

$$Y(s) = G(s)\left[U_1(s) \pm U_2(s)\right] \tag{2.12}$$

În virtutea distributivităţii operaţiei de înmulţire faţă de cea de adunare, relaţia (2.12) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$Y(s) = G(s)U_1(s) \pm G(s)U_2(s), \tag{2.13}$$

căreia îi corespunde schema din fig. II.17.4°.b, la care se dorea să se ajungă.

5° Deplasarea unui sumator de la ieşirea la intrarea unui bloc

Relaţia intrare - ieşire corespunzătoare (fig. II.17.5°, a) are forma:

$$Y(s) = G(s)U_1(s) \pm U_2(s). \tag{2.14}$$

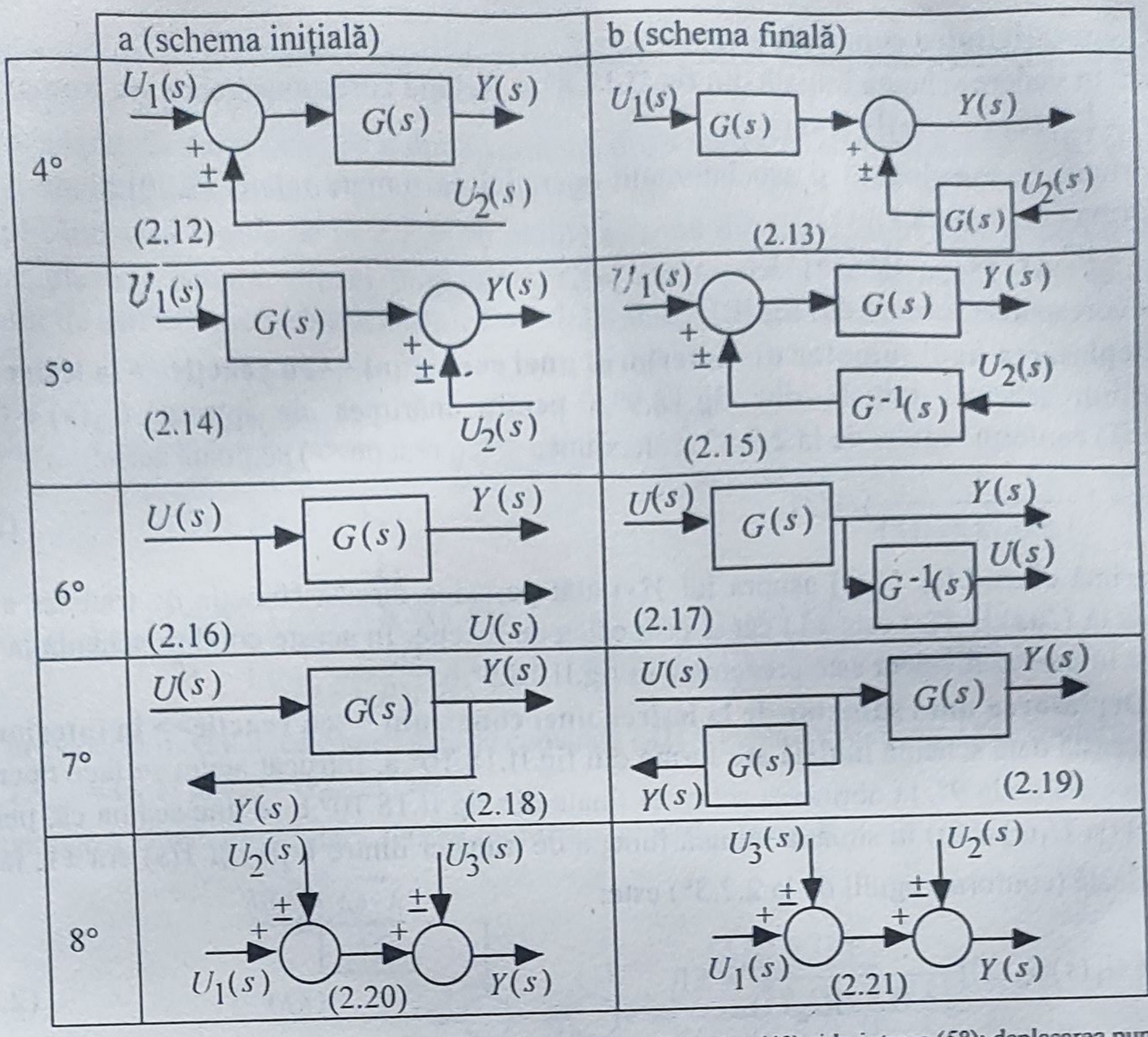


Fig. II. 17. Identități de transfigurare: deplasarea sumatorului la ieşire (4°) şi la intrare (5°); deplasarea punctului de ramificare la ieşire (6°) şi la intrare (7°); comutativitatea sumatoarelor (8°).

Se scoate $G(s)$ forțat în factor în (2.14) şi se obține expresia echivalentă:

$$Y(s)=G(s)[U_1(s)\pm G^{-1}(s)U_2(s)], \tag{2.15}$$

căreia îi corespunde schema din fig. II.17.5°.b.

6° Deplasarea unui punct de ramificare de la intrarea la ieşirea unui bloc

Structura inițială este cea din fig. II.17.6°.a. Relațiile intrare-ieşire corespunzătoare transferului prin $G(s)$ şi respectiv ramificației sunt:

$$Y(s)=G(s)U(s),\ U(s)=U(s). \tag{2.16}$$

Este evident că cea de a doua relație din (2.16) poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$U(s)=G^{-1}(s)G(s)U(s), \tag{2.17}$$

astfel că în final se ajunge la schema din fig. II.17.6°.b.

7° Deplasarea unui punct de ramificare de la ieşirea la intrarea unui bloc

Inițial structura avută în vedere este cea din fig. II.17.7°.a. Relația intrare - ieşire corespunzătoare transferului prin $G(s)$ şi respectiv ramificației sunt:

$$Y(s)=G(s)U(s),\ Y(s)=Y(s). \tag{2.18}$$

Ca şi la 6°, relația a doua din (2.18) poate fi scrisă şi sub forma echivalentă:

$$Y(s)=G(s)U(s), \tag{2.19}$$

astfel că în final se ajunge la schema din fig. II.17.7 .b.

8° Comutativitatea sumatoarelor

Se are în vedere schema inițială din fig.II.17.8°.a. Relația corespunzătoare are forma:

$$Y(s) = [U_1(s) \pm U_2(s)] \pm U_3(s). \tag{2.20}$$

În virtutea comutativității și asociativității operației de sumare relația (2.20) poate fi scrisă și sub forma echivalentă:

$$Y(s) = [U_1(s) \pm U_3(s)] \pm U_2(s), \tag{2.21}$$

căreia îi corespunde schema din fig.II.17.8 .b.

9° Deplasarea unui sumator din interiorul unei conexiuni <<cu reacție>> la ieșire

Conform schemei inițiale din fig.18.9°.a pentru mărimea de intrare $U_2(s) \not\equiv 0$ (și $U_1(s) \equiv 0$) conform regulei de la 2.2.3° (conexiunea <<cu reacție>>) se poate scrie:

$$Y(s) = \pm \frac{1}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} U_2(s), \tag{2.22}$$

care exprimă efectul lui $U_2(s)$ asupra lui $Y(s)$ atât pe calea directă (funcția de transfer a căii directe de la $U_2(s)$ la $Y(s)$ este ± 1) cât și prin calea de reacție. În aceste condiții schema la care se ajunge în mod echivalent este prezentată în fig.II.18.9°.b.

10° Deplasarea unui sumator de la ieșirea unei conexiuni <<cu reacție>> în interior

De această dată schema inițială are forma din fig.II.18.10°.a. Întrucât acum se face operația inversă aceleia de la 9°, la obținerea schemei finale din fig.II.18.10°.b se ține seama că, pentru $U_2(s) \neq 0$ (și $U_1(s) \equiv 0$)) în situația inițială funcția de transfer dintre $U_2(s)$ și $Y(s)$ era ± 1, iar în situația finală (conform regulii de la 2.2.3°) este:

$$\pm[1 \pm G_1(s)G_2(s)] \frac{1}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} = \pm 1. \tag{2.23}$$

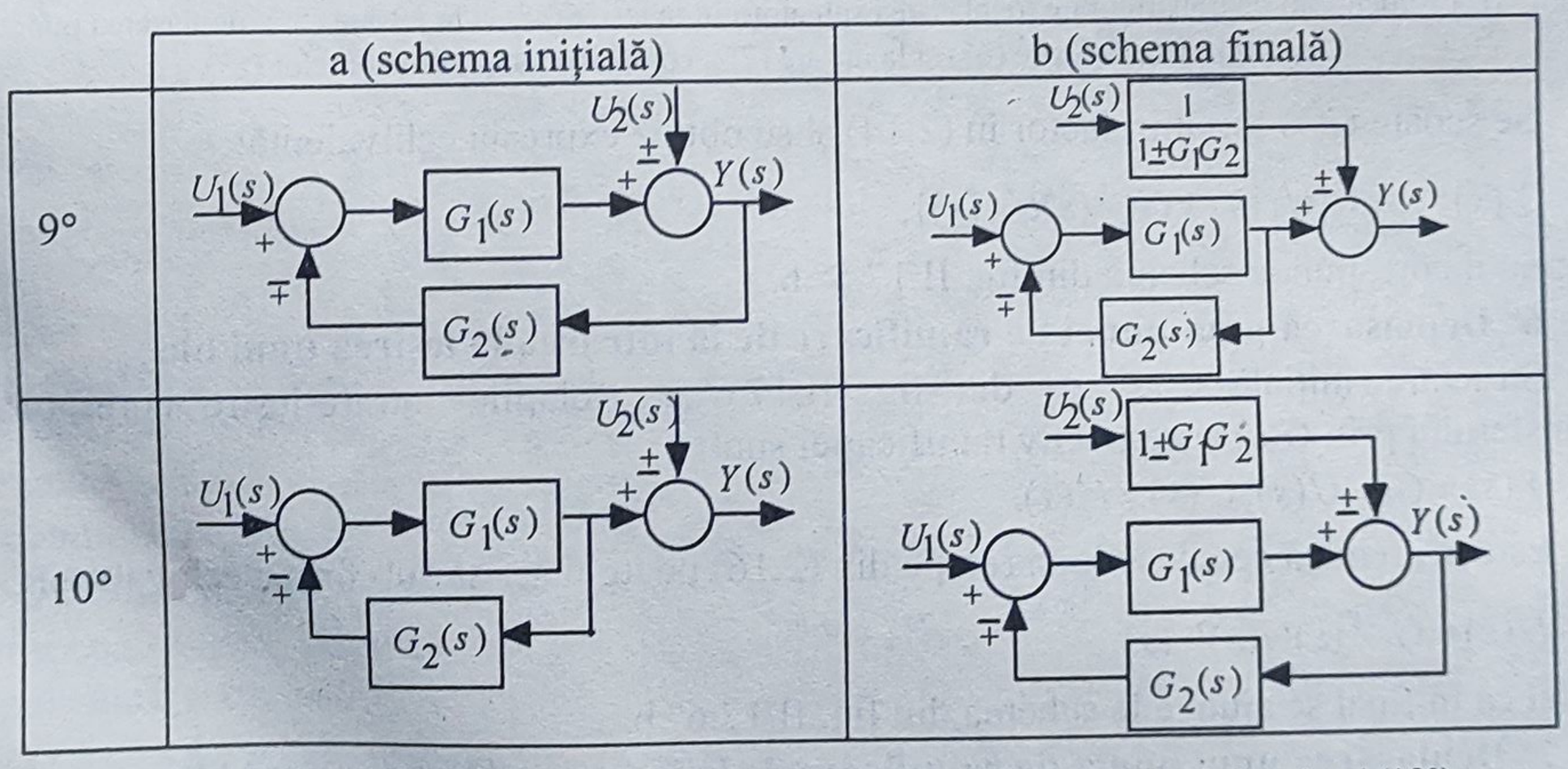


Fig.II.18. Deplasarea sumatorului din interiorul la ieșirea (9°) și de la ieșirea în interiorul (10°) unei conexiuni <<cu reacție>>.

Exemplul 2.3

Utilizând identitățile de transfigurare de mai sus se poate prelucra schema bloc structurală din fig.II.16 (a motorului electric de c.c.) până la forma echivalentă cea mai simplă. Astfel se pot utiliza:

- identitățile 4° și 9° pentru deplasarea sumatorului în care se aplică $M(s)$, la ieșirea sistemului, după care se aplică regulile de la 2.2.1° și 3° (conexiunile <<serie>> și <<cu reacție>>);

• identităţile 5° şi 8° pentru deplasarea aceluiaşi sumator la intrarea sistemului, după care se aplică regulile 2.2.1° şi 3°.

Procedând conform celei de a doua variante, după aplicarea identităţilor 5° şi 8° şi a regulei 2.2.1°, rezultatul este cel din fig.II.19.

Aplicând apoi regula de la 2.2.3° se obţine schema din fig.II.20 în care se pun în evidenţă separat efectele asupra vitezei unghiulare $\Omega(s)$ ale tensiunii de comandă $U(s)$ şi respectiv cuplului de sarcină (perturbator) $M(s)$. Cele două funcţii de transfer:

$$G_0(s)=\frac{\dfrac{k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}}{1+\dfrac{k_1k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}}=\frac{k_2}{LJs^2+(RJ+Lk_3)s+Rk_3+k_1k_2},$$

$$G_{0m}(s)=\frac{Ls+R}{k_2}\,\frac{\dfrac{k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}}{1+\dfrac{k_1k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}}=\frac{Ls+R}{LJs^2+(RJ+Lk_3)s+Rk_3+k_1k_2}$$

pun în evidenţă modul în care tensiunea de comandă $U(s)$ şi cuplul perturbator $M(s)$, conform relaţiei:

$$\Omega(s)=G_0(s)U(s)-G_{0m}(s)M(s),$$

influenţează viteza unghiulară $\Omega(s)$ a motorului electric de c.c.■

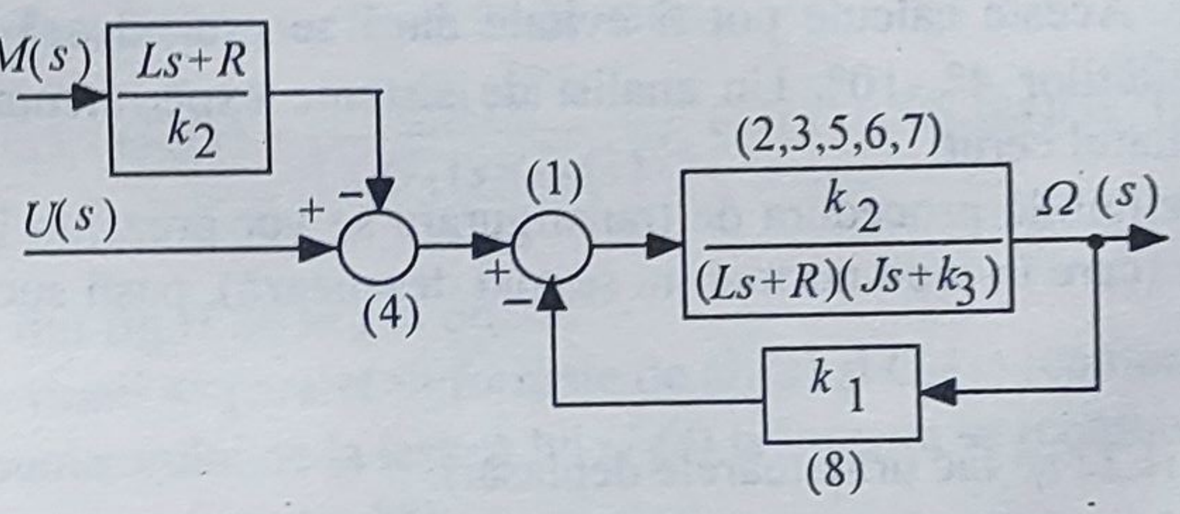


Fig.II.19. Rezultatul transfigurării schemei bloc structurale din fig.II.16 (motorul electric de c.c., exemplele 2.1 şi 2.2) prin identităţile 5°, 8° şi a regulei 1° (de la 2.2), la exemplul 2.3

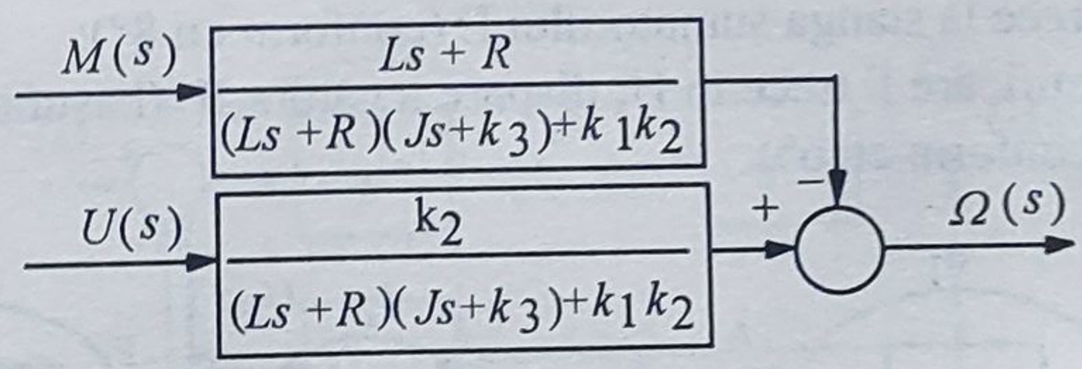


Fig.II.20. Transferul intrare-ieşire al motorului electric de c.c. (exemplele 2.1, 2.2 şi 2.3) obţinut prin aplicarea regulei 3° (de la 2.2) în cazul schemei din fig. II.19

Transfigurările operate într-o schemă bloc structurală dată au în vedere întotdeauna scopul final care trebuie realizat. Pentru atingerea acestuia se parcurg următorii paşi:

a. Se reduc la elemente echivalente elementele conectate în serie (fără puncte de ramificare între elemente) prin aplicarea regulei de la 2.2.1°.

b. Se reduc la elemente echivalente elementele conectate în paralel (fără puncte de ramificare la ieşirile elementelor) prin aplicarea regulei de la 2.2.2°.

c. Se reduc la elemente echivalente elementele în conexiune <<cu reacţie>> (fără puncte de ramificare şi/sau sumatoare în interiorul conexiunii <<cu reacţie>>) prin aplicarea regulei de la 2.2.3°.

d. Se deplasează convenabil punctele de ramificare şi/sau sumatoarele prin aplicarea identităţilor de transfigurare 4° - 10°.

e. Se repetă operaţiile de la paşii a - d în funcţie de natura schemei şi de scopul care trebuie realizat.

Exemplul 2.4

Se consideră sistemul cu schema bloc structurală din fig.II.21 şi se cere determinarea relaţiei intrare-ieşire ($Y(s)$ în funcţie de $U_1(s)$ şi $U_2(s)$).

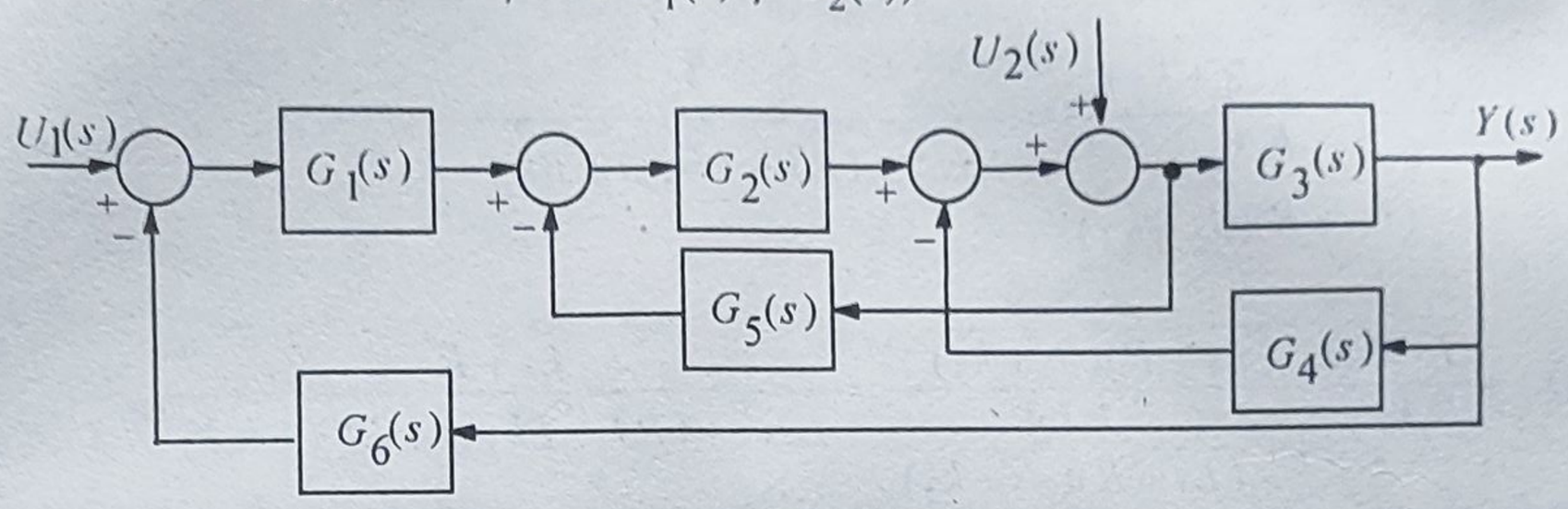


Fig.II.21. Schema bloc structurală la exemplul 2.4.

Rezolvarea pe baza ecuaţiilor sistemului este relativ laborioasă. Evident, se pot scrie 10 ecuaţii (pentru cele 6 blocuri şi pentru cele 4 sumatoare) între care urmează să se elimine 9 mărimi intermediare. Aceste calcule pot fi evitate dacă se procedează la aplicarea regulilor 2.2.1°- 3° şi a identităţilor 4° -10°. Un analist de sisteme experimentat poate ajunge astfel foarte repede la rezultatul cerut.

Pentru a face inteligibilă procedura de transfigurare se vor prezenta în detaliu, pe bază de scheme intermediare (care în mod normal nu se mai desenează), paşii succesivi care conduc la rezultatul cerut.

– Pasul I

Cu referire la fig.II.22 se fac următoarele deplasări:

- d_1 - sumatorul A se suprapune peste sumatorul B; dispare legătura CA (haşurată) şi apare legătura CB prin $G_1^{-1}(s)$ (conform cu 5°);
- d_2 - sumatorul D trece la stânga sumatorului E (conform cu 8°);
- d_3 - punctul de ramificare F trece în H; dispare legătura IF (haşurată) şi apare legătura HI prin $G_3^{-1}(s)$ (conform cu 6°).

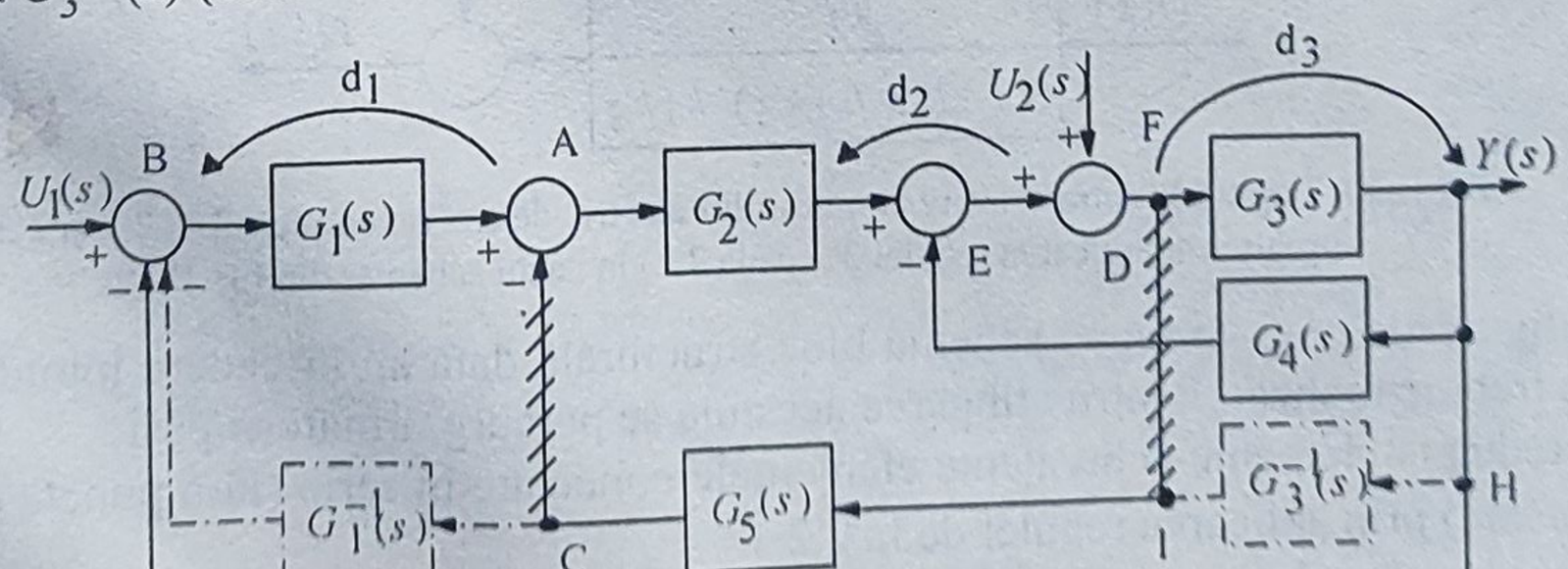


Fig.II.22. Ilustrarea deplasărilor d_1, d_2 şi d_3 respectiv ale sumatoarelor A, D şi a punctului de ramificare F, operabile în fig.II.21 (exemplul 2.4, pasul I)

Se obține în acest fel schema din fig.II.23.

– Pasul II

În schema din fig.II.23 se pot opera următoarele:

- echivalarea conexiunilor <<serie>> formate de $G_1(s)$ și $G_2(s)$ și respectiv $G_3^{-1}(s)$, $G_5(s)$ și $G_1^{-1}(s)$ (conform cu 2.2.1°);
- echivalarea conexiunii <<cu reacție>> formate de $G_3(s)$ și $G_4(s)$ (conform cu 2.2.3°).

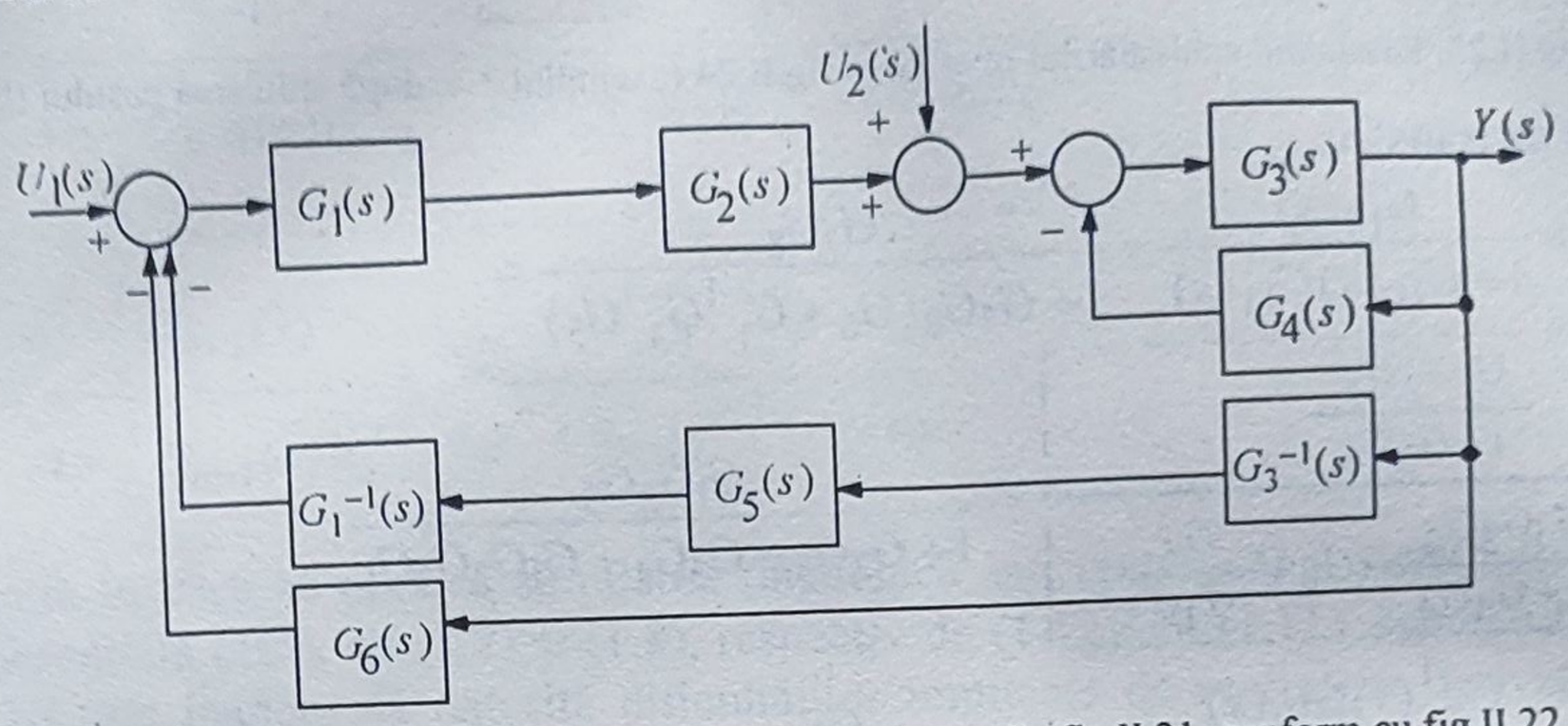


Fig. II.23. Rezultatul transfigurărilor operate în schema din fig.II.21, conform cu fig.II.22 (exemplul 2.4, după aplicarea operațiilor de la pasul I)

Se obține pe această cale schema din fig.II.24 în care:

$$G_7(s)=G_1(s)G_2(s),\quad G_8(s)=\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)G_4(s)},\quad G_9(s)=G_1^{-1}(s)G_3^{-1}(s)G_5(s).$$

– Pasul III

În fine, în schema din fig.II.24 se pot opera:

- echivalarea conexiunii <<paralel>> formate de $G_6(s)$ și $G_9(s)$ (conform cu 2.2.2°);
- d_4 - deplasarea sumatorului de la ieșirea lui $G_7(s)$ la intrarea sa (conform cu 5°) și comutarea cu celălalt sumator (conform cu 8°);
- echivalarea conexiunii <<serie>> formate din $G_7(s)$ și $G_8(s)$ (conform cu 2.2.1°).

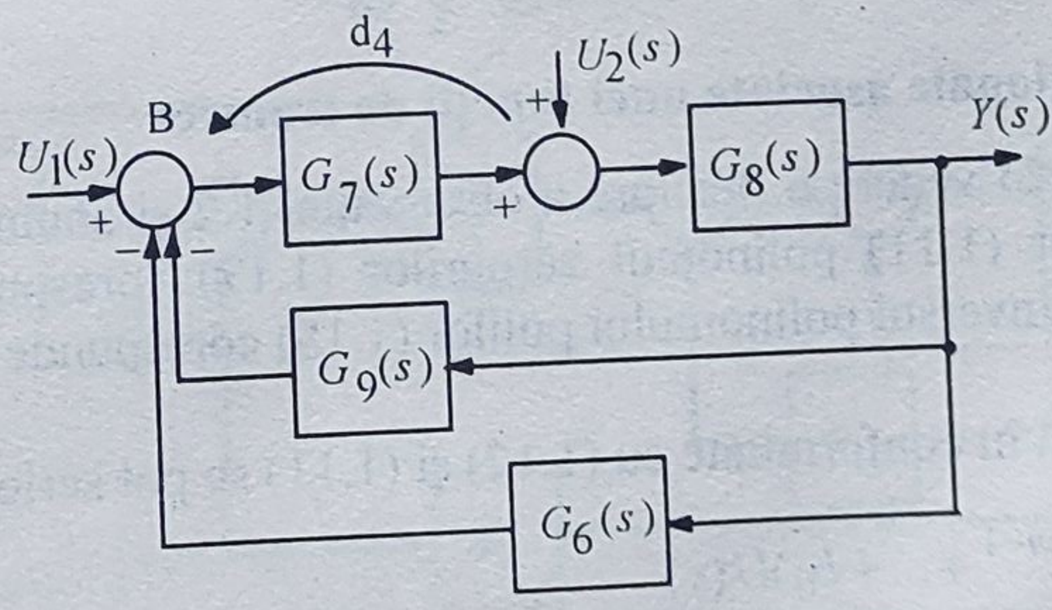


Fig.II.24. Rezultatul echivalărilor operate în fig.II.23 (exemplul 2.4, după aplicarea pasului II)

Se ajunge în acest fel la schema din fig.II.25 în care:

$G_{10}(s)=G_7(s)G_8(s)$, $G_{11}(s)=G_6(s)+G_9(s)=G_6(s)+G_1^{-1}(s)G_3^{-1}(s)G_5(s)$.

Aplicând acum regula de la 2.2.3° (pentru conexiunea <<cu reacție>>) se scrie relația intrare - ieșire:

$$Y(s)=G_{01}(s)U_1(s)+G_{02}(s)U_2(s),$$

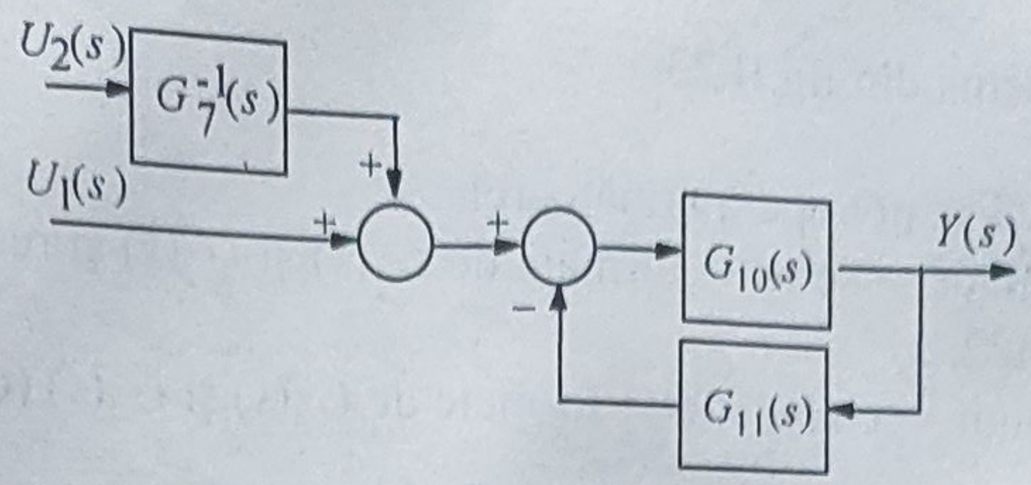


Fig.II.25. Rezultatul echivalărilor operate în fig.II.24 (exemplul 2.4, după aplicarea pasului III)

cu funcţiile de trańsfer:

$$G_{01}(s)=\frac{G_{10}(s)}{1+G_{10}(s)G_{11}(s)}=\frac{G_7G_8}{1+G_7G_8(G_6+G_1^{-1}G_3^{-1}G_5)}=$$

$$=\frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_3G_4}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_3G_4}(G_6+\dfrac{G_5}{G_1G_3})}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_5+G_3G_4+G_1G_2G_3G_6},$$

$$G_{02}(s)=\frac{G_7^{-1}(s)G_{10}(s)}{1+G_{10}(s)G_{11}(s)}=\frac{G_8}{1+G_7G_8(G_6+G_1^{-1}G_3^{-1}G_5)}=$$

$$=\frac{\dfrac{G_3}{1+G_3G_4}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_3G_4}(G_6+\dfrac{G_5}{G_1G_3})}=\frac{G_3}{1+G_2G_5+G_3G_4+G_1G_2G_3G_6},$$

în care s-a renunțat, pentru simplificare, la scrierea explicită a variabilei s.

Ca observație concluzivă se poate aprecia că un analist de sisteme (suficient de experimentat) poate scrie direct expresiile funcțiilor de transfer $G_{01}(s)$ şi $G_{02}(s)$ (cele încadrate în dreptunghiurile trasate cu linie întreruptă), aplicând direct regulile de la 2.2.1°-3° şi identitățile 4°-10°.■

2.4. Scheme bloc operaționale asociate unei funcții de transfer

Pentru început se are în vedere o ilustrare a observației 1.2 şi anume evidențierea faptului că în funcția de transfer (1.11) polinomul zerourilor (1.17) corespunde unui operator de amplificare şi derivare şi inversul polinomului polilor (1.18) corespunde unui operator bazat pe integrare.

Mai întâi se observă că în conformitate cu (1.12) şi (1.11) se pot scrie ecuațiile:

$$X(s)=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0)U(s) \tag{2.24}$$

$$Y(s)=\frac{1}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}X(s). \tag{2.25}$$

Ecuației (2.24) i se poate asocia schema bloc operațională din fig.II.26.a, ceea ce învederează faptul că polinomul zerourilor lui $G(s)$ corespunde unui operator de amplificare-derivare (cu efect de amplificare - anticipare).

Pentru a asocia şi ecuației (2.25) o schemă bloc operațională adecvată, se are în vedere că funcția de transfer din (2.25) se poate obține din următoarele relații de recurență:

$$G_1(s)=\frac{\frac{1}{a_n s}}{1+\frac{1}{a_n s}a_{n-1}}=\frac{1}{a_n s+a_{n-1}},\quad G_2(s)=\frac{\frac{1}{s}G_1(s)}{1+\frac{1}{s}G_1(s)a_{n-2}}=\frac{1}{a_n s^2+a_{n-1}s+a_{n-2}},$$

$$G_k(s)=\frac{\frac{1}{s}G_{k-1}(s)}{1+\frac{1}{s}G_{k-1}(s)a_{n-k}}=\frac{1}{a_n s^k+a_{n-1}s^{k-1}+\ldots+a_{n-k}},$$

$$G_n(s)=\frac{\frac{1}{s}G_{n-1}(s)}{1+\frac{1}{s}G_{n-1}(s)a_0}=\frac{1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}.$$

În situația în care se dorește simularea (analogică sau numerică) a sistemului descris de ecuația diferențială (1.5), cu (1.7) şi (1.8), respectiv de (1.12), cu (1.11), schema operațională din fig.II.26 este inadecvată datorită dificultăților implicate de realizarea derivatoarelor din fig.II.26.a. Practic, derivatoarele (analogice sau numerice) introduc erori (adesea inacceptabile) față de derivarea în sens matematic, fapt explicabil conform observației 1.3. În contrast, realizarea integratoarelor (analogice sau numerice) este mai simplă în condițiile în care erorile față de integrarea în sens matematic sunt de regulă acceptabile. În acest context ar fi foarte utilă o schemă bloc operațională bazată numai pe integratoare, aşa cum s-a obținut în fig.II.26.b, dar care să se refere la funcția de transfer (1.11).

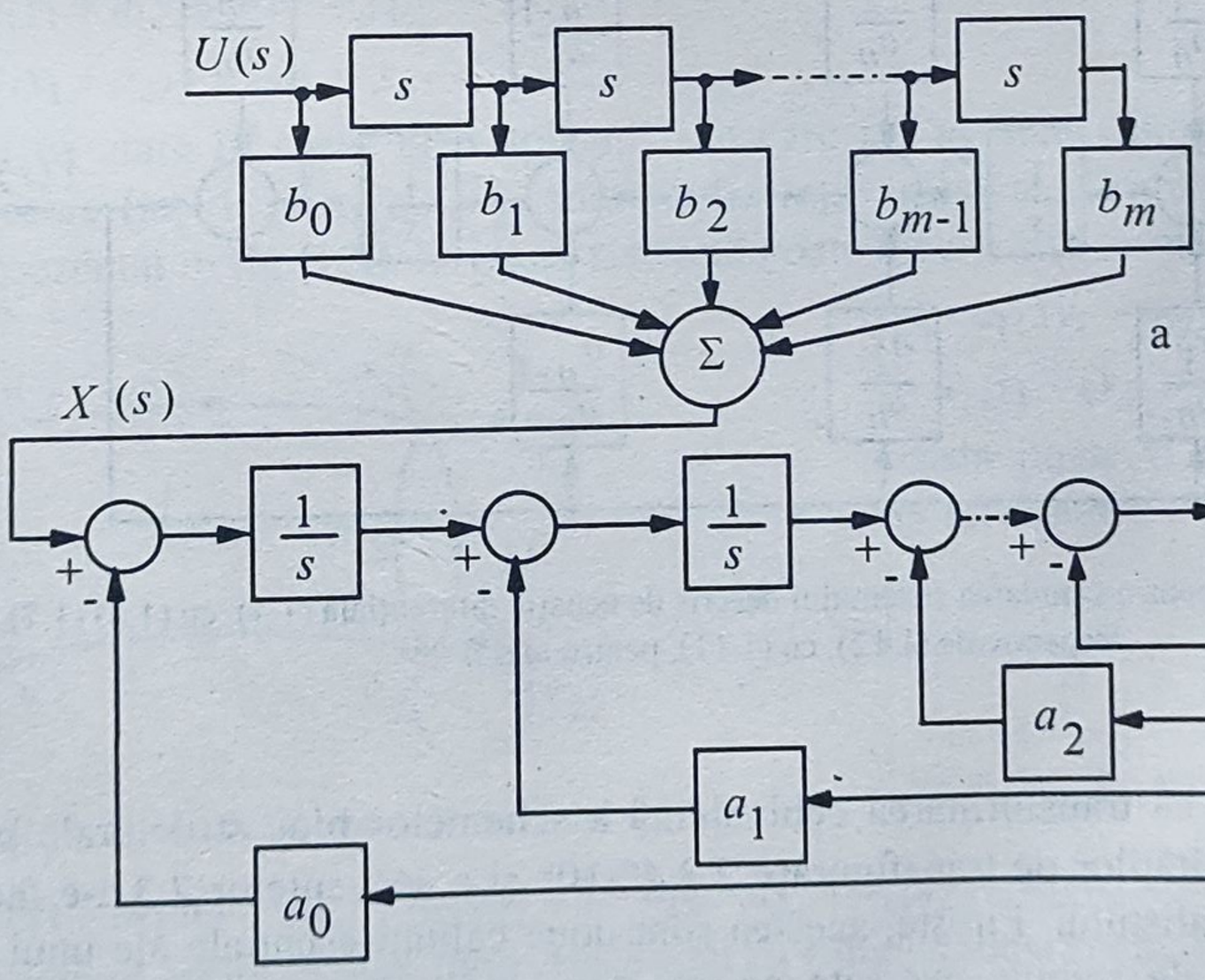


Fig.II.26. Schema bloc operațională pentru ilustrarea observației 1.2: a-polinomul zerourilor; b-inversul polinomului polilor

În ipoteza $m \le n$ (fără a reduce generalitatea se consideră $m = n$ urmând ca valoarea efectivă a lui m să fie dată de indicele primului coeficient nenul din şirul: $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$) ecuația (1.12), cu (1.11), poate fi scrisă sub forma:

$$\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{s}+\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{s^2}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{s^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{s^n}\right)Y(s)=$$

$$=\left(\frac{b_n}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{a_n}\frac{1}{s}+\frac{b_{n-2}}{a_n}\frac{1}{s^2}+\ldots+\frac{b_1}{a_n}\frac{1}{s^{n-1}}+\frac{b_0}{a_n}\frac{1}{s^n}\right)U(s).$$

Din aceasta rezultă:

$$Y(s)=\frac{b_n}{a_n}U(s)+\frac{1}{s}\left(\frac{b_{n-1}}{a_n}U(s)-\frac{a_{n-1}}{a_n}Y(s)+\frac{1}{s}\left(\frac{b_{n-2}}{a_n}U(s)-\frac{a_{n-2}}{a_n}Y(s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{s}\left(\ldots+\frac{1}{s}\left(\frac{b_1}{a_n}U(s)-\frac{a_1}{a_n}Y(s)+\frac{1}{s}\left(\frac{b_0}{a_n}U(s)-\frac{a_0}{a_n}Y(s)\right)_{\underbrace{\cdots\cdots}_{n}}\right)\right)\right),$$

căreia îi corespunde schema bloc operațională din fig.II.27. Aceasta se bazează exclusiv pe integratoare incluse în structuri adecvate (<<serie>>, <<paralel>> şi <<cu reacție>>), fiind în acelaşi timp structura cu numărul minim de elemente conservative (acumulatoare de energie), independente între ele, corespunzătoare ecuației (1.5), pentru $m \le n$. Ea poate fi utilizată pentru simularea (analogică sau numerică) a sistemelor dinamice descrise de ecuații diferențiale ordinare cu coeficienți constanți, cu condiții inițiale nule. Extinderea la cazul condițiilor inițiale nenule constă în introducerea la ieşirea fiecărui integrator a câte unui sumator în care se aplică adecvat condițiile inițiale (stările inițiale ale integratoarelor).

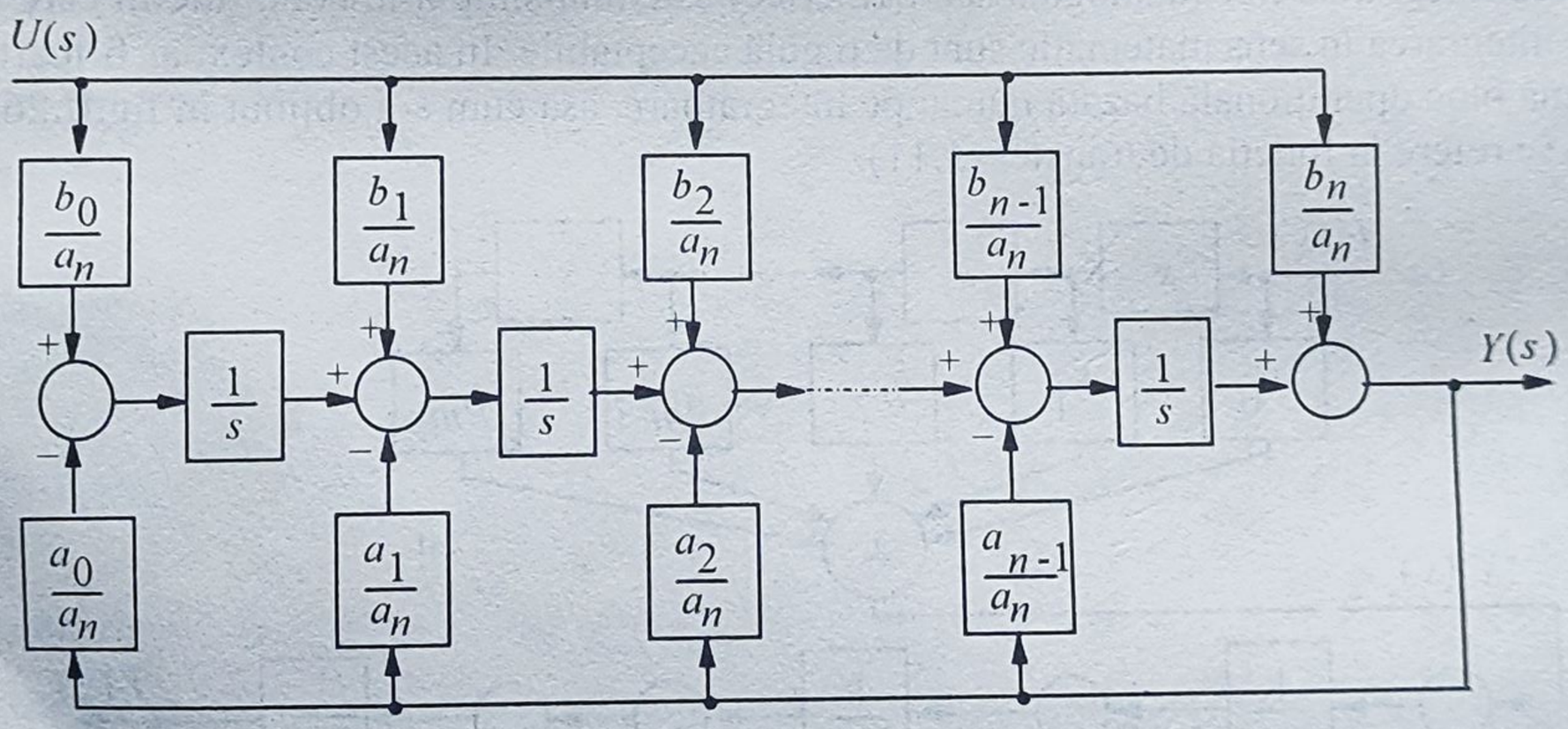


Fig.II.27. Schema bloc pentru simularea sistemului descris de ecuația diferențială (1.4), cu (1.6) (1.7), respectiv de (1.12), cu (1.11), pentru $m \le n$

2.5. Grafuri de fluență

Este uşor de constatat că transformarea echivalentă a schemelor bloc structurale pe baza regulilor 2.2.1°-3°, a identităților de transfigurare 2.3.4°-10° şi a secvențelor 2.3.a-e face apel la experiența şi intuiția analistului. Firește, acestea sunt două calități esențiale ale unui analist de sisteme şi ca urmare ele trebuie exersate pe exemple cât mai variate de scheme bloc structurale, mai ales în faza de instruire a analistului.

Pe de altă parte, în situația formulării unor scopuri clare, prelucrarea unei scheme bloc structurale trebuie să fie expeditivă. Acest lucru se poate realiza utilizând conceptul de graf de fluență de tip Mason.

Un *graf de fluență de tip Mason* este o rețea formată din *noduri* legate prin *arce orientate*. Nodurile inițial și final ale unui arc au semnificația de mărimi de intrare respectiv de ieșire. În aceste condiții arcul orientat este caracterizat de funcția sa de transfer (în general de *transmitanța* arcului orientat), conform reprezentării din fig.II.28, asociată aceleia din fig.II.7.

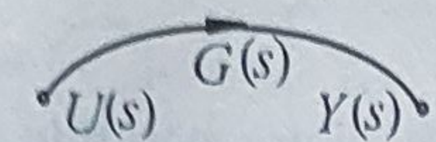


Fig.II.28. Graful de fluență asociat schemei bloc din fig.II.7

Pentru exemplificare se dau în fig.II.29.a-c grafurile de fluență corespunzătoare conexiunilor <<serie>> (fig.II.13), <<paralel>> (fig.II.14) și <<cu reacție>> (fig.II.15).

De fapt, la origine, un graf de fluență a fost utilizat pentru evidențierea grafică a dependențelor dintre variabilele unui sistem de ecuații algebrice liniare.

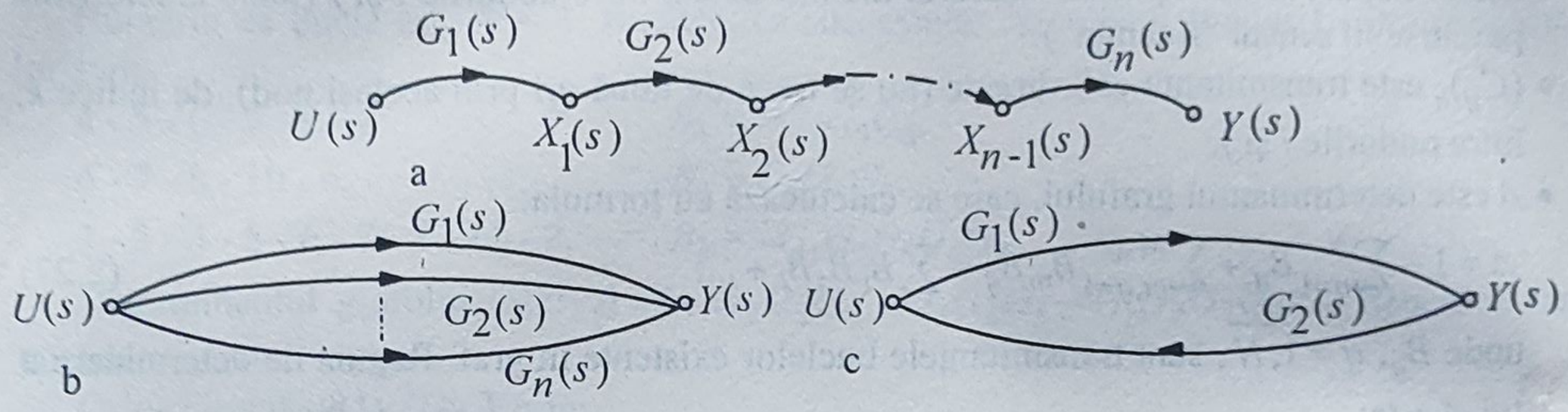


Fig.II.29. Grafurile de fluență asociate conexiunilor elementare: a - <<serie>> (fig.II.13), b - <<paralel>> (fig.II.14), c - <<cu reacție>> (fig.II.15)

Exemplul 2.5

Fie sistemul algebric:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + u_1 = y_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + u_2 = y_2, \end{cases}$$

(obținut ca atare în cazul unei aplicații), în care u_1, u_2 sunt cunoscute (intrări), y_1, y_2 sunt necunoscute (ieșiri) și a_{11},..., a_{22} sunt coeficienți cunoscuți. Graful de fluență corespunzător este reprezentat în fig.II.30. Evident, sistemul poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} (1-a_{11})y_1 - a_{12}y_2 = u_1 \\ -a_{21}y_1 + (1-a_{22})y_2 = u_2. \end{cases}$$

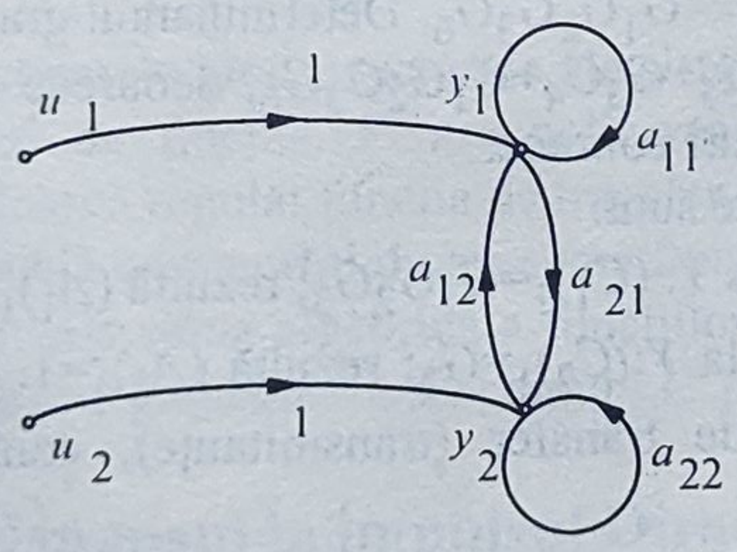


Fig.II.30. Graful de fluență de la exemplul 2.5

Acesta poate fi rezolvat prin utilizarea regulei lui Cramer:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1-a_{22}}{\Delta}u_1 + \dfrac{a_{12}}{\Delta}u_2 \\ y_2 = \dfrac{1-a_{11}}{\Delta}u_2 + \dfrac{a_{21}}{\Delta}u_1, \end{cases}$$

cu $\Delta = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Se remarcă faptul că numitorul Δ este egal cu 1 minus suma coeficienților corespunzători tuturor buclelor (a_{11}, a_{22} și $a_{12}a_{21}$) plus produsul coeficienților buclelor care nu au noduri comune ($a_{11}a_{22}$).

Numărătorii pentru y_1:

- asociat lui u_1 apare $1(1 - a_{22})$ care se obține din Δ prin păstrarea numai a coeficienților arcelor care nu au noduri comune cu arcul de la u_1 la y_1 (acest arc are coeficientul 1, plasat formal în fața binomului $(1 - a_{22})$);

- asociat lui u_2 apare $a_{12}1$; a_{12} este coeficientul arcelor de la u_2 la y_1 şi 1 este valoarea lui Δ din care s-au eliminat coeficienţii tuturor buclelor care au noduri comune cu nodurile situate pe calea de la u_2 la y_1.

Numărătorii lui y_2 au aceeaşi semnificaţie (*mutatis mutandis*).■

În general, valoarea transmitanţei T_{ij} dintre nodurile i şi j, respectiv dintre mărimile x_i şi x_j, se obţine cu formula lui Mason:

$$T_{ij} = \frac{1}{\Delta}\sum_k (C_{ij})_k (\Delta_{ij})_k \ , \tag{2.26}$$

în care:

- Suma după k se face pentru numărul maxim de căi între nodurile i şi j (toate arcele fiind parcurse în sensul "fluenţei").
- $(C_{ij})_k$ este transmitanţa căii directe (nu se trece de două ori prin acelaşi nod), de indice k, între nodurile i şi j.
- Δ este determinantul grafului, care se calculează cu formula:

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^{N} B_n + \sum_{m,q=1}^{M,Q} B_m B_q - \sum B_r B_s B_t + ..., \tag{2.27}$$

unde B_q, $q = \overline{1,N}$, sunt transmitanţele buclelor existente în graf. Regula de determinare a lui Δ este:

Δ = 1– (suma transmitanţelor tuturor buclelor) + (suma produselor transmitanţelor tuturor combinaţiilor de câte două bucle care nu au noduri comune) – (suma produselor transmitanţelor tuturor combinaţiilor de câte trei bucle care nu au noduri comune) +... .

- $(\Delta_{ij})_k$ este cofactorul (relativ la Δ) al căii k. Aceasta se determină din Δ eliminând buclele care au noduri comune cu calea k.

Exemplul 2.6

Se consideră graful de fluenţă corespunzător schemei bloc structurale de la exemplul 2.4 (fig.II.21), având forma din fig.II.31. Numărul de bucle este N = 3, având transmitanţele: B_1=–G_2G_5, B_2=–G_3G_4, B_3=–$G_1G_2G_3G_6$. Determinantul grafului este: Δ=1+G_2G_5+G_3G_4+$G_1G_2G_3G_6$, deoarece toate buclele au noduri comune.

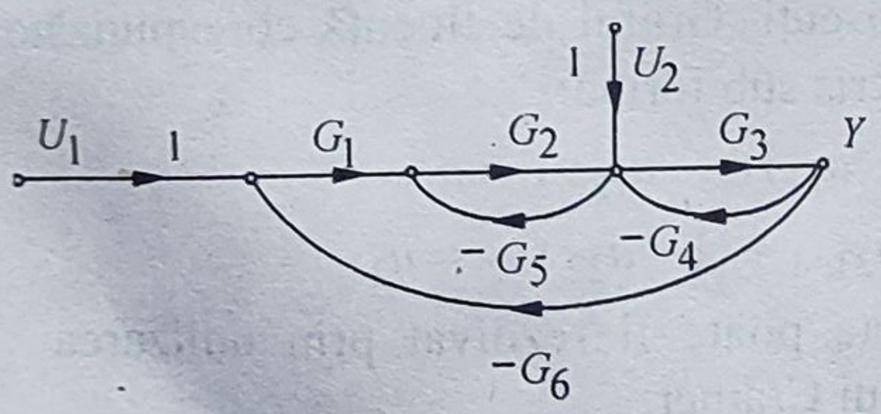


Fig.II.31. Graful de fluenţă (la exemplul 2.6) corespunzător schemei bloc structurale din fig.II.21 (exemplul 2.4)

Căile directe sunt:

- de la U_1 la Y: $(C_1)_1$=$G_1G_2G_3$; rezultă $(\Delta_1)_1$=1;
- de la U_2 la Y:$(C_2)_1$=G_3; rezultă $(\Delta_2)_1$=1. Cele două funcţii de transfer (transmitanţe), conform formulei (2.26) au expresiile:

$$G_{01} = \frac{Y}{U_1} = \frac{G_1G_2G_3}{\Delta}, \ G_{02} = \frac{Y}{U_2} = \frac{G_3}{\Delta}. \blacksquare$$

Exemplul 2.7

Se consideră schema bloc structurală din fig.II.32. Se cere $G_0 = Y / U$.

Având în vedere modul în care s-a procedat la exemplul 2.6, se constată că nu este necesar să se deseneze graful corespunzător schemei din fig.II.32. Pentru aplicarea formulei lui Mason este suficient să se numeroteze toate mărimile sistemului, aşa cum s-a făcut deja în fig.II.32.

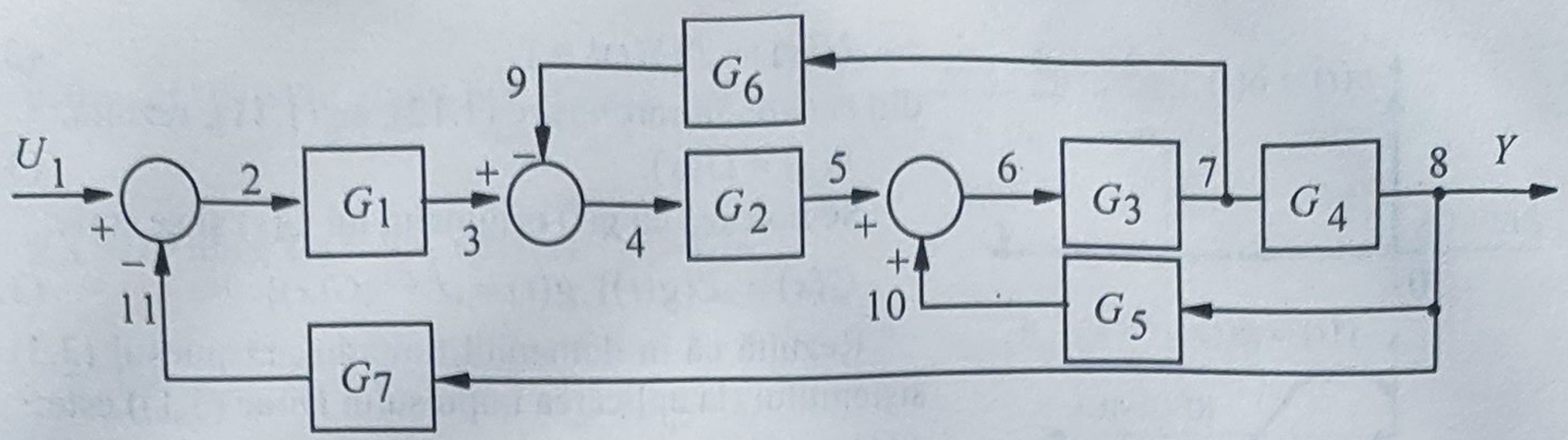


Fig.II.32. Schema bloc structurală de la exemplul 2.7

Numărul de bucle este $N = 3$. Buclele, ca succesiune de mărimi (noduri) şi transmitanțele lor sunt:

4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 4, $B_1 = -G_2G_3G_6$,

6 - 7 - 8 - 10 - 6, $B_2 = G_3G_4G_5$,

2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 11 - 2, $B_3 = -G_1G_2G_3G_4G_7$.

Determinantul grafului este: $\Delta = 1 + G_2G_3G_6 - G_3G_4G_5 + G_1G_2G_3G_4G_7$, deoarece toate buclele au noduri comune.

Calea directă de la U la Y este:

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8, $(C_1)_1 = G_1G_2G_3G_4$; rezultă $\Delta_1 = 1$.

Funcția de transfer (transmitanța) dintre U şi Y are expresia:

$$G_0 = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3G_6 - G_3G_4G_5 + G_1G_2G_4G_7}. \blacksquare$$

Grafurile de fluență de la exemplele 2.6 şi 2.7 fac parte dintr-o clasă caracterizată prin:

- Toate buclele au noduri comune. Ca urmare:

  $\Delta = 1 -$ (suma transmitanțelor tuturor buclelor).
- Toate căile directe au noduri comune cu toate buclele. Ca urmare:

  $\Delta_k = 1,\ k = \overline{1, N}$.

Schemele bloc structurale ale sistemelor automate fac parte, de regulă, din această clasă de Grafuri de fluență. Pentru aplicarea formulei lui Mason în astfel de cazuri se utilizează următoarea regulă: funcția de transfer echivalentă între mărimea de intrare şi mărimea de ieşire este egală cu raportul dintre suma funcțiilor de transfer ale căilor directe între cele două mărimi şi 1 minus suma algebrică a funcțiilor de transfer ale buclelor, care au, după caz, semnul "–" pentru reacția negativă şi semnul "+" pentru reacția pozitivă.

3. Răspunsul la impulsul Dirac

3.1. Definiție

Se consideră un sistem dinamic liniar descris de funcție de transfer $G(s)$ (fig.II.7). Se aplică la intrare impulsul Dirac (Anexa B):

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{3.1}$$

Întrucât:

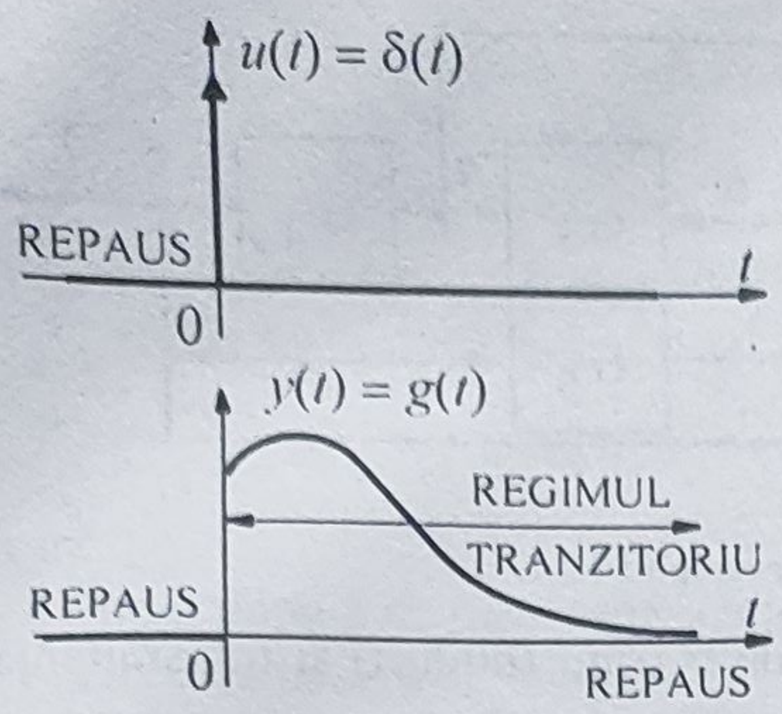


Fig.II.33. Răspunsul la impulsul Dirac; ilustrarea proprietăților (3.6) și (3.15)

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \tag{3.2}$$

din ecuația intrare-ieșire (1.12), cu (1.11), rezultă:

$$Y(s) = G(s). \tag{3.3}$$

Se notează cu $g(t)$ originalul lui $G(s)$ și se scrie:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \tag{3.4}$$

Rezultă că în domeniul timpului, răspunsul (3.3) al sistemului (la aplicarea impulsului Dirac (3.1)) este:

$$y(t) = g(t). \tag{3.5}$$

Definiția 1

Răspunsul (3.5) al sistemului (1.12) (la aplicarea la intrare a impulsului Dirac (3.1)) se numește *răspunsul la impulsul Dirac*.■

3.2. Proprietăți

a. Conform principiului cauzalității (non-anticipării, observația 1.1) răspunsul la impulsul Dirac are proprietatea:

$$g(t) \equiv 0, t < 0, \tag{3.6}$$

pentru care se dă o ilustrare în fig.II.33.

b. Răspunsul la impulsul Dirac este soluția ecuației diferențiale:

$$a_n D^n g(t) + a_{n-1} D^{n-1} g(t) + \ldots + a_1 Dg(t) + a_0 g(t) = \tag{3.7}$$

$$b_m D^m \delta(t) + b_{m-1} D^{m-1} \delta(t) + \ldots + b_1 D\delta(t) + b_0 \delta(t),\ t \in \mathbf{R},$$

în care D simbolizează *derivata generalizată* sau *în sens distribuții* (Anexa B).

Într-adevăr, aplicând transformarea Laplace ecuației (3.7) se obține:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) G(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) 1. \tag{3.8}$$

Înlocuind (1.11) în (3.8) rezultă că aceasta este satisfăcută.

Conform ecuației (3.7) rezultă că în general răspunsul la impulsul Dirac, $g(t)$, este o *funcție generalizată* sau o *distribuție* (Anexa B).

c. Pentru $t > 0$ răspunsul la impulsul Dirac, $g(t)$, este o funcție continuă, soluție a ecuației diferențiale omogene:

$$a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

Într-adevăr, pentru $t > 0$ rezultă $\delta(t) = 0$; din (3.7), în care operația de derivare generalizată se înlocuiește cu cea de derivare obișnuită, se obține (3.9).

d. În cazul $m \le n - 1$ răspunsul la impulsul Dirac, $g(t)$, are cel mult o discontinuitate de speța I la stânga punctului $t = 0$ și este o funcție continuă în rest (inclusiv la dreapta punctului $t = 0$).

Într-adevăr, pentru $t \neq 0$, de la **a** și **c** rezultă că $g(t)$ este o funcție continuă. În plus, pentru $m \le n - 1$, $G(s)$ este o funcție strict proprie, ceea ce înseamnă că prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor câtul este 0. Urmează că $g(t)$ nu conține impulsul Dirac și nici derivatele sale (a se vedea punctul **f**).

Valorile lui $g(t)$ și ale derivatelor sale pentru $t = +0$ se obțin cu ajutorul teoremei valorii inițiale (Anexa A1).

Pentru $m = n - 1$ (urmând ca valoarea efectivă a lui m să fie dată de indicele primului coeficient nenul din șirul $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$) rezultă:

$$g(0)=g(+0)=\lim_{t\downarrow 0} g(t)=\lim_{s\to\infty} sG(s)=\lim_{s\to\infty} s\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_0}=\frac{b_{n-1}}{a_n},$$

$$g'(+0)=\lim_{t\downarrow 0} g'(t)=\lim_{s\to\infty} s\left[sG(s)-g(+0)\right]=$$

$$=\lim_{s\to+\infty} s\frac{a_n b_{n-1}s^n+a_n b_{n-2}s^{n-1}+\ldots-a_n b_{n-1}s^n-a_{n-1}b_{n-1}s^{n-1}-\ldots}{a_n(a_n s^n+\ldots+a_0)}=$$

$$=\frac{a_n b_{n-2}-a_{n-1}b_{n-1}}{a_n^2}=\begin{vmatrix}\frac{b_{n-1}}{a_n} & -1\\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{vmatrix},$$

$$g''(+0)=\lim_{t\downarrow 0} g''(t)=\lim_{s\to\infty} s\left[s^2G(s)-g(+0)s-g'(+0)\right]=\begin{vmatrix}\frac{b_{n-1}}{a_n} & -1 & 0\\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1\\ \frac{b_{n-3}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{vmatrix}.$$

- - - -

Exemplul 3.1

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=(s+3)/(s^2+3s+2)$ şi se cere să se determine răspunsul la impulsul Dirac utilizând ecuaţia (3.9) şi condiţiile iniţiale obţinute cu ajutorul teoremei valorii iniţiale.

Ecuaţia diferenţială corespunzătoare funcţiei de transfer date este: $g''(t)+3g'(t)+2g(t)=0$, $t>0$. Ecuaţia caracteristică are forma: $s^2+3s+2=0$ ale cărei rădăcini sunt $p_1=-2$ şi $p_2=-1$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale are expresia: $g(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}$, $t\geq 0$. Pentru determinarea constantelor C_1 şi C_2 se utilizează: $g'(+0)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=0$ din care rezultă şi $g(0)=g(+0)=1$. Înlocuind $t=+0$ în $g(t)$ şi $g'(t)$ se obţine:

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\ -2C_1-C_2=0,\end{cases}$$

din care rezultă $C_1=-1$, $C_2=2$.

Aşadar răspunsul la impulsul Dirac are expresia: $g(t)=(-e^{-2t}+2e^{-t})\sigma(t)$. ■

e. În cazul $m\leq n-1$ răspunsul la impulsul Dirac se poate calcula şi cu ajutorul teoremei dezvoltării (Anexa A1).

Fie p_i, $i=\overline{1,r}$, polii distincţi, fiecare de multiplicitate $q_i\geq 1$, ai funcţiei de transfer $G(s)$, cu

$$\sum_1^r q_i=n.$$

Funcţia $g(t)$ are expresia:

$$g(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{K_{ij}}{(q_i-j)!}t^{q_i-j}e^{p_it}\sigma(t), \tag{3.10}$$

în care:

$$K_{ij}=\frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-p_i)^{q_i}G(s)\right]\right\}\Bigg|_{s=p_i};\quad i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,q_i}. \tag{3.11}$$

Exemplul 3.2

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=(s+1)/(s+2)^2$ şi se cere să se determine răspunsul la impulsul Dirac cu ajutorul formulelor (3.10) şi (3.11).

Polii sistemului sunt $p_1=-2$, $q_1=2$. Conform formulei (3.11) se scrie:

$$K_{11}=\left\{(s+2)^2\frac{s+1}{(s+2)^2}\right\}\Bigg|_{s=-2}=-1\quad,\quad K_{12}=\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\frac{s+1}{(s+2)^2}\right]\right\}\Bigg|_{s=-2}=1.$$

Cu aceşti coeficienţi şi utilizând formula (3.10) se obţine: $g(t)=(1-t)e^{-2t}\sigma(t)$. ■

f. În cazul $m\geq n$, răspunsul la impulsul Dirac este o funcţie generalizată (distribuţie; Anexa B) datorită faptului că ea conţine impulsul Dirac şi derivatele sale până la ordinul $m-n$ inclusiv.

Într-adevăr, efectuând împărţirea dintre polinoamele de la numărătorul şi numitorul funcţiei de transfer $G(s)$ (relaţia (1.11)) rezultă:

$$G(s)=\frac{b_ms^m+\ldots+b_0}{a_ns^n+\ldots+a_0}=c_{m-n}s^{m-n}+\ldots+c_0+\frac{b_{n-1}^1s^{n-1}+\ldots+b_0^1}{a_ns^n+\ldots+a_0}, \tag{3.12}$$

în care $c_{m-n}s^{m-n}+\ldots+c_0$ este câtul şi $b^1_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b^1_0$ este restul.

Trecând la domeniul timpului, din (3.12) se obţine:

$$g(t)=c_{m-n}D^{m-n}\delta(t)+\ldots+c_0\delta(t)+g^1(t), \tag{3.13}$$

în care:

$$g^1(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G^1(s)\},\ G^1(s)=\frac{b^1_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b^1_0}{a_ns^n+\ldots+a_0}. \tag{3.14}$$

Se remarcă faptul că $G^1(s)$ satisface condiţiile de la **d** şi **e** şi ca urmare $g^1(t)$ poate fi determinat cu ajutorul ecuaţiei (3.9) cu condiţiile iniţiale de la **d** sau cu ajutorul formulelor (3.10), (3.11).

Exemplul 3.3

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=(s^3+4s^2+6s+5)/(s^2+3s+2)$ şi se cere să se determine răspunsul la impulsul Dirac.

Mai întâi se scrie $G(s)$ după cum urmează: $G(s)=s+1+(s+3)/(s^2+3s+2)$. Ţinând seama de rezultatul de la exemplul 3.1, din această formă a lui $G(s)$ se obţine:

$$g(t)=D\delta(t)+\delta(t)+(-e^{-2t}+2e^{-t})\sigma(t).\ \blacksquare$$

g. Răspunsul la impulsul Dirac are proprietatea:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)=0 \tag{3.15}$$

dacă şi numai dacă funcţia de transfer $G(s)$ are toţi polii situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s<0\}$ (a se vedea şi fig.II.33).

Într-adevăr, relaţia (3.15) are loc dacă şi numai dacă în (3.10) $\mathrm{Re}\, p_i<0,\ i=\overline{1,r}$.

Limita nulă din (3.15) denotă faptul că sistemul revine asimptotic la starea de repaus. Aceasta poate fi efectiv atinsă pentru $t=+\infty$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Re}\, p_i<0,\ i=\overline{1,r}$. Trecerea de la o stare de repaus (pentru $t<0$) la cealaltă (pentru $t=+\infty$) se face prin intermediul *regimului tranzitoriu* (fig. II.33).

În situaţia în care există cel puţin un $p_j,\ j=\overline{1,r}$, pentru care $\mathrm{Re}\, p_j\geq 0$, atunci (3.15) nu are loc. Concret, sunt posibile următoarele cazuri:

- $p_j=0,\ q_j=1$, pentru cel puţin un $j=\overline{1,r}$, , şi $\mathrm{Re}\, p_i<0,\ i=\overline{1,r},\ i\neq j$; în acest caz: $\lim_{t\to+\infty} g(t)=\text{constant}\neq 0$;
- $\mathrm{Re}\, p_j=\mathrm{Re}\, p_k=0,\ \mathrm{Im}\, p_j=-\mathrm{Im}\, p_k\neq 0,\ q_j=q_k=1,\ j,k\in I\subseteq\{1,\ldots,r\},\ I\neq\Phi$ şi $\mathrm{Re}\, p_i<0,\ i\in\{1,\ldots,r\}\setminus I$; în acest caz $g(t)$ nu are limită pentru $t\to+\infty$;
- $\mathrm{Re}\, p_j=0,\ q_j>1$, sau $\mathrm{Re}\, p_j>0,\ q_j\geq 1$ pentru cel puţin un $j=\overline{1,r}$; în acest caz: $\lim_{t\to+\infty}|g(t)|=+\infty$.

3.3. Produsul de convoluţie

Proprietăţile prezentate în paragraful precedent permit determinarea efectivă a răspunsului la impulsul Dirac. Totodată ele evidenţiază importanţa acestuia şi a funcţiei de transfer ca entităţi matematice utilizate în descrierea transferului intrare - ieşire al sistemelor dinamice liniare. În acest context ecuaţia transferului intrare - ieşire (1.12), pe baza teoremei lui Borel (Anexa A, 1.1.b.11°), se exprimă în domeniul timpului prin *produsul de convoluţie*:

$$y(t)=(g*u)(t)\sigma(t)=\int_0^t g(t-\theta)u(\theta)d\theta\sigma(t)=\int_0^t g(\theta)u(t-\theta)d\theta\sigma(t). \tag{3.16}$$

În afară de utilizarea ecuației (3.16) pentru calculul efectiv al lui $y(t)$ atunci când se cunosc $g(t)$ și $u(t)$, acesta are în sine o importanță teoretică similară cu cea a ecuației (1.12). Motivul este că ecuația (3.16) exprimă o relație funcțională în domeniul timpului: de la cauza $u(t)$ la efectul $y(t)$, suportul acestui transfer fiind sistemul caracterizat prin răspunsul la impulsul Dirac $g(t)$.

O analiză detaliată a ecuației (3.16) conduce la evidențierea caracterului dinamic al transferului de la $u(t)$ la $y(t)$. Într-adevăr, "citind" produsul de convoluție (3.16) rezultă că y în momentul t nu depinde numai de produsul $g(t-\theta)u(\theta)$ în același moment t, ci și de valorile acestui produs în toate momentele $\theta \in [0, t]$ (intervalul $[0, t]$ este parcurs de variabila de integrare θ), însumate conform operației de integrare. Se poate deci afirma că $y(t)$ cumulează toate efectele cauzate de $u(t)$, $\theta \in [0, t]$ (adică produse pe parcursul "istoriei" procesului în intervalul $[0, t]$). Aceste efecte sunt actualizate (în momentul t) în mod selectiv, respectiv sunt ponderate de celălalt factor al produsului de convoluție: $g(t-\theta)$, $\theta \in [0, t]$. O ilustrare adecvată a acestor detalii se dă în fig. II.34. Se mai spune că sistemul dinamic are o "memorie" a acțiunilor intrării $u(\theta)$, $\theta \in [0, t]$ asupra sa pe parcursul "istoriei" transferului temporal intrare - ieşire. Această "*memorie*" actualizează la ieşire (în momentul t) în mod selectiv (ponderat), prin $g(t-\theta)$, efectele acestor acțiuni, motiv pentru care răspunsul la impulsul Dirac se mai numeşte şi *funcția* (generalizată) *pondere*.

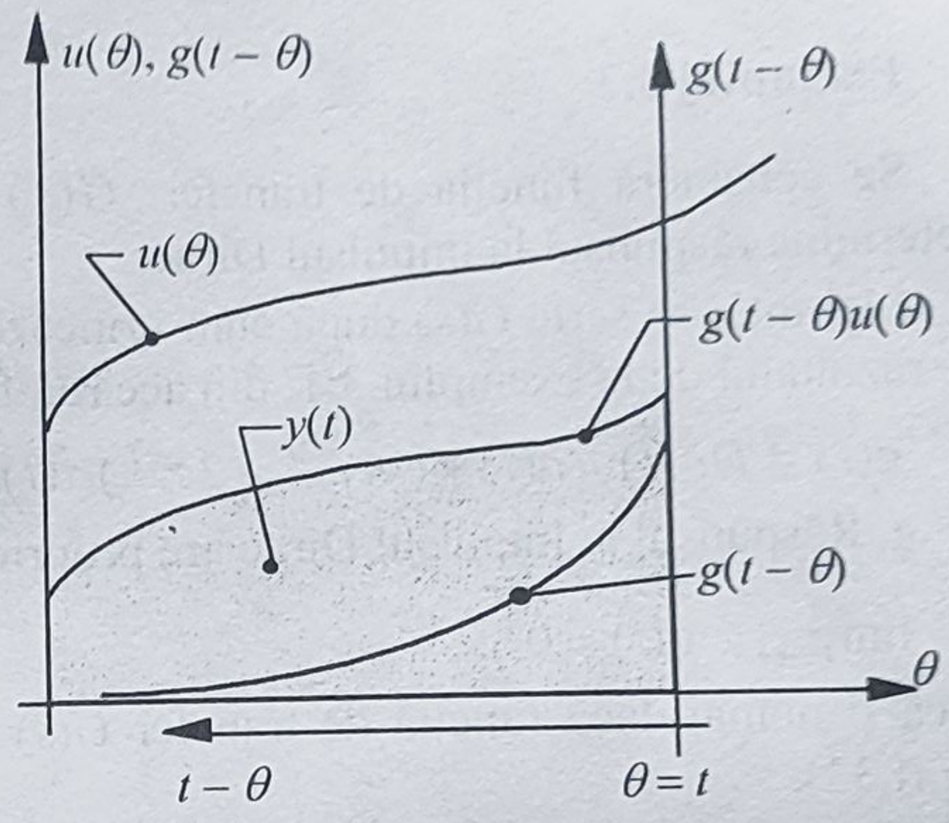


Fig.II.34 Ilustrarea caracterului dinamic al transferului intrare-ieşire descris de ecuația (3.16)

Exemplul 3.4

Se consideră răspunsul la impulsul Dirac de la exemplul 3.3 şi se cere să se calculeze mărimea de ieşire cu ajutorul relației (3.16) pentru: $u(t) = e^{\lambda t}\sigma(t)$, în care $\lambda \in \mathbf{R}$ este un parametru.

Conform ecuației (3.16) se poate scrie:

$$y(t) = (g * u)(t)\sigma(t) = (D\delta * u)(t)\sigma(t) + (\delta * u)(t)\sigma(t) + (-\int_0^t e^{-2(t-\theta)}e^{\lambda\theta}d\theta +$$

$$+ 2\int_0^t e^{-(t-\theta)}e^{\lambda\theta}d\theta)\sigma(t) = Du(t) + u(t) + \left[-\frac{1}{\lambda+2}\left(e^{\lambda t} - e^{-2t}\right) + \frac{2}{\lambda+1}\left(e^{\lambda t} - e^{-t}\right)\right]\sigma(t) =$$

$$= \delta(t) + \left(\frac{1}{\lambda+2}e^{-2t} - \frac{2}{\lambda+1}e^{-t}\right)\sigma(t) + \frac{\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 5}{\lambda^2 + 3\lambda + 2}e^{\lambda t}\sigma(t). \quad \blacksquare$$

4. Răspunsul indicial

Se consideră un sistem dinamic liniar descris de funcția de transfer $G(s)$ (fig.II.7). Se aplică la intrare funcția lui Heaviside (funcția treaptă unitară):

$$u(t) = \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\theta)d\theta = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Întrucât :

$$U(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1/s, \tag{4.2}$$

din ecuația intrare - ieșire (1.12), cu (1.11), rezultă :

$$Y(s) = H(s) = \frac{1}{s}G(s). \tag{4.3}$$

Se notează cu $h(t)$ originalul lui $H(s)$ și se scrie :

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\},\ h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \tag{4.4}$$

Rezultă că în domeniul timpului, răspunsul (4.3) al sistemului la aplicarea funcției lui Heaviside este:

$$y(t) = h(t) = \left(\int_0^t g(\theta)d\theta\right)\sigma(t). \tag{4.5}$$

Din (4.5) rezultă:

$$g(t) = Dh(t). \tag{4.6}$$

Răspunsul (4.5) al sistemului (1.12) (la aplicarea la intrare a funcției lui Heaviside (funcția treaptă unitară) (4.1)) se numește *răspunsul indicial* sau *răspunsul la treaptă unitară.*■

În virtutea relației dintre $h(t)$ și $g(t)$, conform relațiilor (4.5) și (4.6), este de așteptat ca $h(t)$ să aibă proprietăți similare cu cele ale lui $g(t)$.

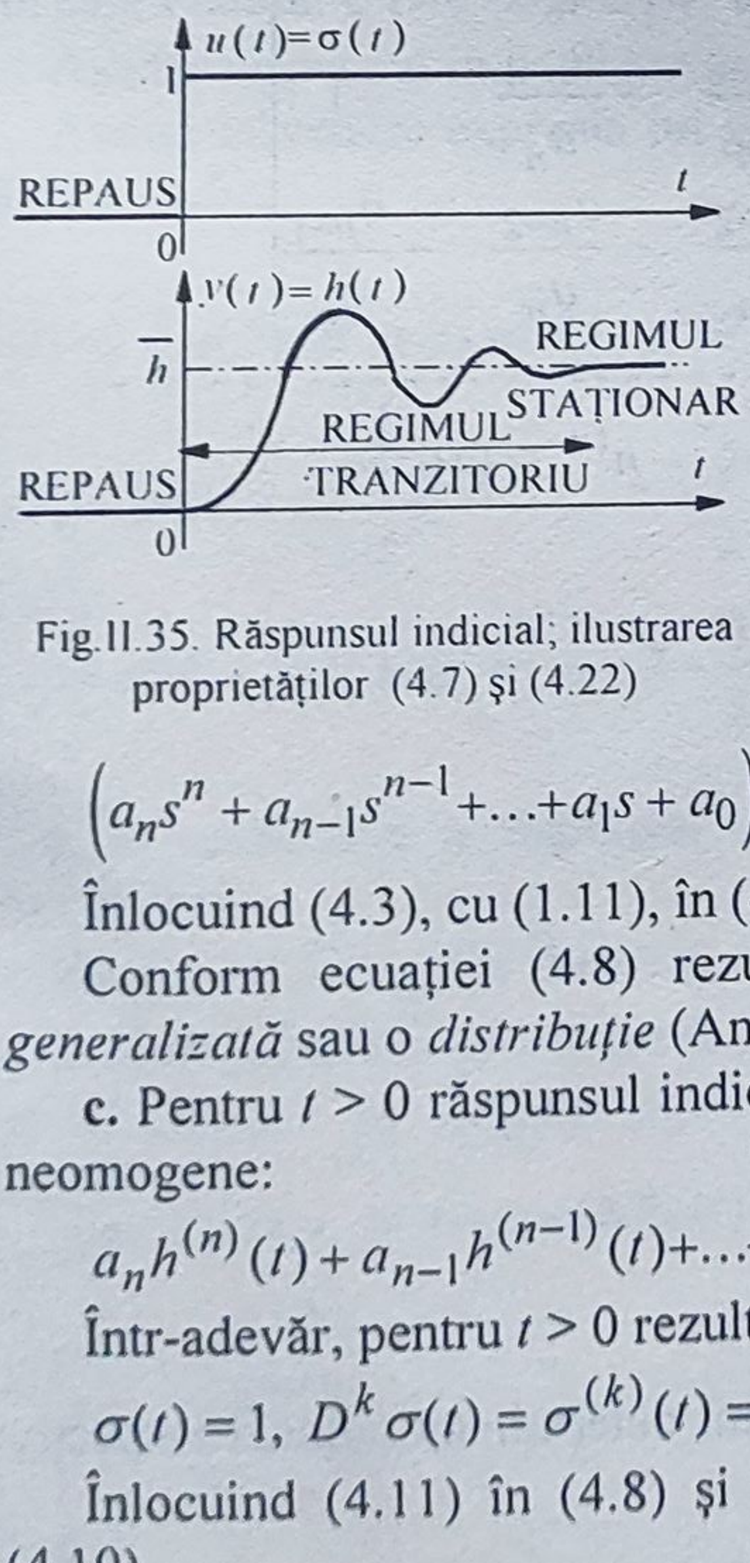


Fig.II.35. Răspunsul indicial; ilustrarea proprietăților (4.7) și (4.22)

a. Conform principiului cauzalității (non-anticipării, observația 1.1) răspunsul indicial are proprietatea :

$$h(t) \equiv 0,\ t < 0, \tag{4.7}$$

pentru care se dă o ilustrare în fig.II.35.

b. Răspunsul indicial este soluția ecuației diferențiale:

$$a_n D^n h(t) + a_{n-1} D^{n-1} h(t) + \ldots + a_1 Dh(t) + a_0 h(t) =$$

$$= b_m D^m \sigma(t) + b_{m-1} D^{m-1} \sigma(t) + \ldots + b_1 D\sigma(t) + b_0 \sigma(t), \tag{4.8}$$

$$t \in \mathbf{R}.$$

Într-adevăr, aplicând transformarea Laplace ecuației (4.8) se obține:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) H(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right)/s, \tag{4.9}$$

Înlocuind (4.3), cu (1.11), în (4.9) rezultă că aceasta este satisfăcută.

Conform ecuației (4.8) rezultă că în general răspunsul indicial $h(t)$ este o *funcție generalizată* sau o *distribuție* (Anexa B).

c. Pentru $t > 0$ răspunsul indicial $h(t)$ este o funcție continuă, soluție a ecuației diferențiale neomogene:

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = b_0,\ t > 0. \tag{4.10}$$

Într-adevăr, pentru $t > 0$ rezultă:

$$\sigma(t) = 1,\ D^k \sigma(t) = \sigma^{(k)}(t) = 0,\ k = \overline{1,m}. \tag{4.11}$$

Înlocuind (4.11) în (4.8) și înlocuind derivata generalizată cu cea obișnuită, se obține (4.10).

d. În cazul $m \le n$ răspunsul indicial $h(t)$ are cel mult o discontinuitate de speța I la stânga punctului $t = 0$ și este o funcție continuă în rest (inclusiv la dreapta punctului $t = 0$).

Într-adevăr, pentru $t \neq 0$, de la **a** și **c** rezultă că $h(t)$ este continuă. În plus, pentru $m \le n$, $H(s)$ este o funcție rațională strict proprie, ceea ce înseamnă că prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor se obține câtul 0. Urmează că $h(t)$ nu conține impulsul Dirac și nici derivatele sale (a se vedea și punctul **f**).

Valorile lui $h(t)$ și ale derivatelor sale pentru $t = +0$ se obțin cu ajutorul teoremei valorii inițiale (Anexa A1).

Pentru $m = n$ (urmând ca valoarea efectivă a lui m să fie dată de indicele primului coeficient nenul din șirul: $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$) rezultă:

$$h(0) = h(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h(t) = \lim_{s \to \infty} sH(s) = \lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{b_n s^n + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = \frac{b_n}{a_n};$$

$$h'(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h'(t) = \lim_{s \to \infty} s[sH(s) - h(+0)] =$$

$$= \lim_{s \to \infty} s \frac{a_n b_n s^n + a_n b_{n-1} s^{n-1} + \ldots - a_n b_n s^n - a_{n-1} b_n s^{n-1} - \ldots}{a_n \left(a_n s^n + \ldots + a_0 \right)} = \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{a_n^2} = \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix};$$

$$h''(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h''(t) = \lim_{s \to \infty} s\left[s^2 H(s) - h(+0)s - h'(+0)\right] = \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 & 0 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix};$$

$$h^{(n-1)}(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h^{(n-1)}(t) = \lim_{s \to \infty} s\left[s^{n-1} H(s) - h(+0)s^{n-1} - \ldots - h^{(n-2)}(+0)\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 & \cdots & 0 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_2}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \cdots & -1 \\ \frac{b_1}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \vdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}.$$

Se remarcă faptul că minorii principali diagonali ai acestui determinant coincid respectiv cu $h(+0), h'(+0), \ldots, h^{(n-1)}(+0)$.

Pentru $b_n \neq 0$ rezultă $h(-0) \neq h(0) = h(+0)$, ceea ce înseamnă că $h(t)$ are o discontinuitate de speța I la stânga punctului $t=0$. În schimb, pentru $b_n = 0$ rezultă $h(-0) = h(0) = h(+0) = 0$, adică $h(t)$ este o funcție continuă pe $\mathbf{R}$.

Este evident că valorile $h(+0), h'(+0), \ldots, h^{(n-1)}(+0)$ reprezintă condițiile inițiale asociate ecuației diferențiale (4.10).

Exemplul 4.1

Se consideră funcția de transfer de la exemplul 3.1 şi se cere să se determine răspunsul indicial utilizând ecuația (4.10) şi condițiile inițiale obținute cu ajutorul teoremei valorii inițiale.

Ecuația diferențială corespunzătoare este: $h''(t)+3h'(t)+2h(t)=3, \quad t>0$. Rădăcinile ecuației caracteristice determinate la exemplul 3.1 sunt: $p_1=-2, \; p_2=-1$. Soluția generală a ecuației diferențiale are expresia: $h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}+3/2, \quad t>0$. Pentru determinarea constantelor C_1 şi C_2 se calculează condiția inițială: $h'(+0)=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1$, din care rezultă şi $h(0) = h(+0) = 0$. Înlocuind $t = +0$ în $h(t)$ şi $h'(t)$ se obține :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{3}{2} = 0 \\ -2C_1 - C_2 = 1, \end{cases}$$

din care rezultă: $C_1=1/2$ şi $C_2=-2$.

Aşadar răspunsul indicial are expresia : $h(t)=(e^{-2t}/2-2e^{-t}+3/2)\,\sigma(t)$.

Având în vedere expresia lui $g(t)$ obținută la exemplul 3.1, se pot aplica acum şi relațiile (4.5) şi (4.6):

$$h(t)=\left(\int_0^t g(\theta)d\theta\right)\sigma(t)=\left(\int_0^t\left(-e^{-2\theta}+2e^{-\theta}\right)d\theta\right)\sigma(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{3}{2}\right)\sigma(t);$$

$$g(t)=Dh(t)=D\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{3}{2}\right)\sigma(t)=\left(-e^{-2t}+2e^{-t}\right)\sigma(t)+\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{3}{2}\right)\delta(t)=$$

$$=\left(-e^{-2t}+2e^{-t}\right)\sigma(t)+\left(\frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}\right)\delta(t)=\left(-e^{-2t}+2e^{-t}\right)\sigma(t).\blacksquare$$

e. În cazul $m \leq n$ răspunsul indicial se poate calcula şi cu ajutorul teoremei dezvoltării (Anexa A1).

Fie p_i, $i=\overline{1,r}$, polii distincți, fiecare de multiplicitate $q_i \geq 1$, ai funcției de transfer $G(s)$. Întrucât $H(s)$ (relația (4.3)) are deja un pol în origine, pentru generalitate se consideră că $G(s)$ are şi un pol în origine $p_0 = 0$, de multiplicitate $\alpha \geq 0$. Evident, $p_i \neq 0$, $i=\overline{1,r}$, şi $\sum_{i=1}^{r} q_i + \alpha = n$. În acest caz funcția $h(t)$ are expresia:

$$h(t)=\left(\sum_{j=1}^{\alpha+1}\frac{M_{0j}}{(\alpha-j+1)!}t^{\alpha-j+1}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{M_{ij}}{(q_i-j)!}t^{q_i-j}e^{p_it}\right)\sigma(t), \tag{4.12}$$

în care:

$$M_{0j} = \frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[s^{\alpha}G(s)\right]\right\}\Big|_{s=0}, \quad j=\overline{1,\alpha+1}, \tag{4.13}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-p_i)^{q_i}\frac{1}{s}G(s)\right]\right\}\Big|_{s=p_i}, \quad i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,q_i}. \tag{4.14}$$

În situaţia în care $G(s)$ nu are nici un pol în origine, respectiv pentru $\alpha = 0$, din (4.3), cu (1.11), se obţine :

$$M_{01} = G(0) = b_0 / a_0, \quad a_0 \neq 0. \tag{4.15}$$

Cu $\alpha = 0$ şi (4.15) expresia (4.12) a răspunsului indicial are forma :

$$h(t) = \left(\frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{M_{ij}}{(q_i-j)!}t^{q_i-j}e^{p_i t}\right)\sigma(t). \tag{4.16}$$

Exemplul 4.2

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=(s+3)/(s^3+3s^2+2s)$ şi se cere să se determine răspunsul indicial cu ajutorul formulelor (4.12) - (4.14).

Polii sistemului sunt $p_0=0$, cu multiplicitatea $\alpha = 1$, şi $p_1=-2$, $p_2=-1$, cu $q_1=q_2=1$. Conform formulelor (4.13), (4.14) se scrie :

$$M_{01} = \{sG(s)\}\big|_{s=0} = \frac{3}{2}, \quad M_{02} = \left\{\frac{d}{ds}[sG(s)]\right\}\Big|_{s=0} = -\frac{7}{4},$$

$$M_{11} = \left\{(s+2)\frac{1}{s}G(s)\right\}\Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}, \quad M_{21} = \left\{(s+2)\frac{1}{s}G(s)\right\}\Big|_{s=-1} = 2.$$

Cu acestea şi cu formula (4.12) rezultă: $h(t)=(-7/4+3t/2-e^{-2t}/4+2e^{-t})\,\sigma(t)$. ■

f. În cazul $m \geq n+1$ răspunsul indicial este o funcţie generalizată (distribuţie) datorită faptului că ea conţine impulsul Dirac şi derivatele sale până la ordinul $m-n-1$ inclusiv.

Într-adevăr. efectuând împărţirea dintre polinoamele de la numărătorul şi numitorul funcţiei $H(s)$ (relaţiile (4.3) şi (1.11)) rezultă :

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s}\frac{b_m s^m+\ldots+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_0} = d_{m-n-1}s^{m-n-1}+\ldots+d_0+\frac{b_n^1 s^n+\ldots+b_0^1}{a_n s^n+\ldots+a_0}, \tag{4.17}$$

în care $d_{m-n-1}s^{m-n-1}+\ldots+d_0$ este câtul şi $b_n^1 s^n+\ldots+b_0^0$ este restul.

Trecând la domeniul timpului din (4.17) se obţine :

$$h(t) \quad d_{m-n-1}D^{m-n-1}\delta(t)+\ldots+d_0\delta(t)+h^1(t), \tag{4.18}$$

în care:

$$h^1(t) \quad \mathcal{L}^{-1}\{H^1(s)\}, \quad H^1(s) = \frac{b_n^1 s^n+\ldots+b_0^1}{s(a_n s^n+\ldots+a_0)}. \tag{4.19}$$

Se remarcă faptul că $H^1(s)$ satisface condiţiile de la **d** şi **e** şi în consecinţă $h^1(t)$ poate fi determinat cu ajutorul ecuaţiei (4.10) cu condiţiile iniţiale de la **d** sau cu ajutorul formulelor (4.12) - (4.14).

Utilizând (4.5) şi (3.13) se obţine:

$$h(t)=\left(\int_0 g(\theta)d\theta\right)\sigma(t)=c_{m-n}D^{m-n-1}\delta(t)+\ldots+c_1\delta(t)+c_0\sigma(t)+\int_0 g^1(\theta)d\theta\sigma(t). \qquad (4.20)$$

Comparând acest rezultat cu (4.18) rezultă:

$$d_k=c_{k+1}, k=\overline{0,m-n-1}, \quad h^1(t)=\left(c_0+\int_0 g^1(\theta)d\theta\right)\sigma(t). \qquad (4.21)$$

Exemplul 4.3

Se consideră funcţia de transfer de la exemplul 3.3 şi se cere să se determine răspunsul indicial. În conformitate cu (4.17) se scrie:

$$H(s)=\frac{1}{s}\frac{s^3+4s^2+6s+5}{s^2+3s+2}=1+\frac{s^2+4s+5}{s(s^2+3s+2)}=1+\frac{5}{2s}+\frac{1}{2(s+2)}-\frac{2}{s+1}.$$

Trecând la domeniul timpului se obţine: $h(t)=\delta(t)+5\,\sigma(t)/2+(e^{-2t}/2-2e^{-t})\,\sigma(t)$. Pentru verificare se aplică (4.6):

$$g(t)=Dh(t)=D\delta(t)+5\delta(t)/2+(1/2-2)\delta(t)+(-e^{-2t}+2e^{-t})\sigma(t)=$$

$$=D\delta(t)+\delta(t)+(-e^{-2t}+2e^{-t})\sigma(t).$$

Acest rezultat coincide cu cel obţinut la exemplul 3.3.■

g. Răspunsul indicial are proprietatea:

$$\bar{h}=\lim_{t\to+\infty}h(t)=b_0/a_0 \qquad (4.22)$$

dacă şi numai dacă funcţia de transfer $G(s)$ are toţi polii situaţi în $\{\mathrm{Re}\,s<0\}$ (a se vedea şi fig.II.35).

Într-adevăr, având în vedere (4.16), relaţia (4.22) are loc dacă şi numai dacă $\alpha=0$ şi $\mathrm{Re}\,p_i<0,\ i=\overline{1,r}$.

Valoarea $\bar{h}$ care se obţine conform relaţiei (4.22) se numeşte *valoarea de regim staţionar* a răspunsului indicial. Regimul staţionar poate fi efectiv atins pentru $t=+\infty$ dacă şi numai dacă $\alpha=0$ şi $\mathrm{Re}\,p_i<0,\ i=\overline{1,r}$. Trecerea de la starea de repaus (pentru $t<0$) la regimul staţionar se face prin intermediul *regimului tranzitoriu* (fig.II.35).

În situaţia în care $\alpha\geq 1$ sau există un $j, j=\overline{1,r}$, pentru care $\mathrm{Re}\,p_j\geq 0$, atunci (4.22) nu are loc. Concret sunt posibile următoarele cazuri:

- $\alpha=0$ şi $\mathrm{Re}\,p_j=\mathrm{Re}\,p_k=0,\ \mathrm{Im}\,p_j=-\mathrm{Im}\,p_k\neq 0,\ q_j=q_k=1,\ j,k\in I\subseteq\{1,\ldots,r\},\ I\neq\Phi$ şi $\mathrm{Re}\,p_i<0,\ i\in\{1,\ldots,r\}\setminus I$; în acest caz $h(t)$ nu are limită pentru $t\to+\infty$;
- $\alpha\geq 1$ sau $\mathrm{Re}\,p_j=0,\ q_j>1$, sau $\mathrm{Re}\,p_j>0,\ q_j\geq 1$, pentru cel puţin un $j=\overline{1,r}$; în acest caz:

$$\lim_{t\to+\infty}|h(t)|=+\infty.$$

4.3. Integrala Duhamel

În conformitate cu (4.6) se poate scrie:

$$g(t)=Dh(t)=(h*D\delta)(t)\sigma(t). \qquad (4.23)$$

Înlocuind (4.23) în (3.16) se obţine:

$$y(t)=((h*D\delta)*u)(t)\sigma(t). \qquad (4.24)$$

Ţinând seama că produsul de convoluţie este asociativ şi comutativ, din (4.24) rezultă:

$$y(t)=D[(h*u)(t)\sigma(t)]=D\left(\int_0 h(t-\theta)u(\theta)d\theta\sigma(t)\right)=D\left(\int_0 h(\theta)u(t-\theta)d\theta\sigma(t)\right). \qquad (4.25)$$

Transferul temporal intrare-ieşire (4.25) este exprimat prin derivata (generalizată) a produsului de convoluţie în care rolul de ponderare este jucat de răspunsul indicial. Pentru $t > 0$ funcţia $h(t)$ fiind continuă şi derivabilă se poate scrie:

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\theta)u(\theta)d\theta = h(+0)u(t) + \int_0^t \frac{dh(t-\theta)}{dt}u(\theta)d\theta,\ t > 0, \tag{4.26}$$

care este cunoscută sub numele de *integrala Duhamel*. În aceste circumstanţe (4.25) este o generalizare a ecuaţiei (4.26).

Exemplul 4.4

Se consideră răspunsul indicial de la exemplul 4.3 şi se cere să se calculeze mărimea de ieşire cu ajutorul ecuaţiei (4.25) pentru: $u(t)=e^{\lambda t}\sigma(t)$, în care $\lambda \in \mathbf{R}$ este un parametru.

Conform ecuaţiei (4.25) se poate scrie:

$$y(t) = D\left(e^{\lambda t} + \frac{5}{2}\int_0^t e^{\lambda\theta}d\theta + \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t e^{(\lambda+2)\theta}d\theta - 2e^{-t}\int_0^t e^{(\lambda+1)\theta}d\theta\right)\sigma(t) =$$

$$= D\left[e^{\lambda t} + \frac{5}{2\lambda}\left(e^{\lambda t}-1\right) + \frac{1}{2(\lambda+2)}\left(e^{\lambda t}-e^{-2t}\right) - \frac{2}{\lambda+1}\left(e^{\lambda t}-e^{-t}\right)\right]\sigma(t) =$$

$$= \delta(t) + \left(\frac{1}{\lambda+2}e^{-2t} - \frac{2}{\lambda+1}e^{-t}\right) + \frac{\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+5}{\lambda^2+3\lambda+2}e^{\lambda t}\sigma(t). \blacksquare$$

5. Polii şi zerourile funcţiei de transfer

5.1. Răspunsul la semnalul exponenţial

Din cele prezentate în subcapitolele 3 şi 4 rezultă că polii finiţi ai funcţiei de transfer $G(s)$ au un rol determinant în ceea ce priveşte evoluţia mărimii de ieşire pe durata, teoretic infinită, a regimului tranzitoriu (a se vedea expresiile răspunsului la impulsul Dirac - (3.10) şi răspunsul indicial - (4.12), (4.16) şi respectiv 3.2.g şi 4.2.g).

În cazul unei mărimi de intrare $U(s)$ oarecare, mărimea de ieşire $Y(s)$ depinde în plus şi de polii finiţi ai lui $U(s)$.

Pentru a susţine această afirmaţie se va utiliza teorema dezvoltării (Anexa A1) în cazul ecuaţiei (1.12), cu (1.13) şi $m \le n$. Pentru simplificarea expunerii, se consideră că polii p_j, $j = 1, n$, sunt simpli. În mod obişnuit $u(t)$, ca mărime generată de un alt sistem dinamic, liniar şi invariant în timp, este o combinaţie liniară de funcţii de forma $t^{\alpha}e^{\lambda t}$. Din acest motiv, pentru concizia analizei care urmează se consideră:

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}\sigma(t). \tag{5.1}$$

Din (5.1) rezultă:

$$U(s) = u_0 /(s-\lambda), \tag{5.2}$$

în care λ (polul) şi u_0 (amplitudinea) sunt doi parametri ale căror valori (reale sau complexe) se vor alege conform necesităţilor analizei.

Înlocuind (5.2) şi (1.13) în (1.12) şi aplicând teorema dezvoltării (membrul drept în (1.12) este o funcţie strict proprie) rezultă:

$$y(t) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{p_k t}\right)\sigma(t)}_{y_T(t)} + \underbrace{d e^{\lambda t}\sigma(t)}_{y_P(t)}, \tag{5.3}$$

$$c_k = \lim_{s \to p_k} (s - p_k) G(s) U(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (p_k - z_i)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (p_k - p_j)} \frac{u_0}{p_k - \lambda}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.4}$$

$$d = \lim_{s \to \lambda} (s - \lambda) G(s) U(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (\lambda - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^{n} (\lambda - p_j)} u_0. \tag{5.5}$$

Se remarcă faptul că în (5.3) există două categorii de termeni:

- $y_T(t)$, grupați în prima sumă, reprezintă *componenta de regim tranzitoriu*, în care evoluția temporală este determinată de exponențialele $e^{p_k t}$, $k = \overline{1,n}$, corespunzătoare polilor finiți ai lui $G(s)$, și de coeficienții c_k, $k = \overline{1,n}$, dependenți de zerourile și de polii (exclusiv p_k) lui $G(s)$ și de polul lui $U(s)$, conform relației (5.4).
- $y_P(t)$ - ultimul termen din (5.3) - reprezintă *componenta de regim permanent*, în care evoluția temporală este determinată de exponențiala $e^{\lambda t}$ (existentă și în $u(t)$!) și de coeficientul d, dependent de zerourile și de polii lui $G(s)$, conform relației (5.5).

Între componentele $y_T(t)$ și $y_P(t)$ există deosebiri remarcabile. Astfel, componenta de regim tranzitoriu, $y_T(t)$, este o manifestare a modificării echilibrului (energetic) *intern* al sistemului ca urmare a excitării lui *externe* (prin $u(t)$). În același timp, componenta de regim permanent, $y_P(t)$, este expresia dinamică la ieșire a mărimii de intrare, conform structurii și parametrilor sistemului, în sensul că $y_P(t)$ are o formă similară cu $u(t)$ (în general dacă $u(t)$ este o combinație liniară de funcții de forma $t^{\alpha} e^{\lambda t}$, atunci $y_P(t)$ este de asemenea o combinație liniară de același tip).

În cazul mărimii de intrare (5.1), comparând (5.5) cu (1.13), pentru componenta de regim permanent din (5.3) se poate scrie:

$$y_P(t) = G(\lambda) u(t), \tag{5.6}$$

în care:

$$G(\lambda) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (\lambda - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^{n} (\lambda - p_j)}. \tag{5.7}$$

Relația (5.6) confirmă faptul că $y_P(t)$ are o formă similară cu $u(t)$.

Observația 5.1

Teorema dezvoltării (Anexa A1) permite determinarea separată a componentei de regim tranzitoriu și a componentei de regim permanent; $y_T(t)$ rezultă pe baza cunoașterii polilor lui $G(s)$ și $y_P(t)$ rezultă pe baza cunoașterii polilor lui $U(s)$.■

Observația 5.2

Componenta de regim tranzitoriu este de regulă indezirabilă, dar datorită caracterului ei inerent, este în același timp inevitabilă. În opoziție cu această situație, de regulă, componenta de regim permanent constituie rațiunea de a fi a sistemului, menirea acestuia fiind aceea de a

furniza la ieşire o mărime dinamic similară cu mărimea de intrare. Ca şi în cazul răspunsului la impulsul Dirac şi al răspunsului indicial (a se vedea 3.2.g şi respectiv 4.2.g), se poate afirma că $y(t) \to y_P(t)$, respectiv $y_T(t) \to 0$, pentru $t \to +\infty$ dacă şi numai dacă toţi polii lui $G(s)$ sunt situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$. ■

Exemplul 5.1

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=3/[(s+1)(s+2)]$. Se cere să se determine răspunsul sistemului la mărimea de intrare: $u(t)=e^{0,5t}\sigma(t)$, $U(s)=1/(s+0,5)$.

Conform formulelor (5.4) şi (5.5) rezultă:

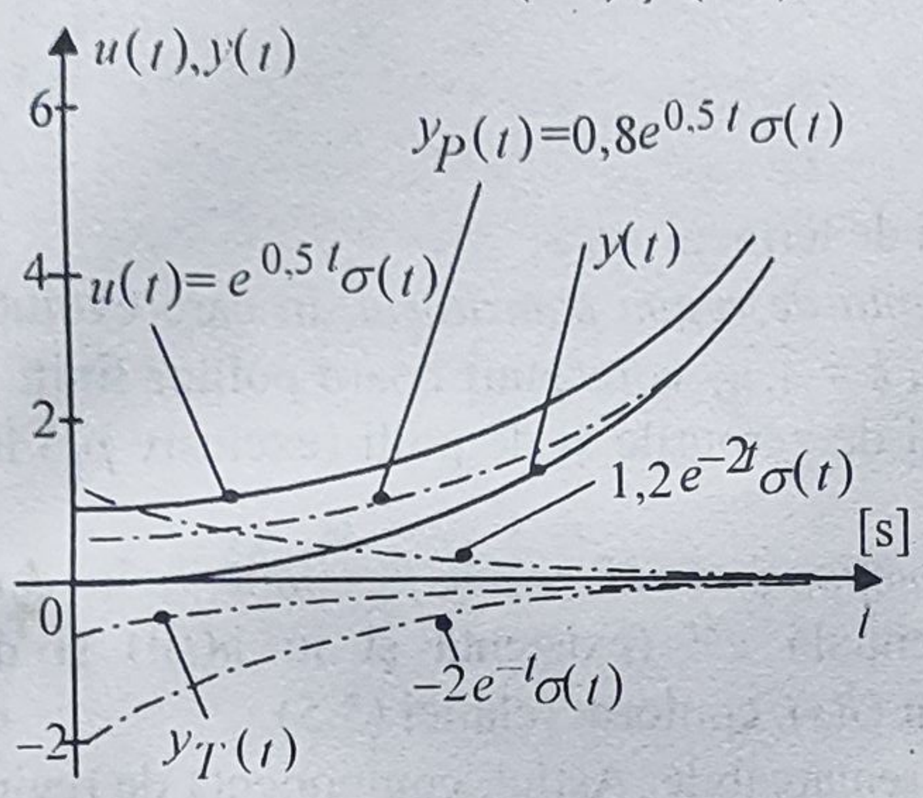


Fig.II.36 Transferul temporal intrare-ieşire la exemplul 5.1

$$c_1 = \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{3}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s-0,5}=1,2,$$

$$c_2 = \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{3}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s-0,5}=-2$$

$$d = \lim_{s\to 0,5}(s-0,5)\frac{3}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s-0,5}=0,8.$$

Răspunsul sistemului are expresia:

$$y(t) = \underbrace{(1,2e^{-2t} - 2e^{-t})\sigma(t)}_{y_T(t)} + \underbrace{0,8e^{0,5t}\sigma(t)}_{y_P(t)}.$$

Graficul corespunzător este reprezentat în fig.II.36. Se remarcă faptul că pentru $t \to +\infty$ urmează $y_T(t)\to 0$ şi $y(t)\to y_P(t)$, deoarece polii sistemului sunt negativi. În consecinţă, pentru $t > 3$ sec. are loc $y(t) \cong y_P(t)$, $y_P(t)$ având o evoluţie similară cu a lui $u(t)$. ■

Din cele expuse până aici, având ca suport expresia (5.3), cu (5.4), (5.5), a răspunsului sistemului, rezultă că polii, pe de o parte, şi zerourile, pe de altă parte, au roluri diferite în determinarea caracteristicilor cantitative şi calitative ale transferului temporal intrare - ieşire. În timp ce polii determină în mod exclusiv evoluţia în timp a exponenţialelor din (5.3), coeficienţii acestora depind atât de polii (exclusiv polii care apar în propriile exponenţiale) cât şi de zerourile lui $G(s)$. Acest fapt se corelează într-un anume sens şi cu rolul operatorial diferit al polinomului zerourilor şi al inversului polinomului polilor, aşa cum s-a arătat la observaţia 1.2.

5.2. Transferul "rezonant"

Este uşor de observat că pentru fiecare $\lambda = p_\rho$, $\rho = \overline{1,n}$, în (5.1), din (5.7) se obţine:

$$|G(p_\rho)| = +\infty, \quad \rho = \overline{1,n}. \tag{5.8}$$

Fenomenul ilustrat de (5.8) este de tipul rezonanţei şi anume pe "frecvenţa proprie" (a sistemului) p_ρ existentă în mărimea de intrare $u(t)$. La această calificare se ajunge prin extensie de la cazul particular $\lambda = p_\rho = j\omega_\rho$ când în sistemul reprezentat de $G(s)$ are loc o rezonanţă în deplinul înţeles al cuvântului. În acest caz $e^{j\omega_\rho t}$, existent în $u(t)$, este o componentă elementară a unei oscilaţii sinusoidale reale de forma: $\cos\omega_\rho t=(e^{j\omega_\rho t}+e^{-j\omega_\rho t})/2$, iar ω_ρ este una din pulsaţiile naturale ale sistemului. Problema răspunsului unui sistem la semnalul sinusoidal va face obiectul cap. VI.

Analizând componenta $y_T(t)$ din (5.3) pentru $\lambda \to p_\rho$, din (5.4) se constată că $|c_\rho| \to +\infty$. Rezultă deci că pentru $\lambda \to p_\rho$ are loc $|y_T(t)| \to +\infty$. Se trage concluzia că în (5.3) se produce de fapt o nedeterminare pentru $\lambda \to p_\rho$. Într-adevăr, izolând termenul de indice ρ din $y_T(t)$ se poate scrie:

$$\lim_{\lambda \to p_\rho} \left(c_\rho e^{p_\rho t} + d e^{\lambda t} \right) \sigma(t) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} \left(p_\rho - z_i \right)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \rho}}^{n} \left(p_\rho - p_j \right)} u_0 \sigma(t) \lim_{\lambda \to p_\rho} \frac{e^{\lambda t} - e^{p_\rho t}}{\lambda - p_\rho} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} \left(p_\rho - z_i \right)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \rho}}^{n} \left(p_\rho - p_j \right)} t u(t).$$

Rezultă că în (5.6), pentru $\lambda = p_\rho$, $G(\lambda)$ are forma:

$$G(p_\rho) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (p_\rho - z_i)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \rho}}^{n} (p_\rho - p_j)} t. \tag{5.9}$$

Este evident că din (5.9), pentru $t \to +\infty$, rezultă $|G(p_\rho)| \to +\infty$, ceea ce, în alt mod, este confirmat de (5.8).

În ceea ce priveşte rezonanța propriu-zisă, adică pentru $\lambda = p_\rho = j\omega_\rho$ în (5.9), se constată că pentru orice u_0, cu $|u_0| < +\infty$, respectiv pentru:

$$|u(t)| < +\infty, t \in \mathbf{R}_+, \tag{5.10}$$

din (5.6) cu (5.9) rezultă:

$$|y_P(t)| \to +\infty \text{ pentru } t \to +\infty, \tag{5.11}$$

fapt care constituie nota distinctă a rezonanței propriu-zise.

În cazul $\mathrm{Re} p_\rho < 0$ din (5.6), cu (5.9) şi (5.10), rezultă:

$$|y_P(t)| < +\infty, \ t \in \mathbf{R}_+, \ , \tag{5.12}$$

deoarece $t e^{p_\rho t} \to 0$ pentru $t \to +\infty$. În schimb, în cazul $\mathrm{Re} p_\rho > 0$, are loc (5.11) datorită faptului că $|u(t)| \to +\infty$ şi $|G(p_\rho)| \to +\infty$ pentru $t \to +\infty$ (în (5.1) şi respectiv (5.9)).

Din cele de mai sus rezultă că *transferul "rezonant"* (5.6), cu (5.9), se corelează cu (5.8), respectiv că numitorul funcției de transfer $G(s)$ se anulează pentru $s = p_\rho$, $\rho = \overline{1, n}$. Din acest motiv "frecvențele proprii" (inoculabile prin mărimea de intrare $u(t)$) se numesc *polii* funcției de transfer $G(s)$, respectiv ai sistemului reprezentat de $G(s)$ (a se vedea 1.4).

5.3. Transferul blocat

Pentru fiecare $\lambda = z_\alpha$, $\alpha = \overline{1, m}$, în (5.1), din (5.7) rezultă:

$$G(z_\alpha) = 0, \alpha = \overline{1, m}. \tag{5.13}$$

În aceste condiții, pentru $\lambda = z_\alpha$ şi $u_0 \neq 0$, adică pentru:

$$u(t) \neq 0, \ t \in \mathbf{R}_+ \ , \tag{5.14}$$

din (5.6), cu (5.13), se obține:

$$y_P(t) = 0, \ t \in \mathbf{R}_+. \tag{5.15}$$

Fenomenul evidențiat de (5.14), (5.15) se numeşte *transferul blocat* intrare-ieşire. În contrast cu transferul "rezonant" se poate vorbi în acest caz de o *antirezonanță* pe "frecvențele" $\lambda = z_\alpha$, $\alpha = \overline{1, m}$, , (inoculabile prin mărimea de intrare $u(t)$), care din acest motiv se numesc *zerourile de transmisie* ale funcției de transfer $G(s)$, respectiv ale sistemului (a se vedea 1.4).

6. Stabilitatea intrare-ieşire

6.1. Definiţia stabilităţii BIBO

Un sistem dinamic este suportul unui transfer intrare-ieşire. S-a arătat la observaţia 5.2 că în (5.3) componenta de regim permanent, $y_P(t)$, este raţiunea de a fi a sistemului (1.12) şi că $y_T(t)$ - componenta de regim tranzitoriu, deşi indezirabilă, este inerentă şi ca atare inevitabilă. Întrucât $y_T(t)$ şi $y_P(t)$ coexistă cronologic, este în mod firesc de dorit ca:

$$|u(t)| \le K < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.1}$$

cu $K > 0$, să implice:

$$|y_P(t)| < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{6.2}$$

simultan cu:

$$\lim_{t \to +\infty} y_T(t) = 0, \tag{6.3}$$

astfel încât începând cu un anumit moment $t_s > 0$, finit şi nu excesiv de mare, să aibă loc:

$$y_T(t) \equiv 0, \quad t \ge t_s > 0, \tag{6.4}$$

respectiv:

$$y(t) \equiv y_P(t), \quad t \ge t_s > 0. \tag{6.5}$$

Momentul t_s - numit şi *durata componentei de regim tranzitoriu* - se defineşte în mod convenţional pe baza inegalităţii:

$$|y_T(t)| \le \varepsilon, \ t \ge t_s > 0, \tag{6.6}$$

în care $\varepsilon > 0$ are semnificaţia de eroare prin care se justifică aproximaţia (6.5).

Din cele expuse până aici este clar că problematica abordată este aceea a calităţii transferului intrare - ieşire. În mod specific (având în vedere premisa (6.1) şi condiţiile (6.2) şi (6.3)) este vorba de *stabilitatea BIBO* (bounded imput - bounded output = intrare mărginită - ieşire mărginită). În conformitate cu observaţia 5.2 se poate afirma că acest tip de stabilitate se realizează dacă şi numai dacă funcţia de transfer $G(s)$ are toţi polii în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$ (fapt echivalent cu (6.2) şi (6.3)). Această afirmaţie urmează să fie demonstrată în mod riguros în 6.2.

Definiţia 1

Un sistem dinamic descris de ecuaţia (1.12), care se află în repaus pentru t < 0, se numeşte *BIBO - stabil* dacă pentru orice mărime de intrare, $u(t)$, mărginită în valoare absolută (relaţia (6.1)), sistemul răspunde cu o mărime de ieşire, $y(t)$, mărginită în valoare absolută, adică:

$$|y(t)| < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{6.7}$$

În caz contrar (adică există un $u(t)$, cu (6.1), pentru care (6.7) nu are loc) sistemul se numeşte *BIBO - instabil*.■

Exemplul 6.1

Se consideră sistemele descrise de funcţiile de transfer: a) $G(s) = 1/(s^2 - s + 1)$, b) $G(s) = 1/(s^2 + 1)$. Se cere să se găsească acele mărimi de intrare mărginite în valoare absolută pentru care mărimile de ieşire corespunzătoare sunt nemărginite în valoare absolută.

a) Polii sistemului sunt: $p_{1,2} = 1/2 \pm j\sqrt{3}/2$. Întrucât $\mathrm{Re}p_{1,2} > 0$, este de aşteptat ca pentru $u(t)=\sigma(t)$ (mărime mărginită în valoare absolută) răspunsul indicial să fie nemărginit. Într-adevăr: $h(t) = [1 - (2e^{t/2}/3)\sin(\sqrt{3}t/2 - \pi/2)]\sigma(t)$ este o funcţie nemărginită deoarece pentru $t \to +\infty$ rezultă $e^{t/2} \to +\infty$.

b) Polii sistemului sunt: $p_{1,2} = \pm j$. Întrucât $\mathrm{Re}p_{1,2} = 0$ este de aşteptat ca pentru o anumită mărime de intrare mărginită în valoare absolută să se obţină o mărime de ieşire nemărginită în valoare absolută. Pentru $u(t)=\sigma(t)$ rezultă: $h(t)=(1-\cos t)\sigma(t)$, care este o funcţie mărginită. În schimb pentru $u(t)=\sin t\,\sigma(t)$, care produce o rezonanţă (pulsaţia intrării, $\omega = 1$, coincide cu pulsaţia naturală a sistemului, $\omega_n = 1$), se obţine: $y(t)=(\sin t - t\cos t)\sigma(t)/2$. Evident, această funcţie este nemărginită în valoare absolută.■

Exemplul 6.2

Se consideră sistemul descris de funcţia de transfer: $G(s) = 1/(s^2+s+1)$. Se cere să se arate că pentru orice mărime de intrare mărginită în valoare absolută, adică: $|u(t)| \le M < +\infty$, $t \in \mathbf{R}_+$, în care $M > 0$ este maximul absolut al funcţiei $|u(t)|$, mărimea de ieşire este mărginită în valoare absolută.

În acest caz: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = (2e^{-t/2}/\sqrt{3})\sin(\sqrt{3}t/2)\sigma(t)$ Utilizând expresia (3.16) a transferului temporal intrare - ieşire (produsul de convoluţie) se pot face următoarele evaluări:

$$|y(t)| \le \int_0^t |g(\theta)||u(t-\theta)|d\theta \le M\int_0^t |g(\theta)|d\theta = \frac{2M}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{-\frac{t}{2}}\left|\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right|dt\,\sigma(t) \le$$

$$\le \frac{2M}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{-\frac{t}{2}}dt\,\sigma(t) \le \frac{2M}{\sqrt{3}}\left(\int_0^t e^{-\frac{t}{2}}dt + \int_t^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt\right) = \frac{2M}{\sqrt{3}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt = \frac{4M}{\sqrt{3}}.$$

Aşadar, pentru orice $u(t)$, cu $|u(t)| \le M$, $t \in \mathbf{R}_+$, s-a obţinut $|y(t)| \le \frac{4M}{\sqrt{3}}$, $t \in \mathbf{R}_+$. ■

6.2. Caracterizări ale stabilităţii BIBO

Rezultatul care urmează să se demonstreze se referă la echivalenţa dintre stabilitatea BIBO (conform definiţiei 1) şi localizarea tuturor polilor funcţiei de transfer $G(s)$ în $\{\mathrm{Re}\,s<0\}$. Pentru a se ajunge la acest rezultat se demonstrează mai întâi următoarea teoremă.

Teorema 1

Sistemul descris de ecuaţia (1.12) este BIBO - stabil dacă şi numai dacă:

$$\int_0^{+\infty} |g(\theta)|d\theta < +\infty. \blacksquare \tag{6.8}$$

$\mathcal{D}$. *Suficienţa.* Prin ipoteză $g(t)$ este absolut integrabilă (conform relaţiei (6.8)). Utilizând ecuaţia (3.16) (echivalentă cu (1.12)), pentru orice $u(t)$, satisfăcând (6.1), se pot face următoarele evaluări:

$$|y(t)| \le \int_0^t |g(\theta)||u(t-\theta)|d\theta \le K\int_0^t |g(\theta)|d\theta \le K\left(\int_0^t |g(\theta)|d\theta + \int_t^{+\infty} |g(\theta)|d\theta\right) = K\int_0^{+\infty} |g(\theta)|d\theta < +\infty.$$

Aceasta înseamnă că sistemul este BIBO - stabil.

Necesitatea. Prin ipoteză sistemul este BIBO - stabil.

Se presupune prin absurd că (6.8) nu este adevărată. Ca urmare, pentru orice $M > 0$ există $t_M > 0$ (dependent de M) astfel încât: $\int_0^M |g(\theta)|d\theta \geq M$. Se alege ca mărime de intrare $u(t) = \operatorname{sgn} g(t_M - t)$, care în mod evident satisface (6.1) pentru $K = 1$.

În aceste condiții pentru $t = t_M$ din (3.16) rezultă: $|y(t_M)| = \left|\int_0^M g(\theta)u(t_M - \theta)d\theta\right| =$ $= \left|\int_0^M g(\theta)\operatorname{sgn} g(\theta)d\theta\right| = \left|\int_0^M |g(\theta)|d\theta\right| = \int_0^M |g(\theta)|d\theta \geq M$, ceea ce este în contradicție cu faptul că sistemul este BIBO stabil. Urmează că (6.8) este adevărată.■

Teorema 2

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO - stabil dacă şi numai dacă toți polii funcției de transfer $G(s)$ sunt situați în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$.■

Demonstrația. Suficiența. Se ştie de la 3.2.e şi f că:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{K_{ij}}{(q_i - j)!}t^{q_i - j}e^{p_i t}, \quad t > 0.$$

Întrucât $\operatorname{Re} p_i < 0$, $i = \overline{1,r}$, rezultă că $g(t)$ este o funcție absolut integrabilă. Conform teoremei 1 sistemul considerat este BIBO - stabil.

Necesitatea. Sistemul este BIBO - stabil. Se ştie că: $G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt$.

Întrucât pentru $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ şi $t \geq 0$ are loc $|e^{-st}| \leq 1$, urmează că în conformitate cu teorema 1 se poate scrie: $|G(s)| \leq \int_o^{+\infty} |g(t)|dt < +\infty$, $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Aceasta înseamnă că $|G(s)|$ este mărginită în $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$. În consecință toți polii funcției de transfer $G(s)$ sunt situați în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$.■

În virtutea relațiilor (4.5), (4.6) dintre $g(t)$ şi $h(t)$ şi în conformitate cu 4.2.g. se poate enunța (fără a mai fi necesară o demonstrație) şi următorul rezultat.

Teorema 3

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO - stabil dacă şi numai dacă $\lim_{t \to +\infty} h(t)$ există şi este finită.■

6.3. O condiție necesară de stabilitate BIBO

Conform teoremei 2 problema stabilității BIBO este echivalentă cu aceea a localizării în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$ a polilor funcției de transfer $G(s)$.

În conformitate cu forma (1.11) a funcției de transfer $G(s)$, fie:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{6.9}$$

polinomul de la numitorul lui $G(s)$ şi

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n \tag{6.10}$$

polinomul (monic) polilor lui $G(s)$ ($\Delta(s) \equiv p(s)$, rel. (1.18)), în care:

$$\alpha_i = \frac{a_{n-i}}{a_n}, i = \overline{1,n}, \quad a_n \neq 0. \tag{6.11}$$

Definiția 2

Polinomul $P(s)$ (sau corespondentul monic $\Delta(s)$) se numește *hurwitzian* dacă toate zerourile sale sunt situate în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.■

În conformitate cu definiția 2 urmează că teorema 2 este echivalentă cu următorul rezultat.

Teorema 4

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO - stabil dacă și numai dacă polinomul polilor ($P(s)$ sau $\Delta(s)$) este hurwitzian.■

Cu referire directă la polinomul monic $\Delta(s)$ se poate demonstra acum următoarea condiție necesară ca sistemul (1.12) să fie BIBO - stabil.

Teorema 5

O condiție necesară ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca:

$$\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,n}.\blacksquare \tag{6.12}$$

$\mathcal{D}$. $\Delta(s)$ fiind un polinom monic cu coeficienți reali, zerourile sale sunt reale sau complex conjugate. Fie $p_\mu = -\beta_\mu$, $\mu = \overline{1, n_1}$, zerourile reale, și $p_\nu = -\gamma_\nu \pm j\delta_\nu$, $\nu = \overline{1, n_2}$. zerourile complex conjugate ale polinomului $\Delta(s)$, cu $n_1 + 2n_2 = n$. Prin ipoteză $\Delta(s)$ este hurwitzian. ceea ce este echivalent cu: $\beta_\mu > 0$, $\mu = \overline{1, n_1}$; $\gamma_\nu > 0$, $\nu = \overline{1, n_2}$. Ca urmare, exprimând $\Delta(s)$ ($\equiv p(s)$, rel. (1.18)) în forma factorizată: $\Delta(s) = \prod_{\mu=1}^{n_1}(s + \beta_\mu)\prod_{\nu=1}^{n_2}(s^2 + 2\gamma_\nu s + \gamma_\nu^2 + \delta_\nu^2)$ se constată că toți factorii (binoame sau trinoame) au toți coeficienții strict pozitivi. Mai mult, efectuând toate calculele se obține (6.10) care în mod evident satisface (6.12), deoarece după toate înmulțirile și grupările de termeni (după puterile lui s) rezultatul conține toți termenii de la gradul n la 0 și toți coeficienții sunt strict pozitivi.■

Condiția necesară (6.12) este foarte ușor de utilizat în aplicații. Este simplu de verificat că pentru $n = 1$ și $n = 2$ condiția (6.12) este și suficientă. Pentru $n \geq 3$ condiția (6.12) nu este și suficientă, după cum se poate vedea din următorul exemplu.

Exemplul 6.3

Se consideră polinomul: $\Delta(s) = s^3 + s^2 + s + 6$. Se cere să se arate (prin calculul rădăcinilor) că deși condiția (6.12) este satisfăcută, polinomul nu este hurwitzian.

Căutând zerourile numere întregi printre divizorii termenului liber, se constată că pentru $p_1 = -2$ rezultă $\Delta(-2) = 0$. Efectuând împărțirea lui $\Delta(s)$ prin $s + 2$ rezultă câtul: $s^2 - s + 3$. Zerourile acestui polinom, respectiv următoarele două zerouri ale lui $\Delta(s)$, sunt: $p_{2,3} = (1 \pm j\sqrt{11})/2$, ceea ce confirmă faptul că $\Delta(s)$ nu este hurwitzian.■

Faptul că teorema 5 este o condiție necesară conduce în mod firesc, prin negarea teoremei 5, la următorul rezultat foarte util în aplicații.

Teorema 6

Dacă $\Delta(s)$ are cel puțin un coeficient nul sau negativ atunci $\Delta(s)$ nu este hurwitzian.■

Evident, acest rezultat este o condiție suficientă de instabilitate BIBO, la fel de ușor de utilizat în aplicații ca și condiția (6.12).

6.4. Criteriul Hurwitz

Fie matricea pătratică de ordinul n:

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad (6.13)$$

în care diagonala principală este formată din α_1, α_2,..., α_n. Pe linii, la stânga diagonalei principale, se scrie $\alpha_k = 0$ pentru toți k > n. $\mathbf{H}_n$ se numeşte *matricea Hurwitz* asociată polinomului monic $\Delta(s)$.

Teorema 7 (Hurwitz)

O condiție necesară şi suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca:

$$\det \mathbf{H}_k > 0, \quad k = \overline{1,n}. \ \blacksquare \qquad (6.14)$$

Exemplul 6.4

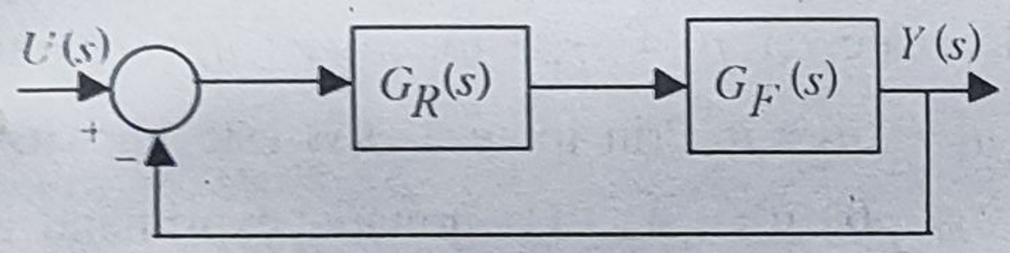


Fig.II.37. Structura sistemului automat de la exemplul 6.4; $G_F(s)$ - funcția de transfer a părții fixate (instalație automatizată), $G_R(s)$ - funcția de transfer a regulatorului (partea cu parametri ajustabili)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.II.37, în care:

$$G_F(s) = \frac{8}{2s^2 + 34s + 1},$$

$$G_R(s) = k + \frac{1}{\tau s}; \ k \geq 0, \ \tau > 0.$$

Se cere să se determine în planul parametrilor ajustabili ai regulatorului, (k, τ), acel domeniu pentru care sistemul automat este BIBO - stabil.

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{4(ks + 1/\tau)}{s^3 + 17s^2 + (1/2 + 4k)s + 4/\tau},$$

în care polinomul polilor este:

$$\Delta(s) = s^3 + 17s^2 + (1/2 + 4k)s + 4/\tau.$$

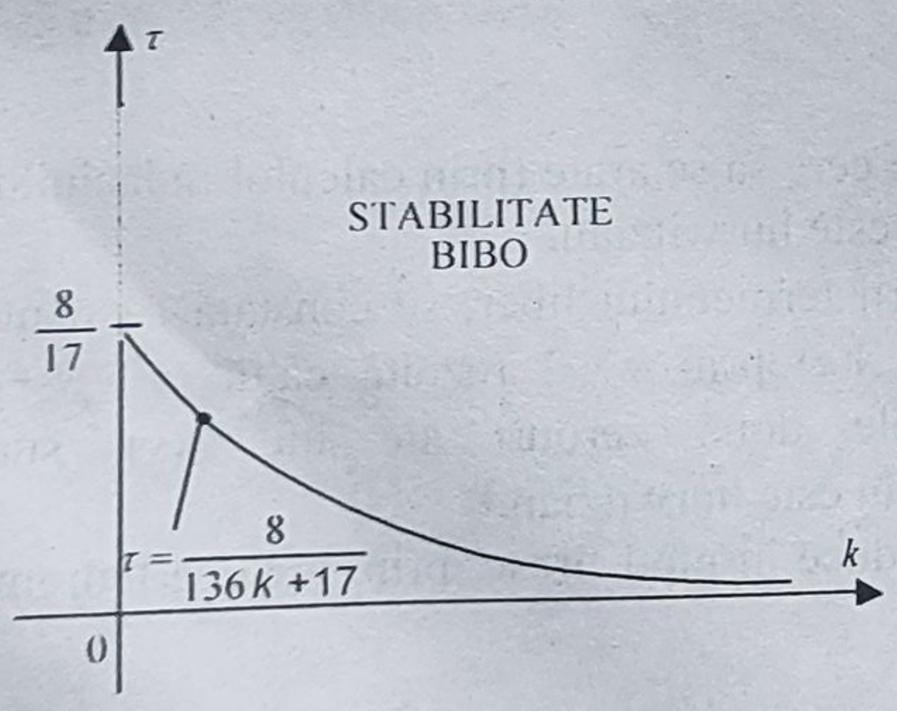


Fig.II.38. Domeniul de stabilitate BIBO la exemplul 6.4

Matricea Hurwitz asociată polinomului $\Delta(s)$ are forma:

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4/\tau & 1/2 + 4k & 17 \\ 0 & 0 & 4/\tau \end{bmatrix}.$$

Conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO - stabil dacă şi numai dacă:

$$\det \mathbf{H}_1 = 17 > 0, \ \det \mathbf{H}_2 = 17(1/2 + 4k) - 4/\tau > 0, \ \det \mathbf{H}_3 = (4/\tau) \det \mathbf{H}_2 > 0.$$

Întrucât prima inegalitate este satisfăcută şi a treia este echivalentă cu a doua, rezultă că sistemul automat este BIBO - stabil dacă şi numai dacă: $\tau > 8/(136k + 17)$. Domeniul de BIBO-stabilitate corespunzător acestei inegalități este reprezentat în fig.II.38. ■

Condițiile (6.14) au dezavantajul că pentru $n \geq 4$ calculul determinanților (minorilor principali diagonali ai matricei $\mathbf{H}_n$) devine laborios. Un rezultat care se obține în mod echivalent din teorema 7 și în care numărul de determinanți necesar de calculat se reduce la jumătate este următorul.

Teorema 8 (Liénard - Chipart)

O condiție necesară și suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca să aibă loc unul din următoarele patru șiruri de inegalități:

$1^\circ\ \alpha_n > 0, \alpha_{n-2} > 0, \alpha_{n-4} > 0, \ldots\ldots, \det \mathbf{H}_1 > 0, \det \mathbf{H}_3 > 0, \ldots\ldots;$

$2^\circ\ \alpha_n > 0, \alpha_{n-2} > 0, \alpha_{n-4} > 0, \ldots\ldots, \det \mathbf{H}_2 > 0, \det \mathbf{H}_4 > 0, \ldots\ldots;$

$3^\circ\ \alpha_n > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_{n-3} > 0, \ldots\ldots, \det \mathbf{H}_1 > 0, \det \mathbf{H}_3 > 0, \ldots\ldots;$

$4^\circ\ \alpha_n > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_{n-3} > 0, \ldots\ldots, \det \mathbf{H}_2 > 0, \det \mathbf{H}_4 > 0, \ldots\ldots$ ■

6.5. Criteriul Routh

Și aplicarea teoremei 8 implică, pentru $n \geq 4$, calculul unor determinanți de ordin ridicat.

Pentru a se ajunge la un rezultat echivalent cu teoremele 7 sau 8, dar mai ușor de utilizat în aplicații, se face observația că pentru $n = 3$ are loc egalitatea:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/\alpha_1 & -\alpha_1/(\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2) \\ 0 & 1 & -\alpha_1^2/(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{21} & 0 \\ r_{13} & r_{22} & r_{31} \end{bmatrix},$$

în care $r_{11} = \det \mathbf{H}_1$, $r_{21} = \det \mathbf{H}_2 / \det \mathbf{H}_1$, $r_{31} = \det \mathbf{H}_3 / \det \mathbf{H}_2$. Se poate afirma că $\det \mathbf{H}_i > 0;\ i = \overline{1,3}$, dacă și numai dacă $r_{i1} > 0,\ i = \overline{1,3}$.

Acest rezultat se generalizează sub forma: $\mathbf{H}_n\mathbf{S} = \mathbf{R}$, în care $\mathbf{S}$ și $\mathbf{R}$ sunt matrice triunghiulare respectiv superior și inferior. Elementele diagonale ale matricei $\mathbf{R}$ au expresiile: $r_{11} = \det \mathbf{H}_1$, $r_{i1} = \det \mathbf{H}_i / \det \mathbf{H}_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$, care pot fi calculate mult mai simplu utilizând *schema Routh* asociată polinomului $\Delta(s)$:

$$\begin{array}{c|cccccccc} s^n & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-1} & r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-2} & r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^{n-i+2} & r_{i-21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{i-2j} & r_{i-2j+1} & \cdots \\ s^{n-i+1} & r_{i-11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{i-1j} & r_{i-1j+1} & \cdots \\ s^{n-i} & r_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{ij} & r_{ij+1} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^0 & r_{n1}, & & & & & & & \end{array} \tag{6.15}$$

în care

$$r_{01}=1, r_{02}=\alpha_2, r_{03}=\alpha_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_{11}=\alpha_1, r_{12}=\alpha_3, r_{13}=\alpha_5, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{ij}=-\frac{1}{r_{i-11}}\begin{vmatrix} r_{i-21} & r_{i-2j+1} \\ r_{i-11} & r_{i-1j+1} \end{vmatrix},\quad i=\overline{2,n},\quad j=1,2,\ldots\ . \tag{6.16}$$

Teorema 9 (Routh)

O condiție necesară şi suficientă ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca toate elementele primei coloane din schema Routh să fie strict pozitive.■

Exemplul 6.5

Se consideră polinomul: $\Delta(s)=s^4+2s^3+9s^2+s+4$. Se cere să se afle dacă $\Delta(s)$ este sau nu hurwitzian. Schema Routh asociată polinomului $\Delta(s)$ are forma:

s^4	1	9	4
s^3	2	1	0
s^2	$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 9\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{17}{2}$	$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4$	
s^1	$-\frac{2}{17}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 17/2 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{17}$	0	
s^0	$-17\begin{vmatrix}17/2 & 4\\ 1/17 & 0\end{vmatrix}=4$		

Conform teoremei 9 polinomul este hurwitzian.■

6.6. Stabilitatea relativă

În conformitate cu teorema 3 rezultă că $h(t)$, în cazul unui sistem BIBO-stabil, poate fi utilizat pentru aprecierea calităților de BIBO-stabilitate, respectiv pentru aprecierea "apropierii" de situația de BIBO-instabilitate. În domeniul timpului această apreciere se poate face pe baza abaterilor pe care le evidențiază $h(t)$ față de:

$$\bar{h}=\lim_{t\to+\infty}h(t)=\lim_{s\to 0}sH(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}G(s)=\lim_{s\to 0}G(s)=\frac{b_0}{a_0};\quad a_0\neq 0.$$

Ținând seama de teorema 2, rezultă că aceste abateri ale lui $h(t)$ sunt cu atât mai mari (şi de durată mai mare) cu cât polii lui $G(s)$, situați în $\{\mathrm{Re}\,s<0\}$, sunt mai apropiați de $\{\mathrm{Re}\,s=0\}$ (axa imaginară a planului complex).

Experiența acumulată în proiectarea şi utilizarea sistemelor dinamice (în special a celor tehnice) arată că asigurarea stabilității BIBO este necesară dar nu şi suficientă pentru o calitate acceptabilă a transferului temporal intrare - ieşire realizat de sistem. Din acest motiv trebuie să se asigure încă din faza de proiectare o anumită *rezervă de BIBO-stabilitate*, respectiv o distanță minimă $\alpha_{min}>0$ a polilor (toți situați în $\{\mathrm{Re}\,s<0\}$) față de axa imaginară a planului complex - fig.II.39. Aceasta reprezintă o măsură de prevedere, care, pe lângă faptul că asigură o calitate mai bună a lui $h(t)$ (abateri mai mici şi mai puțin numeroase față de $\bar{h}$), previne pierderea stabilității BIBO (adică trecerea în situația de instabilitate BIBO) ca urmare a:

• deplasării unor poli ai lui $G(s)$, situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$, spre axa imaginară, cauzată de variaţia parametrilor sistemului sub influenţa factorilor mediului ambiant sau prin îmbătrânirea materialelor;

• imposibilităţii cunoaşterii localizării exacte a polilor lui $G(s)$ deoarece estimarea valorilor parametrilor pe care se bazează analiza stabilităţii (şi ulterior proiectarea) este afectată de erori (sistematice şi aleatoare). Construcţia sistemului (pe baza proiectului) implică utilizarea unor elemente componente ale căror parametri se situează între anumite limite de toleranţă (admise în tehnică, de regulă prin norme specifice şi standarde).

În sprijinul afirmaţiilor de mai sus trebuie subliniat şi faptul că dependenţa dintre zerourile polinomului $\Delta(s)$ şi coeficienţii săi este neliniară aşa cum rezultă din formulele lui Viète:

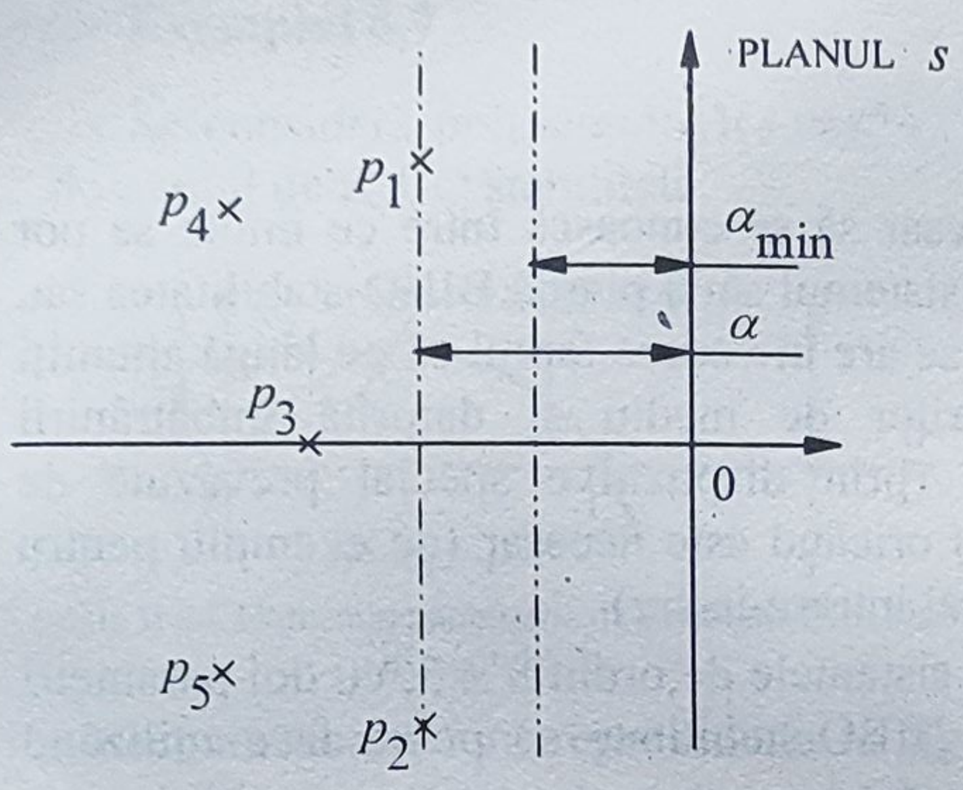


Fig.II.39. Stabilitatea relativă: $\alpha_{\min}$ - rezerva de stabilitate, α- gradul de stabilitate; $p_1 \ldots p_5$ - polii lui $G(s)$

$$\begin{aligned} &p_1 + p_2 + \ldots + p_n = -\alpha_1 \\ &p_1 p_2 + p_2 p_3 + \ldots + p_{n-1} p_n = \alpha_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_n = (-1)^n \alpha_n . \end{aligned} \tag{6.17}$$

În aceste condiţii este de aşteptat ca variaţii relativ mici ale coeficienţilor α_i, $i = \overline{1,n}$, (în context poate fi vorba şi de erorile care afectează aceşti coeficienţi) să producă variaţii relativ mari ale polilor p_i, $i = \overline{1,n}$.

Realizarea efectivă a unei rezerve de stabilitate $\alpha_{\min} > 0$ se poate verifica făcând în $\Delta(s)$ schimbarea de variabilă $s = z - \alpha_{\min}$ după care se aplică polinomului $\Delta(z - \alpha_{\min})$ criteriile Hurwitz sau Routh. Satisfacerea condiţiilor unuia dintre aceste criterii este echivalentă cu localizarea polilor lui $G(s)$ în $\{\mathrm{Re}\, s < -\alpha_{\min}\}$.

Exemplul 6.6

Se consideră polinomul: $\Delta(s) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$, în care coeficienţii au valorile lor nominale. Se cere să se verifice dacă sistemul corespunzător are rezerva de stabilitate BIBO $\alpha_{\min} = 1$ în condiţiile în care valoarea lui $\alpha_2 = 26$ este incertă, acesta putând avea orice valoare în intervalul [21,31].

Se face schimbarea de variabilă $s = z - 1$ şi se înlocuieşte $\alpha_2 = 26$ cu $\alpha_2 = 26 + \varepsilon$, $\varepsilon \in [-5,5]$.

Se obţine: $\Delta(z-1) = (z-1)^3 + 9(z-1)^2 + (26+\varepsilon)(z-1) + 24 = z^3 + 6z^2 + (11+\varepsilon)z + 6 - \varepsilon$.

Matricea Hurwitz asociată are forma:

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6-\varepsilon & 11+\varepsilon & 6 \\ 0 & 0 & 6-\varepsilon \end{bmatrix},$$

din care rezultă: $\det \mathbf{H}_1 = 6 > 0$, $\det \mathbf{H}_2 = 60 + 7\varepsilon > 0$, $\det \mathbf{H}_3 = (6-\varepsilon)\det \mathbf{H}_2 > 0$. A doua şi a treia inegalitate sunt satisfăcute dacă şi numai dacă $\varepsilon \in (-60/7, +6)$. Întrucât $\varepsilon \in [-5,5] \subset (-60/7,+6)$ rezultă că rezerva de BIBO-stabilitate $\alpha_{\min} = 1$ este asigurată oricare ar fi $\alpha_2 \in [21,31]$.■

Gradul de BIBO-stabilitate este prin definiție distanța α dintre axa imaginară a planului complex și polul funcției de transfer $G(s)$, cel mai apropiat de aceasta - fig.II.39. Este de la sine înțeles că încă din faza de proiectare, dar și ulterior, în timpul funcționării sistemului, trebuie să se asigure:

$$\alpha \geq \alpha_{min} \tag{6.18}$$

în condițiile în care gradul de BIBO-stabilitate α nu poate fi determinat cu exactitate (datorită anumitor incertitudini în cunoașterea valorilor parametrilor) sau se poate modifica sub influența factorilor de mediu și datorită îmbătrânirii materialelor.

Rezerva de stabilitate și gradul de stabilitate sunt două aspecte distincte ale BIBO-stabilității unui sistem (dar aflate în relația (6.18)). Ele definesc împreună stabilitatea relativă a respectivului sistem.

6.7. Domenii parametrice de BIBO-stabilitate

Din varii motive (tehnice, economice) este necesar să se cunoască între ce limite se pot modifica parametrii unui sistem fără ca prin aceasta sistemul să-și piardă BIBO-stabilitatea sau să i se reducă rezerva de stabilitate. În acest context se are în vedere faptul că pe lângă anumiți parametri care se modifică sub influența factorilor de mediu și datorită îmbătrânirii materialelor, sistemul are și parametri *ajustabili* (prin dispozitive special prevăzute de proiectant) care pot fi modificați (de către operator) oricând este necesar (de exemplu pentru asigurarea unei anumite calități a transferului temporal intrare-ieșire).

După cum s-a văzut deja la exemplul 6.4, pentru sistemele de ordin $n \leq 3$, cu doi parametri ajustabili, determinarea domeniului parametric de BIBO-stabilitate se poate face utilizând criteriile Hurwitz sau Routh.

În cazul sistemelor de ordin ridicat ($n \geq 4$) se pune problema rezolvării unui sistem de n inecuații neliniare (de exemplu obținute din (6.13)), ceea ce adesea, în condiții concrete este o problemă dificilă.

O posibilitate de simplificare a procedurii de determinare a domeniului parametric de BIBO-stabilitate constă în a determina mai întâi acele valori ale parametrilor pentru care polinomul $\Delta(s)$, inițial hurwitzian, devine nehurwitzian ca urmare a variației parametrilor săi. Întrucât zerourile lui $\Delta(s)$ depind continuu de coeficienții săi (conform formulelor lui Viète - (6.17)), rezultă că $\Delta(s)$ devine nehurwitzian atunci când unele din zerourile sale se deplasează din semiplanul complex stâng spre cel drept și cel puțin unul dintre ele atinge axa imaginară.

Se poate demonstra că $\Delta(s)$ devine nehurwitzian (în sensul precizat în aliniatul precedent) exact atunci când:

$$\begin{cases} \alpha_n = 0 \\ \det \mathbf{H}_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

Într-adevăr, $\alpha_n = 0$ dacă și numai dacă $s = 0$ este un zero al lui $\Delta(s)$. De asemenea, utilizând formula lui Orlando:

$$\det \mathbf{H}_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i + p_j),$$

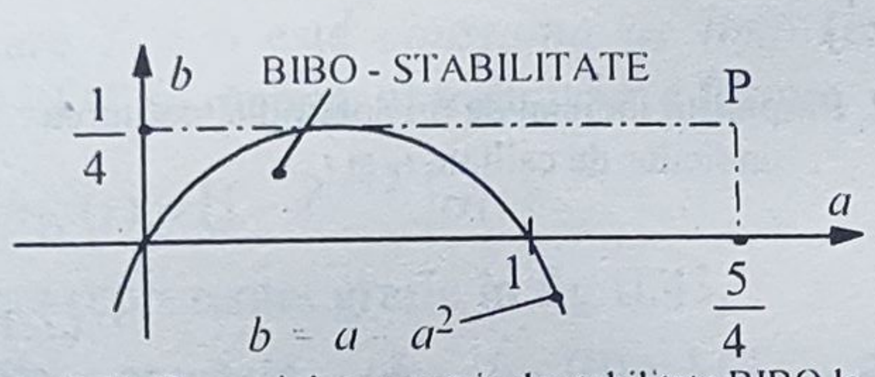
rezultă că $\det \mathbf{H}_{n-1} = 0$, în condițiile precizate, este echivalentă cu existența unei perechi p_μ, p_ν, cu $\mathrm{Re}\, p_\mu = \mathrm{Re}\, p_\nu = 0$.

Este evident că ecuaţiile (6.19) reprezintă frontiera dintre domeniile de BIBO-stabilitate şi de BIBO-instabilitate în spaţiul parametrilor sistemului. Pentru a determina efectiv natura fiecărui domeniu se consideră un punct situat într-unul din ele, căruia îi corespund valori bine precizate ale parametrilor sistemului. Cu acestea se particularizează coeficienţii lui $\Delta(s)$ după care se aplică criteriile Hurwitz sau Routh. În funcţie de rezultatul obţinut se trage o concluzie privind natura întregului domeniu căruia îi aparţine punctul considerat.

Făcând schimbarea de variabilă $s = z - \alpha_{min}$ se pot utiliza ecuaţiile (6.19) şi pentru polinomul $\Delta(z - \alpha_{min})$. În acest caz se poate determina în spaţiul parametrilor sistemului domeniul de rezervă de stabilitate BIBO α_{min}.

Exemplul 6.7

Se consideră polinomul: $\Delta(s)=s^4+s^3+s^2+as+b$. Se cere să se determine în planul (a,b) domeniul de BIBO stabilitate.



ig.II.40. Domeniul parametric de stabilitate BIBO la exemplul 6.7.

Se calculează mai întâi:

$$\det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a - b - a^2.$$

Ecuaţiile (6.19) ale frontierei domeniului de BIBO-stabilitate sunt: $b = 0$, $b = a - a^2$. Graficele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.II.40. Având în vedere că $a > 0$ şi $b > 0$ (conform teoremei 5) rezultă că domeniul căutat este situat în primul cadran al planului (a,b). Considerând punctul P (fig.II.40) de coordonate $a=5/4$, $b=1/4$, se obţine: $\Delta(s)=s^4+s^3+s^2+(5/4)s+1/4$. În schema Routh asociată lui $\Delta(s)$ rezultă $r_{21}=-1/4$, adică punctul P se află în domeniul de BIBO-instabilitate. În consecinţă domeniul de BIBO-stabilitate este cel haşurat în fig.II.40. ■

7. Corelaţia dintre calitatea răspunsului indicial şi configuraţia poli-zerouri

7.1. Indici de calitate ai răspunsului indicial

În funcţie de localizarea polilor, sistemele dinamice liniare invariante în timp se împart în următoarele două categorii:

a_1) sisteme BIBO-stabile ale căror poli sunt toţi situaţi în $\{Re s < 0\}$;

a_2) sisteme BIBO-instabile, care au cel puţin câte un pol situat în $\{Re s \geq 0\}$.

În funcţie de localizarea zerourilor, sistemele dinamice liniare, invariante în timp, BIBO-stabile se împart în următoarele două grupe:

a_{11}) sisteme BIBO-stabile ale căror zerouri sunt toate situate în $\{Re s < 0\}$;

a_{12}) sisteme BIBO-stabile care au cel puţin câte un zero situat în $\{Re s \geq 0\}$.

Sistemele din grupa a_{11} se mai numesc şi *sisteme de defazaj minim* iar cele din grupa a_{12} - *sisteme de defazaj neminim*. Caracterizarea acestor tipuri de sisteme va face obiectul paragrafului VI.3.3.

Marea majoritate a sistemelor dinamice liniare invariante în timp întâlnite în aplicaţiile uzuale fac parte din grupa a_{11}. Răspunsul indicial al acestor sisteme poate fi:

- oscilatoriu amortizat - fig.II.41 (sistemul are cel puțin o pereche de poli complex conjugați, toți polii fiind situați în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$;
- aperiodic - fig.II.42 (toți polii sistemului sunt reali și negativi).

În cazul răspunsului indicial oscilatoriu amortizat pentru aprecierea calităților sale se utilizează următorii indici de calitate (fig.II.41):

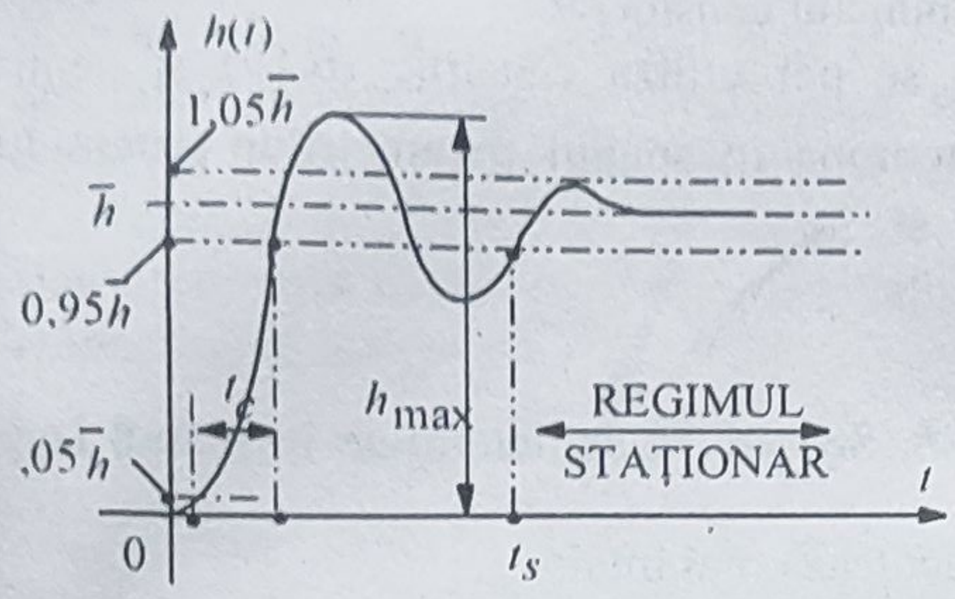


Fig.II.41. Răspunsul indicial de tip oscilatoriu amortizat; definirea indicilor de calitate σ, t_s și t_c

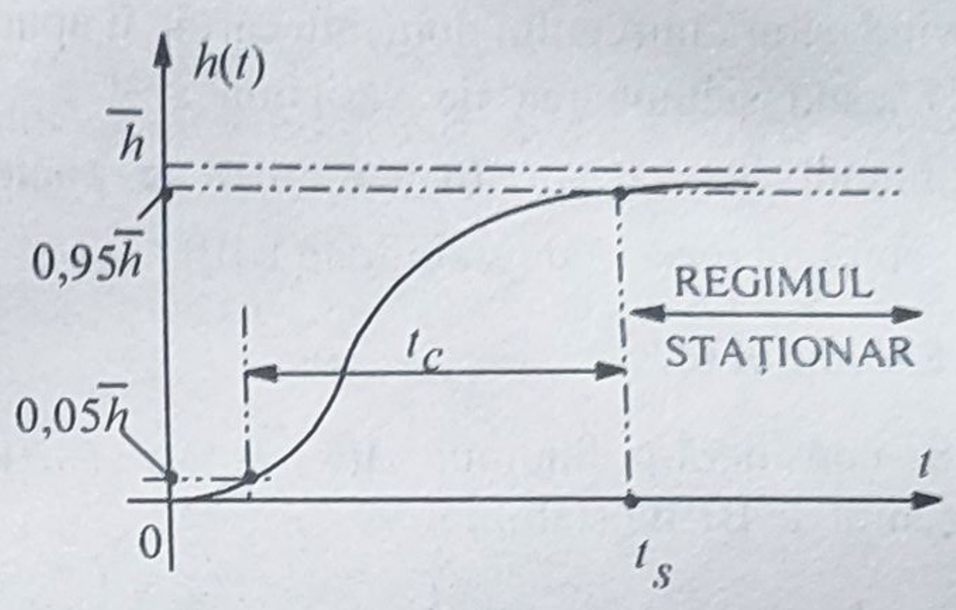


Fig.II.42. Răspunsul indicial de tip aperiodic; definirea indicilor de calitate t_s și t_c

- *Supra'eglarea:*

$$\sigma = (h_{\max} - \bar{h})/\bar{h}\ , \quad \sigma\% = \sigma \cdot 100. \tag{7.1}$$

- *Durata regimului tranzitoriu*, t_s, care este durata până când $h(t)$ intră definitiv într-o bandă centrată pe $\bar{h}$ (aleasă în mod convențional), de exemplu o bandă de $\pm 5\%\bar{h}$ centrată pe $\bar{h}$; cu alte cuvinte are loc:

$$0.95\bar{h} \le h(t) \le 1{,}05\bar{h},\ t \ge t_s. \tag{7.2}$$

În acest fel regimul tranzitoriu are o durată finită (fapt cu consecințe practice remarcabile, deoarece teoretic durata regimului tranzitoriu este infinită), iar pentru $t \ge t_s$ se consideră că sistemul a intrat în regimul staționar.

- *Durata de creștere*, t_c, care este durata în care $h(t)$ crește de la $0{,}05\bar{h}$ la $0{,}95\bar{h}$ (sau de la $0{,}1\bar{h}$ la $0{,}9\bar{h}$); în acest context $1/t_c$ este un indicator al *rapidității* răspunsului indicial.

În cazul răspunsului indicial aperiodic (fig.II.42) se utilizează (din motive evidente) numai indicii de calitate t_s și t_c.

Se consideră că răspunsul indicial este de bună calitate pentru $\sigma\% \le 20\%$ și t_s, t_c să aibă valorile minime posibile (având în vedere că regimul tranzitoriu este inevitabil). După cum se va vedea la 7.5 valorile acestor indici de calitate sunt corelate cu localizarea polilor sistemului în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

7.2. Elemente de transfer tipice

Analiza sistemelor dinamice liniare invariante în timp, oricât de complicate (inclusiv din punctul de vedere al funcției de transfer) se bazează pe faptul că ele pot fi discretizate structural, corespunzător conexiunilor "serie" și "paralel" (respectiv conform operațiilor algebrice de multiplicare și de sumare a funcțiilor (fracțiilor) raționale), într-un număr finit de elemente de transfer simple numite și *elemente de transfer tipice*. Acestea sunt:

- elementul *proporțional* (P)
- elementul de *întârziere de ordinul* 1 (T_1)
- elementul de *întârziere de ordinul* 2 (T_2)

- elementul *integrator* (I)
- elementul *derivator* (D)

În continuare se prezintă o analiză a proprietăţilor dinamice ale acestor cinci elemente de transfer tipice pe baza răspunsului indicial.

a) Elementul proporţional (P) are funcţia de transfer:

$$G_P(s) = K, \tag{7.3}$$

în care K este *factorul de amplificare* (a cărui dimensiune se exprimă ca raport al unităţilor de măsură ale lui y şi u). Răspunsul indicial al acestui element este funcţia treaptă de amplitudine K.

În mod obişnuit, în cazul sistemelor dinamice reale, se ajunge la funcţii de transfer de forma (7.3) în urma unor idealizări şi/sau simplificări operate pe parcursul elaborării modelului matematic (a se vedea exemplul 1.4).

b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T_1) are funcţia de transfer:

$$G_{T_1}(s) = 1/(Ts+1), \tag{7.4}$$

în care $T > 0$ este *constanta de timp* (exprimată în secunde). Sistemul are un singur pol, $p_1 = -1/T$, şi răspunsul indicial are forma:

$$h_{T_1}(t) = \left(1 - e^{-t/T}\right)\sigma(t) \tag{7.5}$$

şi este reprezentat grafic în fig.II.43.

Se constată că $\dot{h}_{T_1}(0) = 1/T$, ceea ce înseamnă că, în triunghiul OAB, $\operatorname{tg}\alpha = \dot{h}_{T_1}(0) = 1/T$. Ca urmare lungimea subtangentei OA la graficul lui $h_{T_1}(t)$ este $|OA|=T$.

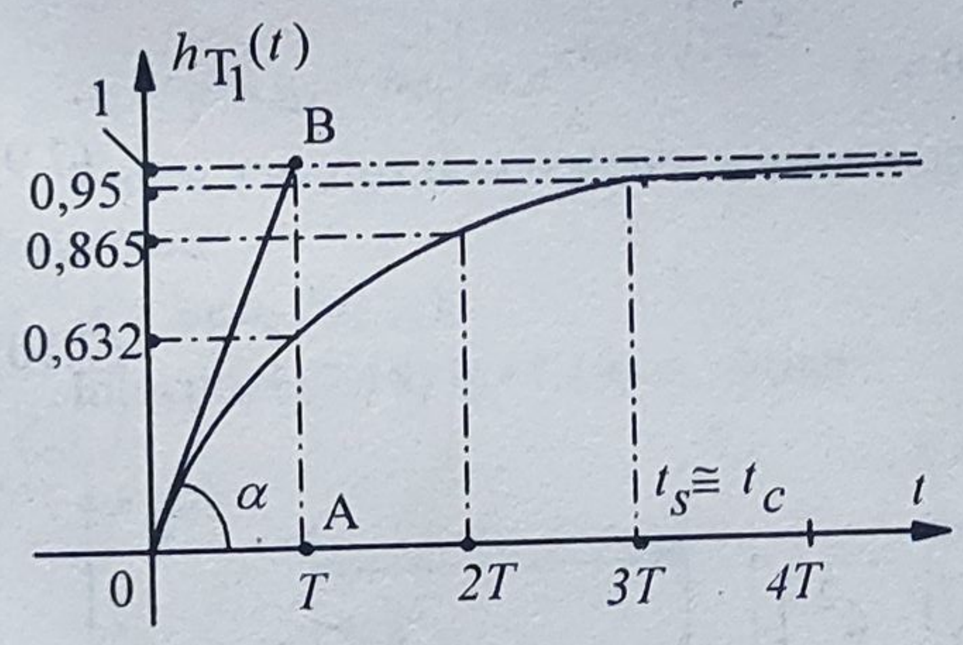


Fig.II.43. Răspunsul indicial al elementului (T_1) şi semnificaţia constantei de timp T

Acest fapt, pe de o parte, prilejuieşte o interpretare fizică a constantei de timp T şi, pe de altă parte, evidenţiază o modalitate de determinare, pe baza unei înregistrări experimentale a lui $h_{T_1}(t)$, a aceleiaşi constante de timp T. În acest ultim caz se poate face uz şi de faptul că $h_{T_1}(T)=1-e^{-1}\cong 0{,}631$ adică T este durata după care $h_{T_1}(t)$ creşte de la 0 la 63,1% din valoarea sa finală (de regim staţionar).

Se remarcă faptul că pentru $t = 3T$ se obţine $h_{T_1}(3T)=1-e^{-3}\cong 0{,}95$, ceea ce înseamnă că durata regimului tranzitoriu este $t_s \cong 3T$; se poate aprecia de asemenea că $t_c \cong t_s$.

Exemplul 7.1

Se consideră un termometru format dintr-un tub capilar din sticlă, umplut parţial cu mercur şi vidat, având temperatura $\theta_m(t)=\theta_0$. La $t = 0$ termometrul este introdus într-un lichid având temperatura θ_i. Se cere să se determine funcţia de transfer între variaţiile de temperatură: $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_0$ (la intrare) şi $\Delta\theta_m = \theta_m - \theta_0$ (la ieşire).

Într-o primă aproximaţie se face abstracţie de capacitatea termică a tubului capilar (din sticlă). Conform tabelelor II.1 şi II.2 se pot scrie ecuaţiile:

$$q_m = \frac{1}{R_m}(\Delta\theta_i - \Delta\theta_m),\ q_m = C_m\frac{d\Delta\theta_m}{dt},$$

în care R_m şi C_m sunt rezistenţa termică şi capacitatea termică ale mercurului şi q_m este fluxul termic în mercur.

Din relaţiile de mai sus rezultă ecuaţia diferenţială:

$$T_m \frac{d\Delta\theta_m}{dt} + \Delta\theta_m = \Delta\theta_i,$$

în care $T_m = R_m C_m$ este constanta de timp. Funcţia de transfer a termometrului are expresia (7.4).■

c) Elementul de întârziere de ordinul 2 (T_2) are funcţia de transfer:

$$G_{T_2}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{7.6}$$

în care $\omega_n > 0$ este *pulsaţia naturală* (exprimată în radiani/secundă) şi $\zeta \geq 0$ este *factorul de amortizare* (adimensional). Sistemul are doi poli care pot fi în una din următoarele două categorii:

- complex conjugaţi:

$$p_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad 0 \leq \zeta < 1; \tag{7.7}$$

- reali:

$$p_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), \quad \zeta \geq 1. \tag{7.8}$$

În cazul (7.8) elementul T_2 este echivalent cu două elemente T_1 înseriate, motiv pentru care în locul funcţiei de transfer (7.6) se poate utiliza şi:

$$G_{T_2}(s) = 1/\left[T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1\right], \tag{7.9}$$

în care:

$$T_{1,2} = 1/\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), \quad \zeta \geq 1, \tag{7.10}$$

sunt cele două constante de timp.

Răspunsul indicial al elementului T_2 are forma:

$$h_{T_2}(t) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]\sigma(t); & 0 \leq \zeta < 1 \\ \left[1 - (1+\omega_n t)e^{\omega_n t}\right]\sigma(t); & \zeta = 1 \\ \left[1 - \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{\zeta^2-1}} \operatorname{sh}\left(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\,t + \operatorname{arcth}\dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}\right)\right]\sigma(t); & \zeta > 1. \end{cases} \tag{7.11}$$

Graficul acestei funcţii este reprezentat în fig.II.44.

Pentru $\zeta = 0$ răspunsul indicial al elementului T_2 este neamortizat, de forma:

$$h_{T_2}(t) = \left[1 - \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\sigma(t), \tag{7.12}$$

în care pulsaţia oscilaţiei sinusoidale este chiar pulsaţia naturală ω_n.

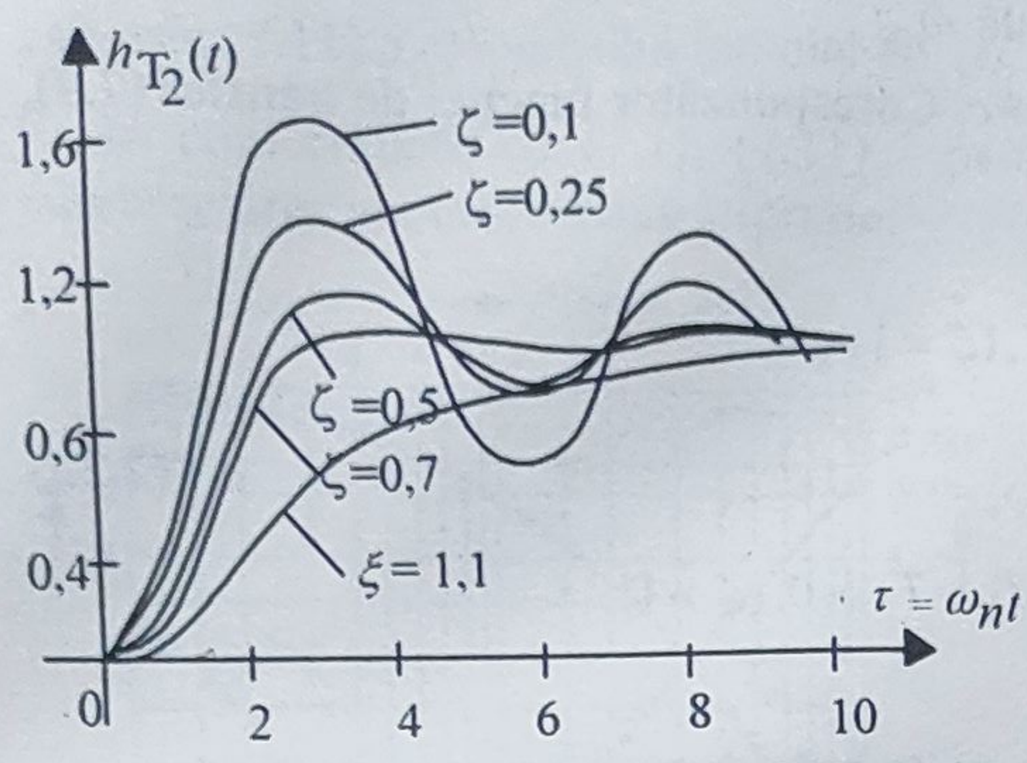


Fig.II.44. Răspunsul indicial al elementului T_2 pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

Spre deosebire de această situaţie, pentru $0<\zeta<1$ pulsaţia *oscilaţiei sinusoidale amortizate* este:

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} < \omega_n \tag{7.13}$$

şi se numeşte *pulsaţia proprie*. Pe baza acesteia se poate determina *perioada proprie* (exprimată în secunde) a oscilaţiei sinusoidale amortizate:

$$T_p = 2\pi/\omega_p. \tag{7.14}$$

c_1) Pentru $0 \le \zeta < 1$ extremele succesive ale funcţiei $h_{T_2}(t)$ se obţin pentru:

$$t_{kext} = kT_p/2,\ k = 0,1,2,...., \tag{7.15}$$

şi ele au valorile:

$$h_{T_2ext} = 1+(-1)^{k+1}e^{-k\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}},\quad k = 0,1,2,..... \tag{7.16}$$

Prin comparaţie cu valoarea de regim staţionar:

$$\bar{h}_{T_2} = \lim_{t\to+\infty} h_{T_2}(t) = 1, \tag{7.17}$$

rezultă că oscilaţia sinusoidală amortizată, pentru momentele (7.15), se caracterizează prin amplitudinile:

$$a_k = \left|h_{T_2ext} - \bar{h}_{T_2}\right| = e^{-k\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}},\quad k = 0,1,2,.... \tag{7.18}$$

Pentru a evalua descreşterea acestor amplitudini cu creşterea lui k se utilizează *decrementul logaritmic*:

$$\lambda = \ln(a_k/a_{k+1}). \tag{7.19}$$

Înlocuind (7.18) în (7.19) se obţine:

$$\lambda = \pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2},\ 0 \le \zeta < 1, \tag{7.20}$$

care este independent de k şi care simultan evidenţiază dependenţa procesului de amortizare a oscilaţiilor exclusiv de factorul de amortizare ζ.

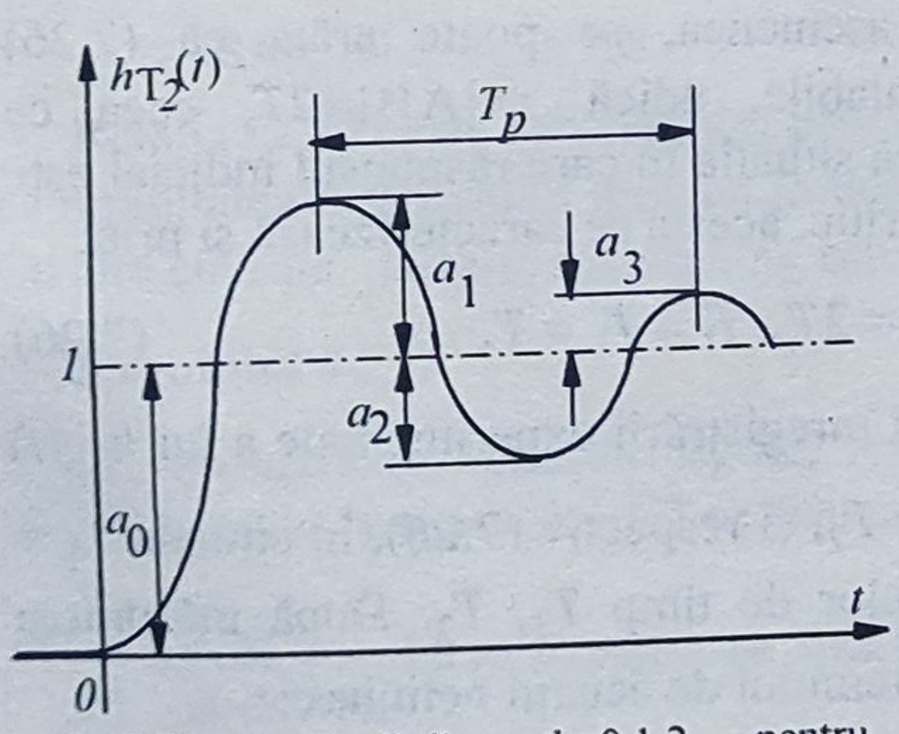


Fig.II.45. Amplitudinile a_k, k=0,1,2,..., pentru calculul decrementului logaritmic (7.19) şi al factorului de amortizare (7.21); perioada proprie T_p pentru calculul pulsaţiei naturale (7.22)

În cazul înregistrării experimentale a răspunsului indicial $h_{T_2}(t)$ de tip oscilaţie sinusoidală amortizată, relaţia (7.20) poate fi utilizată pentru determinarea factorului de amortizare ζ. După măsurarea a două amplitudini succesive a_k şi a_{k+1} (fig.II.45) se poate utiliza (7.19) pentru calculul lui λ. Apoi, conform relaţiei (7.20), se poate determina factorul de amortizare:

$$\zeta = \lambda/\sqrt{\pi^2+\lambda^2},\ \lambda \ge 0. \tag{7.21}$$

De asemenea, pentru determinarea pulsaţiei naturale ω_n se măsoară mai întâi perioada proprie T_p (fig.II.45). Eliminând ω_p şi ζ între (7.13), (7.14) şi (7.21) se obţine:

$$\omega_n = 2\sqrt{\pi^2+\lambda^2}/T_p, \tag{7.22}$$

cu ajutorul căreia se poate determina pulsaţia naturală ω_n.

c_2) În cazul $\zeta \geq 1$ răspunsul indicial este *aperiodic*. Corespunzător funcţiei de transfer (7.9), cu (7.10), expresia acestuia este:

$$h_{T_2}(t) = \begin{cases} \left[1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}\right]\sigma(t); & T_1 = T_2 = T, (\zeta = 1) \\ \left[1-\frac{1}{T_1-T_2}\left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]\sigma(t); & T_1 > T_2 > 0, (\zeta > 1). \end{cases} \tag{7.23}$$

Pentru $T_1 \neq T_2$, $(\zeta > 1)$, funcţia $h_{T_2}(t)$ are un punct de inflexiune pentru:

$$t_i = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2}, \qquad h_{T_2 i} = 1 - \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)^{\frac{T_1+T_2}{T_1-T_2}}. \tag{7.24}$$

Panta tangentei în punctul de inflexiune este:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)^{\frac{T_1+T_2}{T_1-T_2}} = \frac{1-h_{T_2 i}}{T_1+T_2}.$$

Întrucât în triunghiul ABC (fig.II.46) are loc $|BC| = 1 - h_{T_2 i}$, rezultă că:

$$\tau = |AB| = T_1 + T_2, \quad T_1 > T_2 > 0. \tag{7.25}$$

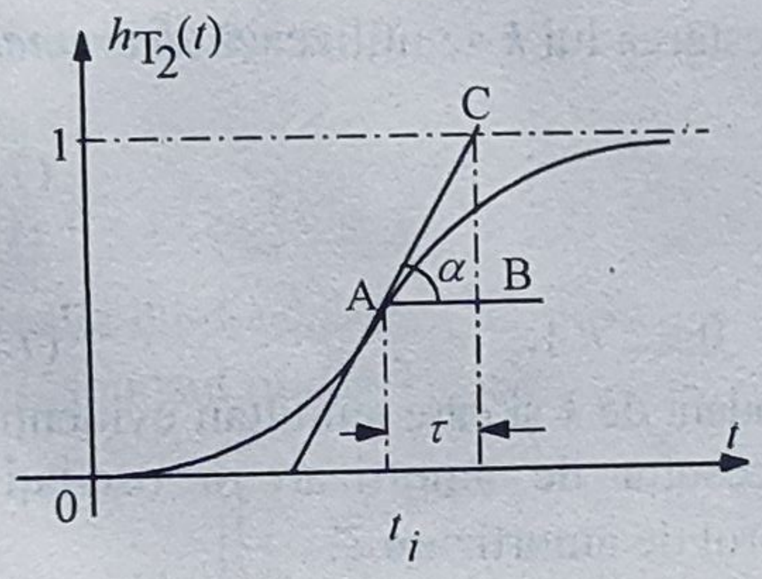


Fig.II.46. Abscisa punctului de inflexiune t_i şi durata τ pentru determinarea constantelor de timp T_1, T_2 ca soluţii ale sistemului (7.27)

Pe de altă parte, pentru $T_1 = T_2 = T$, $(\zeta = 1)$, răspunsul indicial $h_{T_2}(t)$ este *aperiodic critic*. Punctul de inflexiune este definit de: $t_i = T$, $h_{T_2} = 1 - 2/e$. De asemenea, se poate arăta că (7.26) rămâne valabilă, adică $\tau = |AB| = 2T$, ceea ce înseamnă că situaţia în care răspunsul indicial este aperiodic critic, acesta se caracterizează şi prin:

$$\tau = 2t_i = 2T, \quad T_1 = T_2 = T. \tag{7.26}$$

În cazul înregistrării experimentale a lui $h_{T_2}(t)$ de tip aperiodic, relaţiile (7.24), (7.25), în situaţia $T_1 \neq T_2$, şi respectiv (7.26), în situaţia $T_1 = T_2 = T$, pot fi utilizate pentru determinarea constantelor de timp T_1, T_2. După măsurarea duratelor t_i şi τ se pot determina $T_1 \neq T_2$ ca soluţii ale sistemului de ecuaţii neliniare:

$$\begin{cases} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2} = t_i \\ T_1 + T_2 = \tau \end{cases} \tag{7.27}$$

respectiv $T_1 = T_2 = T$ din

$$T = t_i = \tau / 2. \tag{7.28}$$

c_3) Pentru evaluarea indicilor de calitate definiți la 7.1, ca funcții de ω_n și ζ, se utilizează expresia (7.11) a răspunsului indicial $h_{T_2}(t)$.

În conformitate cu (7.1), (7.11) - pentru $0 \le \zeta < 1$, (7.16) - pentru $k = 1$ și (7.17) suprareglarea are următoarea expresie:

$$\sigma = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, 0 \le \zeta < 1, \qquad (7.29)$$

care evidențiază dependența suprareglării σ exclusiv de factorul de amortizare ζ. Graficul funcției (7.29) este reprezentat în fig.II.47.

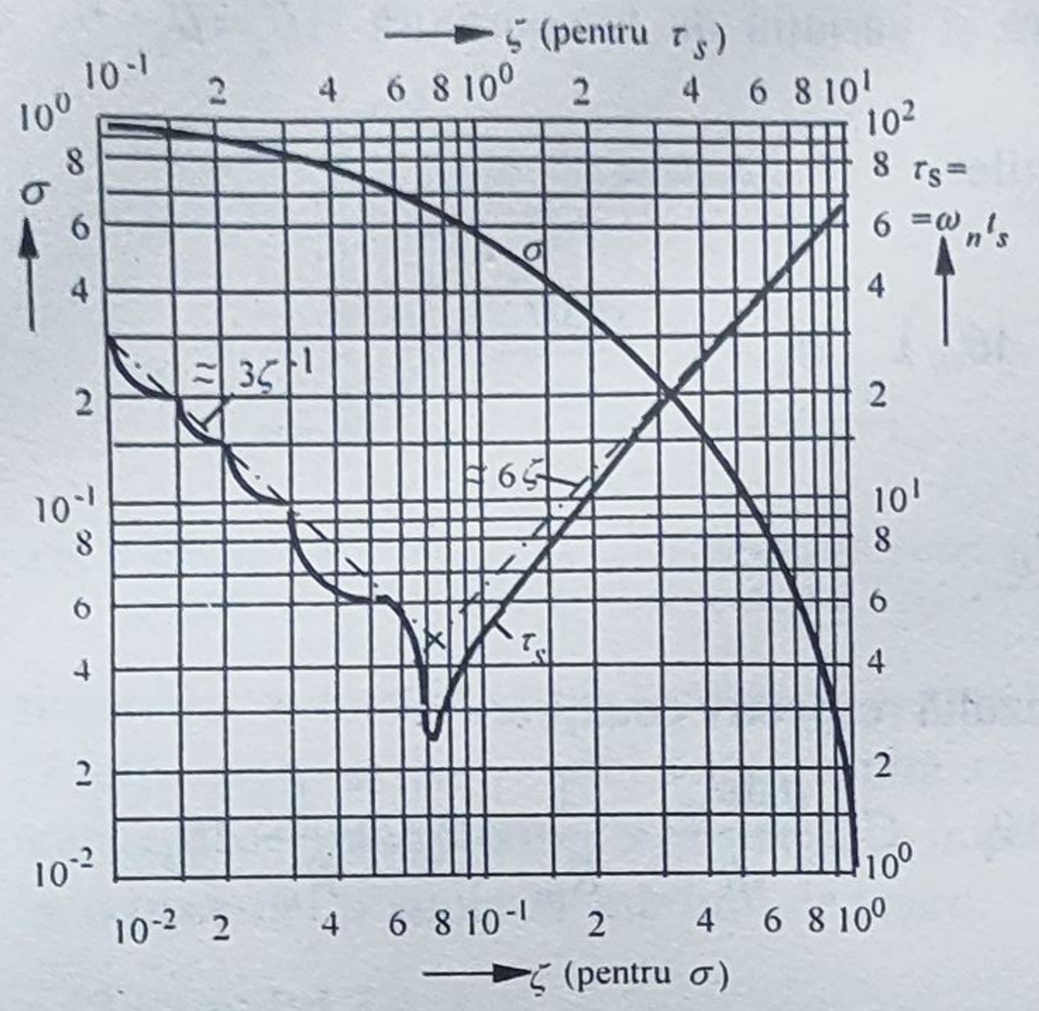


Fig.II.47. Dependența suprareglării σ și a duratei adimensionale a regimului tranzitoriu τ_s de factorul de amortizare ζ

Pentru determinarea duratei regimului tranzitoriu, t_s, se utilizează (7.2). Pentru simplificarea soluționării numerice a sistemului (7.2), (7.11) se introduce în (7.11) timpul adimensional $\tau = \omega_n t$. În aceste circumstanțe soluția sistemului (7.2), (7.11) este *durata adimensională a regimului tranzitoriu*:

$$\tau_s = \omega_n t_s, \qquad (7.30)$$

care depinde exclusiv de factorul de amortizare ζ. Dependența lui τ_s de ζ este reprezentată în fig.II.47. Se remarcă desigur existența unui minim al lui τ_s pentru $\zeta = 0{,}707$.

De asemenea se constată posibilitatea utilizării aproximărilor:

$$\tau_s \cong 3/\zeta, \quad 0 < \zeta \le 0{,}707, \qquad (7.31)$$

$$\tau_s \cong 6\zeta, \quad \zeta > 0{,}707. \qquad (7.32)$$

În ceea ce privește durata de creștere, t_c, (în situația creșterii lui $h_{T_2}(t)$ de la $0{,}1\bar{h}_{T_2}$ la $0{,}9\bar{h}_{T_2}$) în cazul funcției (7.11), prin soluționarea numerică se obține:

$$t_c \cong 1{,}8/\omega_n, 0{,}3 \le \zeta \le 0{,}8. \qquad (7.33)$$

Relația (7.33) este remarcabilă prin simplitate, dar mai ales prin ceea ce exprimă și anume că rapiditatea răspunsului indicial (adică $1/t_c$) este direct proporțională cu pulsația naturală ω_n. Cu alte cuvinte, pulsația naturală ω_n este un indicator al rapidității răspunsului indicial.

Exemplul 7.2

Se consideră sistemul din fig.II.2 (exemplul 1.2). Se cere să se arate că acesta este de tipul PT_2. S-a arătat la exemplul 1.2 că sistemul este descris de ecuația diferențială:

$C\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{L}y=u$. Rezultă că funcția de transfer are expresia: $G(s)=\frac{1/C}{s^2+s/RC+1/LC}$.

Comparând această funcție cu (7.6) rezultă că ea este de tipul PT_2, adică: $G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$,

în care: $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$, $\zeta = \sqrt{L/C}/2R$, $K = L$.

Se remarcă faptul că ω_n, conform formulei lui Thompson, este pulsația naturală a oscilatorului L, C ideal (fără rezistența R în paralel, adică pentru $R = +\infty$, respectiv $\zeta = 0$).■

Exemplul 7.3

Se consideră termometrul de la exemplul 7.1. Se cere să se determine funcţia de transfer între variaţiile de temperatură $\Delta\theta_i$ (intrare) şi $\Delta\theta_m$ (ieşire) în condiţiile în care nu se neglijează rezistenţa termică R_s şi capacitatea termică C_s ale tubului capilar (din sticlă).

În aceste circumstanţe trebuie avută în vedere şi variaţia de temperatură $\Delta\theta_s = \theta_s - \theta_0$ a tubului capilar.

Conform tabelelor II.1 şi II.2 se pot scrie ecuaţiile:

- fluxul termic rezultant pentru tubul capilar:

$$q_s = q_{s1} - q_{s2} = \frac{1}{R_s}(\Delta\theta_i - \Delta\theta_s) - \frac{1}{R_m}(\Delta\theta_s - \Delta\theta_m), \quad q_s = C_s \frac{d\Delta\theta_s}{dt};$$

- fluxul termic în mercur:

$$q_m = q_{s2} = \frac{1}{R_m}(\Delta\theta_s - \Delta\theta_m), \quad q_m = C_m \frac{d\Delta\theta_m}{dt}.$$

Din primele două şi din ultimele două ecuaţii rezultă respectiv ecuaţiile:

$$C_s \frac{d\Delta\theta_s}{dt} + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_m}\right)\Delta\theta_s - \frac{1}{R_m}\Delta\theta_m = \frac{1}{R_s}\Delta\theta_i, \quad C_m \frac{d\Delta\theta_m}{dt} + \frac{1}{R_m}\Delta\theta_m = \frac{1}{R_m}\Delta\theta_s.$$

Eliminând $\Delta\theta_s$ între aceste ecuaţii se obţine:

$$T_s T_m \frac{d^2\Delta\theta_m}{dt^2} + (T_s + T_m + T_{sm})\frac{d\Delta\theta_m}{dt} + \Delta\theta_m = \Delta\theta_i, \text{ în care } T_s = R_s C_s,\ T_m = R_m C_m,\ T_{sm} = R_s C_m.$$

Funcţia de transfer a termometrului are forma (7.9), în care:

$$T_{1,2} = \frac{1}{2}\left(T_s + T_m + T_{sm} \pm \sqrt{(T_s - T_m)^2 + T_{sm}(T_{sm} + 2T_s + 2T_m)}\right). \blacksquare$$

d) Elementul integrator (I) are funcţia de transfer:

$$G_I(s) = 1 / T_I s, \tag{7.34}$$

în care $T_I > 0$ este *timpul de integrare*.

Elementul I are un pol în $s = 0$, adică este BIBO-instabil. Răspunsul indicial are expresia:

$$h_I(t) = t\sigma(t) / T_I \tag{7.35}$$

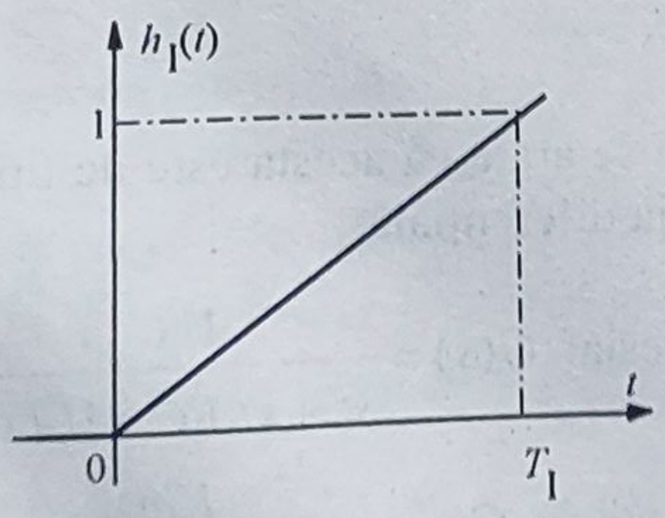


Fig.II.48. Răspunsul indicial al elementului I şi semnificaţia timpului de integrare T_I

şi este reprezentat în fig.II.48. Se constată că $h_I(T_I)=1$, ceea ce înseamnă că T_I este durata după care $h_I(t)$ creşte de la 0 la 1, respectiv mărimea de ieşire ajunge să egaleze mărimea de intrare.

Relaţia intrare-ieşire în domeniul timpului are forma:

$$y(t) = \frac{1}{T_I}\int_0^t u(\tau)d\tau. \tag{7.36}$$

Se ştie că operaţia de integrare (definită) este o operaţie *globală* (care se extinde pe un interval). În acest context $u(\tau)=0,\ \tau\in[t_1,t_2]\subset[0,t]$ nu implică (în mod necesar) $y(\theta)=0,\ \theta\in[t_1,\ t_2]$. De exemplu, pentru:

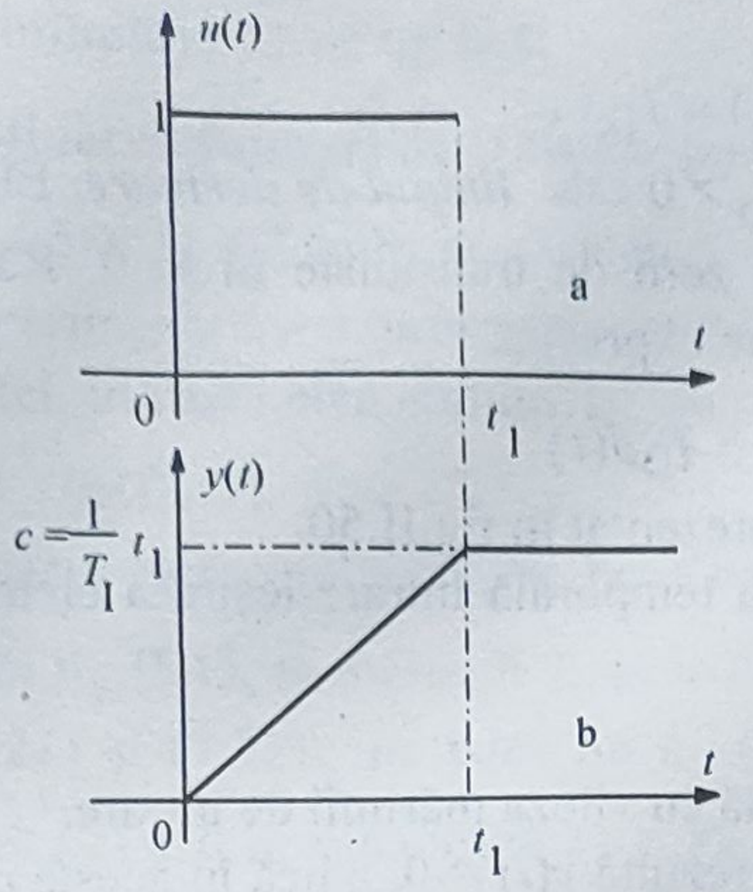


Fig.II.49. $u(t) = 0$ pentru $t \geq t_1$ (a) implică $y(t)$=const.=c pentru $t \geq t_1$ (b) (şi nu în mod necesar $c = 0$)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t \geq t_1 \end{cases}$$

având graficul din fig.II.49.a, din (7.36) rezultă:

$$y(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < 0 \\ t/T_1 \ , & 0 \leq t < t_1 \\ t_1/T_1 \ , & t \geq t_1. \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este reprezentat în fig.II.49.b din care rezultă în mod clar că deşi $u(t) = 0$ pentru $t \geq t_1$, $y(t) = t_1/T_1 \neq 0$ pentru $t \geq t_1$.

Această comportare (foarte utilă în cazul sistemelor automate, după cum se va vedea la III.5.2) transpare şi din forma derivată a relaţiei (7.36): $\dot{y}(t) = u(t)/T_1$, din care rezultă că viteza mărimii de ieşire este proporţională cu mărimea de intrare. Anularea acesteia implică anularea vitezei mărimii de ieşire, dar nu (în mod necesar) şi anularea mărimii de ieşire.

Exemplul 7.4

Utilizând rezultatele de le exemplele 2.1 şi 2.3 se cere să se determine funcţia de transfer a unui servomotor electric de curent continuu.

Un servomotor de curent continuu este un motor electric de construcţie specială, de regulă de putere relativ mică, utilizat pentru poziţionarea în spaţiu, prin intermediul unui angrenaj cu roţi dinţate (reductor de viteză), a unor elemente mecanice, componente ale unei instalaţii tehnologice (inclusiv în cadrul unui sistem automat). În aceste condiţii mărimea de ieşire a servomotorului (inclusiv angrenajul cu roţi dinţate) este unghiul ψ al axului de ieşire al angrenajului. Relaţia dintre viteza unghiulară ω a axului servomotorului şi unghiul ψ este: $\psi(t) = k\int_0^t \omega(\tau)d\tau$, căreia în domeniul funcţiilor imagine (Laplace) îi corespunde: $\Psi(s) = k\Omega(s)/s$, şi în care k este raportul de transmisie al angrenajului cu roţi dinţate.

În conformitate cu fig.II.20 (rezultatul final la exemplul 2.3), în care se consideră $M(s) \equiv 0$, funcţia de transfer a servomotorului (inclusiv angrenajul cu roţi dinţate) este:

$$G_{sm}(s) = \frac{\Psi(s)}{U(s)} = \frac{k}{s} \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}.$$

În această formă servomotorul (cu angrenaj cu roţi dinţate) este un element de transfer de tipul (PIT_2). Ţinând însă seama de faptul că prin construcţie se asigură $L \cong 0$ şi $J \cong 0$, rezultă că într-o primă aproximaţie servomotorul (cu angrenajul cu roţi dinţate) este descris de funcţia de transfer: $G_{sm}(s) = 1/T_1 s$, în care: $T_1 = (k_1 + Rk_3/k_2)/k$.

Se trage concluzia că principalul element conţinut de servomotor este de tipul integrator.

Trebuie remarcat faptul că experimentul prezentat în cadrul fig.II.49 este uşor de efectuat şi în acelaşi timp este foarte concludent. Pentru $t \in [0, t_1]$ se va observa o creştere aproximativ liniară a unghiului $\psi(t)$, după care, pentru $t \in [t_1, +\infty)$, $\psi(t) = \psi(t_1) = \text{const.} \neq 0$ (deoarece pentru $u(t) = 0$, $t \in [t_1, +\infty)$, axul servomotorului nu se mai roteşte). ■

c) Elementul derivator (D) are funcţia de transfer:

$$G_D(s) = T_D s\,, \tag{7.37}$$

în care $T_D > 0$ este *timpul de derivare*. Elementul D are un zero de transmisie în $s=0$. Răspunsul indicial are expresia:

$$h_D(t) = T_D\delta(t) \tag{7.38}$$

şi este reprezentat în fig.II.50.

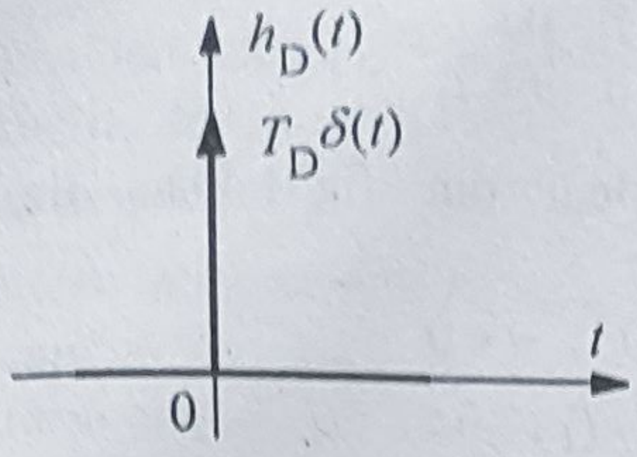


Fig.II.50. Răspunsul indicial al elementului D

Relaţia temporală intrare-ieşire a elementului D este:

$$y(t) = T_D\dot{u}(t), \tag{7.39}$$

ceea ce înseamnă că mărimea de ieşire este proporţională cu viteza mărimii de intrare.

Pentru $u(t)$ = const., oricare ar fi această constantă, rezultă $y(t) = 0$, adică în aceste condiţii transferul intrare - ieşire este blocat (a se vedea 5.3). Elementul D este insensibil la aplicarea unei mărimi de intrare constante (de exemplu generată de un alt element sau sistem aflat în regim staţionar). Transferul intrare - ieşire este neblocat numai pentru $\dot{u}(t) \neq 0$.

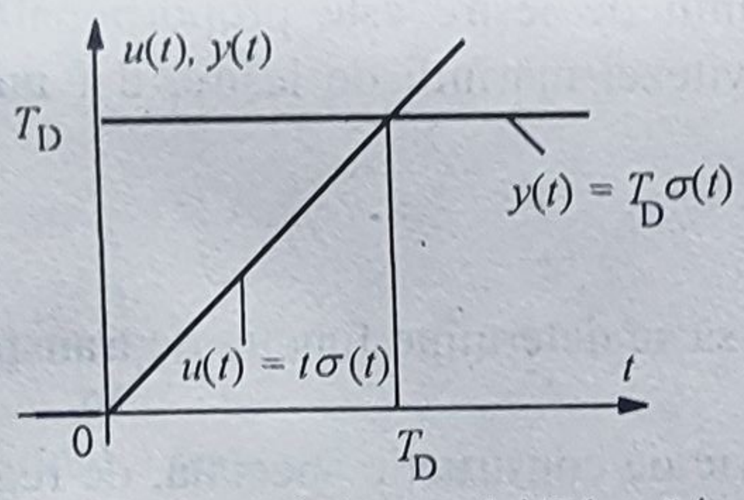


Fig.II.51. Răspunsul elementului D la mărimea de intrare de tip rampă unitară şi semnificaţia timpului de derivare T_D

Pentru a formula o interpretare a constantei T_D se consideră mărimea de intrare de tip *rampă unitară* (de viteză unitară):

$$u(t) = t\sigma(t). \tag{7.40}$$

Înlocuind (7.40) în (7.39) se obţine:

$$y(t) = T_D\sigma(t). \tag{7.41}$$

Conform fig.II.51, timpul de derivare T_D este durata după care mărimea de intrare de tip rampă unitară ajunge să egaleze mărimea de ieşire.

Exemplul 7.5

Se consideră transformatorul electric cu schema din fig.II.52, cu secundarul funcţionând în circuit deschis. Se cere să se determine funcţia de transfer între tensiunile u (primară) şi y (secundară). Conform schemei din fig.II.52 se pot scrie ecuaţiile:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt},\quad y = M\frac{di}{dt}.$$

Trecând la transformate Laplace şi eliminând $I(s)$ între ecuaţiile obţinute, rezultă:

$$G_T(s) = Y(s)/U(s) = Ms/(Ls + R).$$

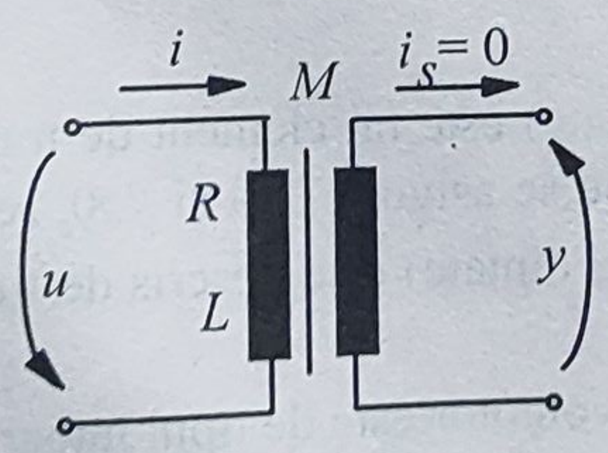


Fig.II.52. Transformatorul electric de la exemplul 7.5; u şi y - tensiunile primară şi secundară, i şi $i_s = 0$ - curenţii primar şi secundar, R şi L - rezistenţa şi inductanţa primarului, M - inductanţa mutuală

În această formă transformatorul electric este un element de transfer de tipul DT_1. Dacă prin construcţie se realizează o rezistenţă R suficient de mare (astfel încât $L|s|<<R$), atunci transformatorul electric este descris, într-o primă aproximaţie, de funcţia de transfer: $G_T(s)=T_D s$, în care $T_D=M/R$.

Se trage concluzia că principalul element conţinut de transformatorul electric cu secundarul funcţionând în circuit deschis (cu rezistenţa de

sarcină infinită) este de tip D.■

7.3. Obținerea funcției de transfer pe baza răspunsului indicial

S-a arătat la 7.2 că în cazul elementelor de transfer T_1 și T_2 este posibilă determinarea pe cale experimentală a tuturor parametrilor funcției de transfer pe baza răspunsului indicial.

Astfel, în cazul elementului T_1, pe baza lui $h_{T_1}(t)$ obținut experimental, rezultă $T=|OA|$ sau $T = t_s/3$. (fig.II.43).

În cazul elementului T_2, pe baza lui $h_{T_2}(t)$ de forma unei oscilații sinusoidale amortizate, conform fig.II.45, se măsoară T_p și se calculează λ (cu (7.19)), după care se calculează ζ și ω_n (cu (7.21) și (7.22)); pe baza lui $h_{T_1}(t)$ de formă aperiodică, ținând seama de fig.II.46, se măsoară t_i și τ și se calculează T_1 și T_2 ca soluții ale sistemului (7.27) (în cazul critic $\tau = 2t_i$ și $T_1 = T_2 = t_i$).

Evident că aceste proceduri se pot aplica cu relativă ușurință atunci când se știe că sistemul real este, după caz, de tipul T_1 sau T_2.

Obținerea pe cale experimentală a funcției de transfer a unui sistem real pornește de la faptul că și cel mai bun model matematic obținut pe cale teoretică este de fapt o imagine aproximativă a sistemului real. Uneori, cum este cazul navelor aeriene și cosmice, modelul matematic teoretic este de foarte bună calitate. Alteori, cum este cazul proceselor termoenergetice, metalurgice sau chimice, modelele matematice teoretice sunt foarte aproximative (ca structură), iar parametrii sunt în mare parte necunoscuți.

Iată de ce, în fiecare caz în parte, este important (și prudent) să se verifice modelul matematic teoretic cu cel elaborat pe baza datelor experimentale existente sau care se obțin chiar în acest scop.

Fie un răspuns indicial de tip aperiodic (ca în fig.II.42) obținut experimental pentru un sistem real dat. Un astfel de răspuns indicial poate fi descris de:

$$h(t) = \bar{h} + Ae^{-at} + Be^{-bt} + Ce^{-ct} + \ldots\ldots, \tag{7.42}$$

în care $\bar{h} > 0$, $A \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $B \in \mathbf{R}$, $b > 0$,.... sunt necunoscute și urmează a fi determinate. Întrucât $\bar{h}$ poate fi determinat direct din înregistrarea lui $h(t)$, urmează că într-o primă aproximație se poate scrie:

$$\lg\left[\bar{h} - h(t)\right] \cong \lg(-A) - 0{,}4343at, \text{ în cazul } \bar{h} - h(t) > 0 \text{ și } A < 0, \tag{7.43}$$

$$\lg\left[h(t) - \bar{h}\right] \cong \lg A - 0{,}4343at, \text{ în cazul } h(t) - \bar{h} > 0 \text{ și } A > 0. \tag{7.44}$$

Ecuația (7.43) (sau (7.44)) este ecuația unei drepte (într-un sistem de axe cu t în abscisă și lg[ ] în ordonată). Având reprezentat răspunsul indicial în aceleași coordonate, prin trasarea unei drepte aproximante se determină A și a. În continuare se face aproximația:

$$\lg[\bar{h} - h(t) + Ae^{-at}] \cong \lg(-B) - 0{,}4343bt, \text{în cazul } \bar{h} - h(t) + Ae^{-at} > 0 \text{ și } B < 0, \tag{7.45}$$

$$\lg\left[h(t) - \bar{h} - Ae^{-at}\right] = \lg B - 0{,}4343bt, \text{ în cazul } h(t) - \bar{h} - Ae^{-at} > 0 \text{ și } B > 0. \tag{7.46}$$

Ecuația (7.45) (sau (7.46)) este de asemenea ecuația unei drepte. Având reprezentat graficul răspunsului indicial în coordonate (t, lg[ ]), prin trasarea unei drepte aproximante se determină B și b. Procedeul se repetă pentru determinarea celorlalți parametri până când eroarea dintre $h(t)$ și estimatul său $\hat{h}(t)$ (obținut prin acest procedeu), în valoare absolută, este mai mică sau cel mult egală cu o valoare admisibilă prestabilită.

Exemplul 7.6

Se consideră răspunsul indicial al unui sistem real conform tabelului:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	3	4	$+\infty$
$h(t)$	0	0,005	0,034	0,085	0,14	0,215	0,51	0,7	0,817	0,932	0,975	1

Se cere să se determine $\overline{h}, A, a, B$ şi b conform relaţiei (7.42).

Evident $\overline{h} = 1$. Pentru determinarea perechii $(A,\ a)$, fără a mai face uz de reprezentări grafice, se aleg punctele de coordonate: $t = 3$ şi $\lg[1- h(3)] = -1{,}167$ şi respectiv $t = 4$ şi $\lg[1- h(4)] = -1{,}602$ prin care se poate trasa dreapta:

$$\lg[1-h(t)]+1{,}167 = \frac{-1{,}602+1{,}167}{4-3}(t-3).$$

Comparând această ecuaţie cu (7.43) rezultă: $\lg(-A) = -1{,}167 + (1{,}602 - 1{,}167)3 = 0{,}138$, adică $A = -1{,}37$; $-0{,}4343a = -1{,}602+1{,}167 = -0{,}435$, adică $a \cong 1$.

Pentru determinarea perechii (B,b) se aleg punctele de coordonate: $t = 0$ şi $\lg[h(0)-1+1{,}37] = -0{,}432$ şi respectiv $t = 0{,}5$ şi $\lg[h(0{,}5)-1+1{,}37e^{-0{,}5}] = -1{,}388$ prin care se poate trasa dreapta:

$$\lg\left[h(t)-\overline{h}-Ae^{-at}\right]+0{,}432 = \frac{-1{,}338+0{,}432}{0{,}5}t.$$

Comparând această ecuaţie cu (7.46) rezultă: $\lg B = -0{,}432$, adică $B = 0{,}37$;

$$-0{,}4343\ b = \frac{-1{,}338+0{,}432}{0{,}5} = -1{,}812, \text{ adică } b = 4{,}17.$$

Aşadar estimatul răspunsului indicial este: $\hat{h}(t) = 1-1{,}37e^{-t}+0{,}37e^{-4{,}17t}$, cu $\hat{h}(0) = 0$, căruia, în transformate Laplace, îi corespunde:

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1{,}37}{s+1} + \frac{0{,}37}{s+4{,}17} = \frac{-0{,}17s+4{,}17}{s(s+1)(s+4{,}17)}.$$

Estimata funcţiei de transfer căutate este:

$$\hat{G}(s) = s\hat{H}(s) = \frac{-0{,}17s+4{,}17}{(s+1)(s+4{,}17)}.$$

Valorile funcţiei $\hat{h}(t)$ şi ale erorii relative de estimaţie, $e = |[h(t) - \hat{h}(t)]/h(t)|$, sunt prezentate în următorul tabel:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	3	4	∞
$\hat{h}(t)$	0	0,0047	0,394	0,0914	0,1519	0,2155	0,502	0,6952	0,8142	0,9318	0,9749	1
e	–	11,29	15,84	7,52	8,52	0,2	1,56	0,68	0,27	0,01	≈ 0	0

Se observă faptul că eroarea relativă maximă este de 15,84%. Micşorarea acestei erori este posibilă prin considerarea termenului Ce^{-ct} (şi eventual a altora care îi urmează) din (7.42). În acest caz se iau în considerare alte perechi de puncte din tabelul lui $h(t)$.■

Trebuie subliniat faptul că rezultatele care se obţin cu ajutorul acestei metode sunt influenţate de erorile inerente care afectează măsurarea valorilor variabilelor t şi $h(t)$. Este uşor de verificat, chiar în cazul exemplului 7.6, că valori uşor modificate (conform posibilelor erori de măsurare) ale lui $h(t)$ conduc la o altă funcţie de transfer $\hat{G}(s)$.

Tentaţia de a micşora cât mai mult eroarea relativă de estimaţie prin considerarea unui număr mare de termeni în (7.42) nu constituie cea mai bună cale de urmat. Procedând în acest fel (adică utilizând (7.42) cu un număr mare de termeni) creşte ordinul funcţiei de transfer $\hat{G}(s)$, situaţie care nu este de dorit în cazul proiectării sistemelor automate. Dimpotrivă,

proiectarea sistemelor automate se face de regulă utilizând, pe cât este posibil şi între limite admisibile de erori, funcţii de transfer simplificate (de ordin redus).

Se constată că problema determinării structurii şi parametrilor unui sistem real pe baza datelor experimentale (înregistrări simultane ale mărimilor $u(t)$ şi $y(t)$), chiar în cazul existenţei unui model matematic teoretic, este de o importanţă deosebită pentru cunoaşterea sistemelor reale. În actualul stadiu de dezvoltare a automaticii această problemă face obiectul unei discipline distincte - *identificarea sistemelor dinamice*, în care s-au dezvoltat numeroase metode pentru determinarea structurii şi parametrilor sistemelor reale pe baza datelor obţinute pe cale experimentală.

7.4. Poli şi zerouri dominante

De îndată ce funcţia de transfer a unui sistem dinamic este cunoscută, este posibilă determinarea expresiei răspunsului indicial $h(t)$ şi evaluarea indicilor de calitate definiţi la 7.1. Întrucât aceşti indici depind de localizarea în planul complex a polilor şi zerourilor funcţiei de transfer, este natural să se evidenţieze pertinent această dependenţă.

Exemplul 7.7

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=60/[(s+2)(s+30)]$. Se cere să se determine $h(t)$ şi pe această bază să se evalueze importanţa relativă a celor doi poli.

Răspunsul indicial are expresia: $h(t)=(1-15e^{-2t}/14+e^{-30t}/14)\sigma(t)$.

Exponenţiala e^{-2t} este asociată polului $p_1=-2$ şi exponenţiala e^{-30t} este asociată polului $p_2=-30$. Evident, pentru $t\to+\infty$, $e^{-30t}\to 0$ mai repede ca $e^{-2t}\to 0$. Se spune că polul $p_2=-30$ este mai rapid ca polul $p_1=-2$ sau că polul $p_1=-2$ este mai lent ca polul $p_2=-30$. Cu cât un pol este situat mai la stânga axei imaginare a planului complex, cu atât acesta este mai rapid. Se poate spune că polul $p_1=-2$ este dominant în comparaţie cu polul îndepărtat $p_2=-30$, deoarece e^{-2t} persistă, cu valori semnificative, un timp mai îndelungat, comparativ cu e^{-30t}. În plus, în cazul de faţă, coeficientul lui e^{-30t} este mai mic, în valoare absolută, decât cel al lui e^{-2t}.

În aceste circumstanţe, pentru $|s|$ suficient de mic, respectiv pentru t suficient de mare (în virtutea relaţiei dintre s şi t, conform transformării Laplace - Anexa A1), este posibilă aproximarea $|s+30|\cong 30$. Rezultă că în $G(s)$ se poate păstra numai polul dominant, adică este posibilă utilizarea funcţiei de transfer de ordin redus: $\tilde{G}(s)=2/(s+2)$ căreia îi corespunde răspunsul indicial: $\tilde{h}(t)=(1-e^{-2t})\sigma(t)$. Fireşte, se pot evalua erorile $|G(s)-\tilde{G}(s)|$ şi $|[h(t)-\tilde{h}(t)]|/h(t)$, pe baza cărora se poate decide privind oportunitatea utilizării lui $\tilde{G}(s)$ în locul lui $G(s)$.■

Pentru abordarea adecvată a problematicii polilor şi zerourilor dominante se consideră un sistem dinamic BIBO-stabil descris de funcţia de transfer (similară cu (1.13)):

$$G(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}, \tag{7.47}$$

în care $m<n$, polii p_j sunt simpli ($p_j\neq p_k$, $j\neq k$, $j,\ k=\overline{1,n}$) cu $\mathrm{Re}\,p_j<0$, $j=\overline{1,n}$, şi $z_i\neq p_j$, $i=1,m$, $j=\overline{1,n}$, cu $z_i\neq 0$, $i=\overline{1,m}$, (dacă există un $z_k=0$, atunci sistemul conţine un element D, care blochează transferul intrare - ieşire în regim staţionar; a se vedea 7.2.e).

Răspunsul indicial al sistemului descris de (7.47) are expresia:

$$h(t)=\left(A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k e^{p_k t}\right)\sigma(t), \tag{7.48}$$

în care:

$$A_0 = \bar{h} = \lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}G(s) = (-1)^{m-n} K\prod_1^m z_i \Big/ \prod_1^n p_j , \tag{7.49}$$

$$A_k = \left[(s-p_k)\frac{1}{s}G(s)\right]_{s=p_k} = K\prod_1^m (p_k - z_i)\Big/ p_k\prod_{j\neq k}^n (p_k - p_j), \quad k=\overline{1,n}. \tag{7.50}$$

Din (7.49) se obține:

$$K = (-1)^{m-n}\,\bar{h}\left(\prod_1^n p_j \Big/ \prod_1^m z_i\right),$$

care înlocuit în (7.50) conduce la:

$$A_k = -\bar{h}\left(\prod_1^m (1-p_k/z_i)\Big/\prod_1^n (1-p_k/p_j)\right), \quad k=\overline{1,n}. \tag{7.51}$$

Utilizând (7.49) şi (7.51), din (7.48) rezultă:

$$h(t) = \bar{h}\left[1-\sum_{k=1}^n \left(\prod_1^m (1-p_k/z_i)\Big/\prod_{1\atop j\neq k}^n (1-p_k/p_j)\right)e^{p_k t}\right]\sigma(t). \tag{7.52}$$

În multe situații, chiar deliberat create (după cum se va vedea la V.5), este posibilă împărțirea polilor $p_j, j = \overline{1,n}$, în două mari grupe:

- o grupă a polilor relativ apropiați de originea planului complex, notați generic cu p_μ;
- o grupă a polilor îndepărtați, notați generic cu p_ν, pentru care:

$$\mathrm{Re}\, p_\nu << \mathrm{Re}\, p_\mu, \quad |p_\nu| >> |p_\mu|.$$

Polii p_μ se numesc *poli dominanți* şi polii p_ν se numesc *poli îndepărtați.*

O împărțire şi calificări similare sunt posibile şi pentru zerourile z_i, $i = \overline{1,m}$.

Din expresia (7.52) a lui $h(t)$ rezultă că influența unui pol îndepărtat p_ν asupra lui $h(t)$ este de două feluri:

- în $h(t)$ există exponențiale de forma $e^{p_\nu t}$ care tind rapid la 0 pentru t tinzând la $+\infty$, în condițiile în care coeficienții corespunzători, A_ν, pot fi, eventual, mari în modul;
- p_ν sunt prezenți în coeficienții A_μ ai exponențialelor $e^{p_\mu t}$; întrucât: $|1-p_\mu/p_\nu| \cong 1$ rezultă că polii îndepărtați, p_ν, au o influență neglijabilă asupra coeficienților A_μ.

În ceea ce priveşte influența zerourilor z_i, $i = \overline{1,m}$, din (7.52) rezultă că acestea sunt prezente numai în coeficienții A_k, $k = \overline{1,n}$.

Pentru zerourile îndepărtate, notate generic z_β , pentru care: $|z_\beta| >> |p_\mu|$, $|z_\beta| >> |z_\alpha|$, (z_α ca notație generică, reprezintă zerourile dominante) are loc evaluarea: $|1 - p_\mu/z_\beta| \cong 1$, ceea ce înseamnă că zerourile îndepărtate au un efect neglijabil asupra coeficienților A_μ.

Fie α_0 numărul de zerouri dominante şi μ_0 numărul de poli dominanți ai lui $G(s)$. În aceste circumstanțe răspunsul indicial (7.52) poate fi aproximat prin:

$$\tilde{h}(t) = \bar{h}\left[1-\left(\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\prod_1^{\alpha_0}(1-p_\mu/z_\alpha)\Big/\prod_{1\atop \mu'\neq\mu}^{\mu_0}(1-p_\mu/p_{\mu'})\right)e^{p_\mu t}\right]\sigma(t), \tag{7.53}$$

cu condiția ca eroarea de aproximare $[h(t)-\tilde{h}(t)]/h(t)$ să aibă valori admisibile. În acest caz funcția de transfer bazată exclusiv pe polii şi zerourile dominante se determină cu:

$$\tilde{G}(s) = s\mathcal{L}\{\tilde{h}(t)\}. \tag{7.54}$$

7.5. Configuraţii cu doi poli dominanţi

Situaţiile în care se pot pune în evidenţă sau se pot realiza în mod deliberat configuraţii cu doi poli dominanţi sunt foarte frecvente.

În acest caz, după cum se ştie de la 7.2.c, se scrie:

$$G(s) \cong \tilde{G}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{7.55}$$

în care:

$$p_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad 0<\zeta<1 \tag{7.56}$$

sunt polii dominanţi. Se au în vedere numai valori $\zeta\in(0,1)$ deoarece, după cum se ştie de la 7.2.c, τ_s (durata adimensională a regimului tranzitoriu) are un minimum pentru $\zeta = 0{,}707$.

În mod obişnuit, pentru un sistem dat, se precizează valorile *admisibile* σ_a, t_{sa} şi t_{ca} ale indicilor de calitate. Se înţelege că valorile curente ale indicilor de calitate trebuie să satisfacă inegalităţile:

$\sigma \le \sigma_a$ (7.57), $t_s \le t_{sa}$ (7.58), $t_c \le t_{ca}$ (7.59).

Fireşte că satisfacerea inegalităţilor (7.57) - (7.59) este posibilă numai dacă polii dominanţi (7.56) sunt localizaţi adecvat în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

$$\zeta \ge \zeta_a = \left|\ln\sigma_a\right| \Big/ \sqrt{\pi^2 + \ln^2\sigma_a}, \tag{7.60}$$

în care ζ_a este valoarea admisibilă a lui ζ.

Pentru a vedea semnificaţia lui ζ din punctul de vedere al localizării polilor dominanţi (7.56) se introduce un nou parametru prin:

$$\cos\psi = \zeta, \quad 0<\psi<\pi/2, \tag{7.61}$$

în care $\pm\psi$ sunt unghiurile pe care le fac respectiv fazorii $p_{1,2}$ faţă de axa reală negativă a planului complex. În acest context, din (7.60) şi (7.61) rezultă:

$$\zeta = \cos\psi \ge \left|\ln\sigma_a\right| \Big/ \sqrt{\pi^2 + \ln^2\sigma_a} = \cos\psi_a = \zeta_a, \tag{7.62}$$

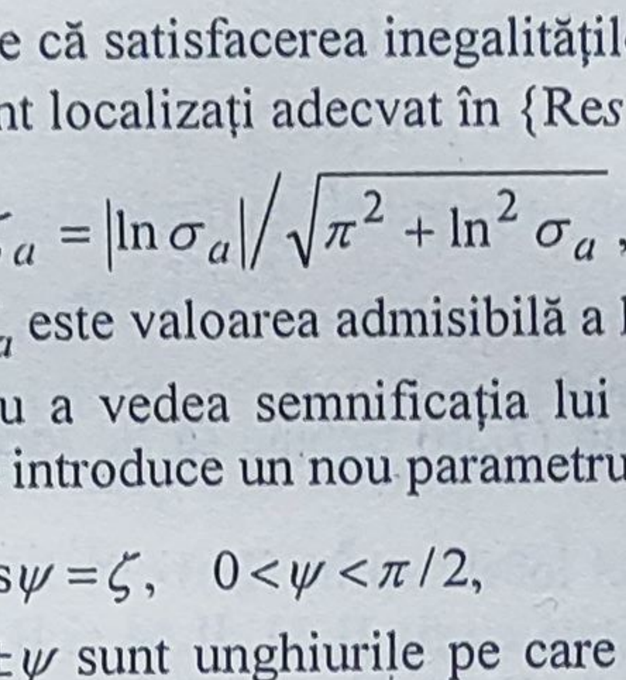


Fig.II.53. Localizarea polilor dominanţi $p_{1,2}$ pentru satisfacerea condiţiei $\sigma \le \sigma_a$

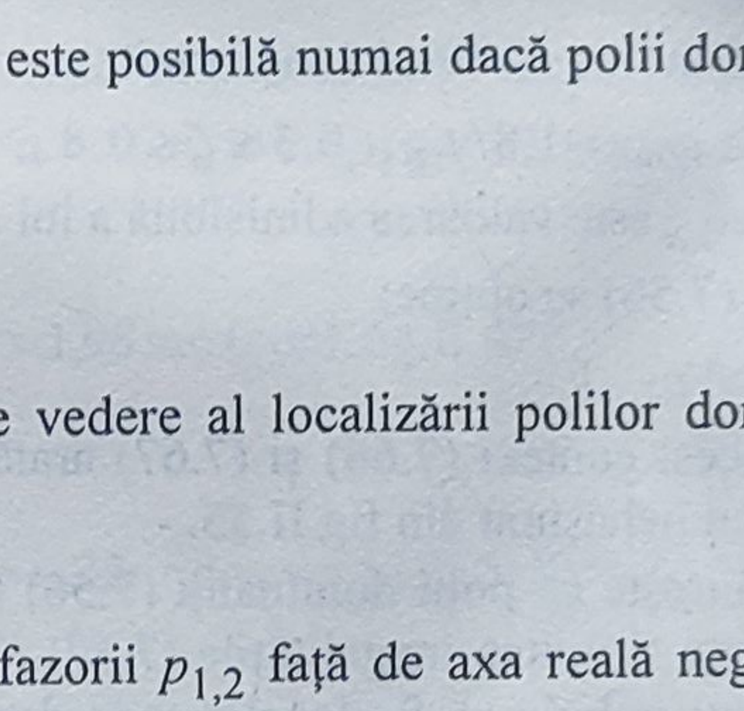


Fig.II.54 Localizarea polilor dominanţi $p_{1,2}$ pentru satisfacerea condiţiei $t_s \le t_{sa}$

ceea ce implică:

$$\psi \le \psi_a, \tag{7.63}$$

în care ψ_a este valoarea admisibilă a lui ψ.

Inegalitatea (7.63), care este echivalentă cu (7.57), precizează faptul că polii dominanți (7.56) trebuie să fie localizați în sectorul unghiular AOB (nehașurat în fig.II.53, $s \neq 0$).

2°. Condiția (7.58), în conformitate cu (7.30) şi (7.31) respectiv (7.32) conduce la următoarele două inegalități:

$$(\omega_n\zeta) \ge (\omega_n\zeta)_a = 3/t_{sa}, 0 < \zeta \le 0{,}707, \tag{7.64}$$

$$(\omega_n\zeta) \ge (\omega_n\zeta)_a = 6\zeta^2/t_{sa}, 0{,}707 < \zeta < 1, \tag{7.65}$$

în care $(\omega_n\zeta)_a$ este valoarea admisibilă a produsului $(\omega_n\zeta)$. Acest produs, existent în polii dominanți (a se vedea (7.56)), în conformitate cu 6.6, este de fapt gradul de stabilitate α şi $(\omega_n\zeta)_a$, având în vedere şi (6.18), (7.64), (7.65), este rezerva de stabilitate $\alpha_{\min}$. Ținând seama de fig.II.39, rezultă că polii dominanți (7.56) trebuie să fie localizați în domeniul nehaşurat din fig.II.54.

3°. Condiția (7.59), în conformitate cu (7.33), conduce la inegalitatea:

$$\omega_n \ge \omega_{na} = 1{,}8/t_{ca}, \quad 0{,}3 \le \zeta \le 0{,}8, \tag{7.66}$$

în care ω_{na} este valoarea admisibilă a lui ω_n.

Din (7.56) se obține:

$$\omega_n = |p_{1,2}|. \tag{7.67}$$

În acest context (7.66) şi (7.67) arată că polii dominanți (7.56) trebuie să fie localizați în domeniul nehaşurat din fig.II.55.

4°. Fireşte că polii dominanți (7.56) trebuie să fie astfel localizați în {Res<0} încât să fie satisfăcute simultan inegalitățile (7.57)-(7.59). În conformitate cu fig.II.53, II.54 şi II.55, polii dominanți trebuie să fie localizați în domeniul nehaşurat din fig.II.56. Localizarea efectivă a polilor $p_{1,2}$ trebuie să se facă în apropierea frontierei respectivului domeniu, deoarece în caz contrar $p_{1,2}$ îşi pot pierde caracterul dominant (față de polii îndepărtați care nu au fost luați în considerare în $\tilde{G}(s)$ - relația (7.55)).

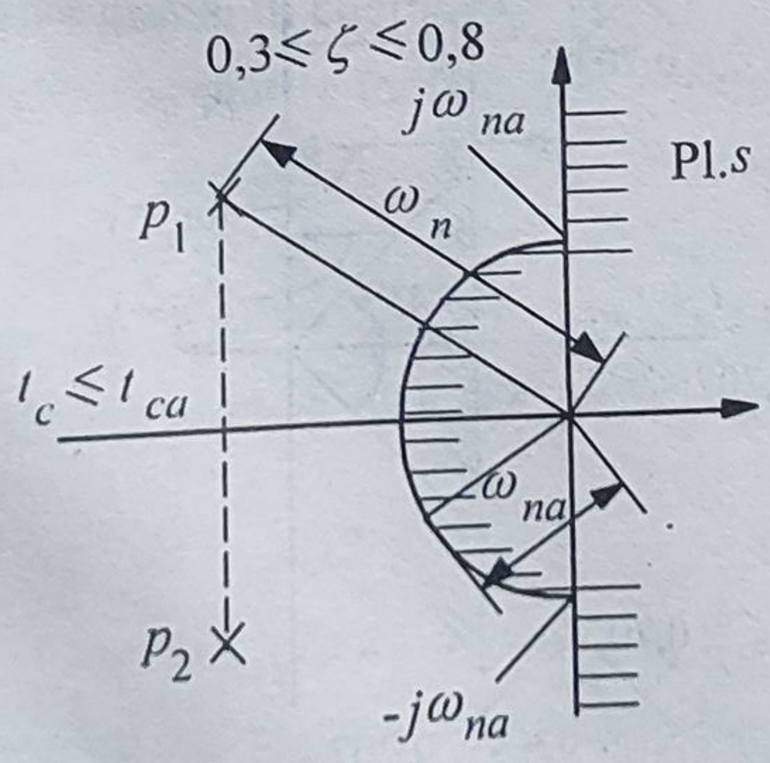


Fig.II.55. Localizarea polilor dominanți $p_{1,2}$ pentru satisfacerea condiției $t_c \le t_{ca}$

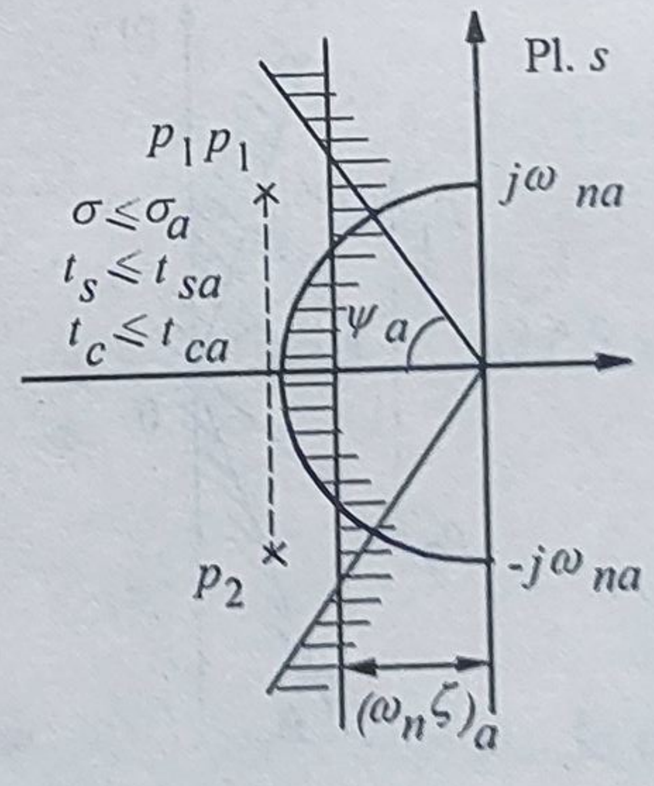


Fig.II.56. Localizarea polilor dominanți $p_{1,2}$ pentru satisfacerea condițiilor $\sigma \le \sigma_a$, $t_s \le t_{sa}$ şi $t_c \le t_{ca}$

Exemplul 7.8

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.II.57. Se cere să se aleagă parametrii k şi a astfel încât $\sigma_a = 0{,}05$, $t_{sa} = 3$ sec. şi $t_{ca} = 1{,}5$ sec.

Pe baza relaţiilor (7.62), (7.63), (7.65) şi (7.66) rezultă:

$$\zeta = \cos\psi \geq \cos\psi_a = |\ln 0{,}05| \sqrt{(3{,}14)^2 + \ln^2 0{,}05} = 0{,}69; \quad \psi \leq \psi_a = 46°;$$

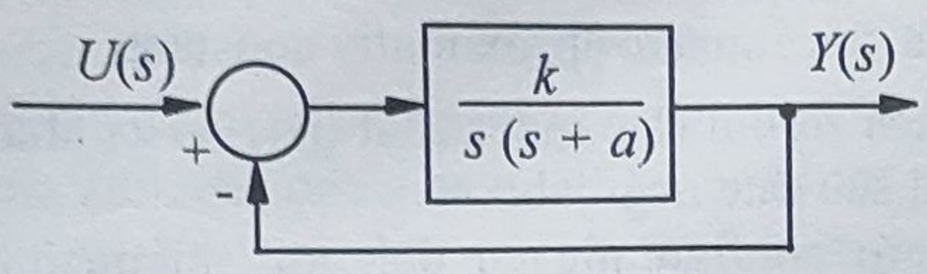


Fig.II.57. Sistemul automat de la exemplul 7.8

$$\begin{cases} (\omega_n\zeta) \geq (\omega_n\zeta)_a = 3/3 = 1; & 0 < \zeta \leq 0{,}707, \\ (\omega_n\zeta) \geq (\omega_n\zeta)_a = 2\zeta^2, & 0{,}707 < \zeta < 1 \end{cases}$$
$$\omega_n \geq \omega_{na} = 1{,}8/1{,}5 = 1{,}2, \qquad 0{,}3 \leq \zeta \leq 0{,}8.$$

Funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k}{s^2 + as + k} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad \omega_n = \sqrt{k}, \ \zeta = a/2\sqrt{k}, \ K = 1.$$

Există o infinitate de soluţii în ceea ce priveşte localizarea polilor dominanţi:

De exemplu: $\zeta = 0{,}707$, $\omega_n = 1{,}41$; $k = \omega_n^2 = 2$, $a = 2\zeta\omega_n = 2$; $p_{1,2} = -1 \pm j$.

Valorile efective ale indicilor de calitate sunt:

$\sigma = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}043$; $t_s = \tau_s/\omega_n = 2{,}8/1{,}41 = 1{,}98$ sec.(conf.fig.II.47);

$t_c = 1{,}8/\omega_n = 1{,}8/1{,}41 = 1{,}28$sec.

Se pot adopta de asemenea:

$\zeta = 0{,}75$, $\omega_n = 1{,}5$; $k = \omega_n^2 = 2{,}25$, $a = 2\zeta\omega_n = 2{,}25$; $p_{1,2} = -1{,}125 \pm j0{,}992$.

Valorile efective ale indicilor de calitate sunt:

$\sigma = 0{,}028$, $t_s = 3/1{,}5 = 2$ sec(conf.fig.II.47), $t_c = 1{,}8/1{,}5 = 1{,}2$ sec. ■

7.6. Efectul unui zero suplimentar

În cazul unei configuraţii cu doi poli dominanţi introducerea unui zero suplimentar are ca efect numai modificarea coeficienţilor exponenţialelor asociate polilor dominanţi, existente în $h(t)$.

Exemplul 7.9

Se consideră sistemul descris de funcţia de transfer: $G(s) = 2/[(s+1)(s+2)]$. Se introduce un zero suplimentar, $s = -z$, astfel că funcţia de transfer a sistemului devine: $G_1(s) = \frac{1}{z}\frac{2(s+z)}{(s+1)(s+2)}$ în care coeficientul $1/z$, cu $z \neq 0$, din faţa fracţiei are menirea de a păstra neschimbată valoarea factorului de amplificare (respectiv are loc $\bar{h} = \bar{h}_1 = 1$). Se cere să se determine $h(t)$ şi $h_1(t)$ şi să se evalueze efectul zeroului suplimentar.

Cele două răspunsuri indiciale au expresiile:

$$h(t) = (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\sigma(t), \quad h_1(t) = \left[1 - 2\left(1 - \frac{1}{z}\right)e^{-t} + \left(1 - \frac{2}{z}\right)e^{-2t}\right]\sigma(t).$$

Este uşor de observat că: $h_1(t) = h(t) + \dot{h}(t)/z$.

În această situaţie, pentru $z > 0$ este de aşteptat să apară o suprareglare în $h_1(t)$, deşi $h(t)$ are suprareglarea nulă - fig.II.58 ($z^{-1} = 1{,}5$); t_c se micşorează şi t_s rămâne aproximativ constant.

Pentru $z < 0$ (adică pentru un zero $s = -z > 0$, respectiv situat pe semiaxa reală pozitivă a planului complex) $h_1(t)$ are iniţial o evoluţie cu valori negative - fig.II.58 ($z^{-1} = -0{,}75$); t_c a crescut şi t_s rămâne aproximativ constant.

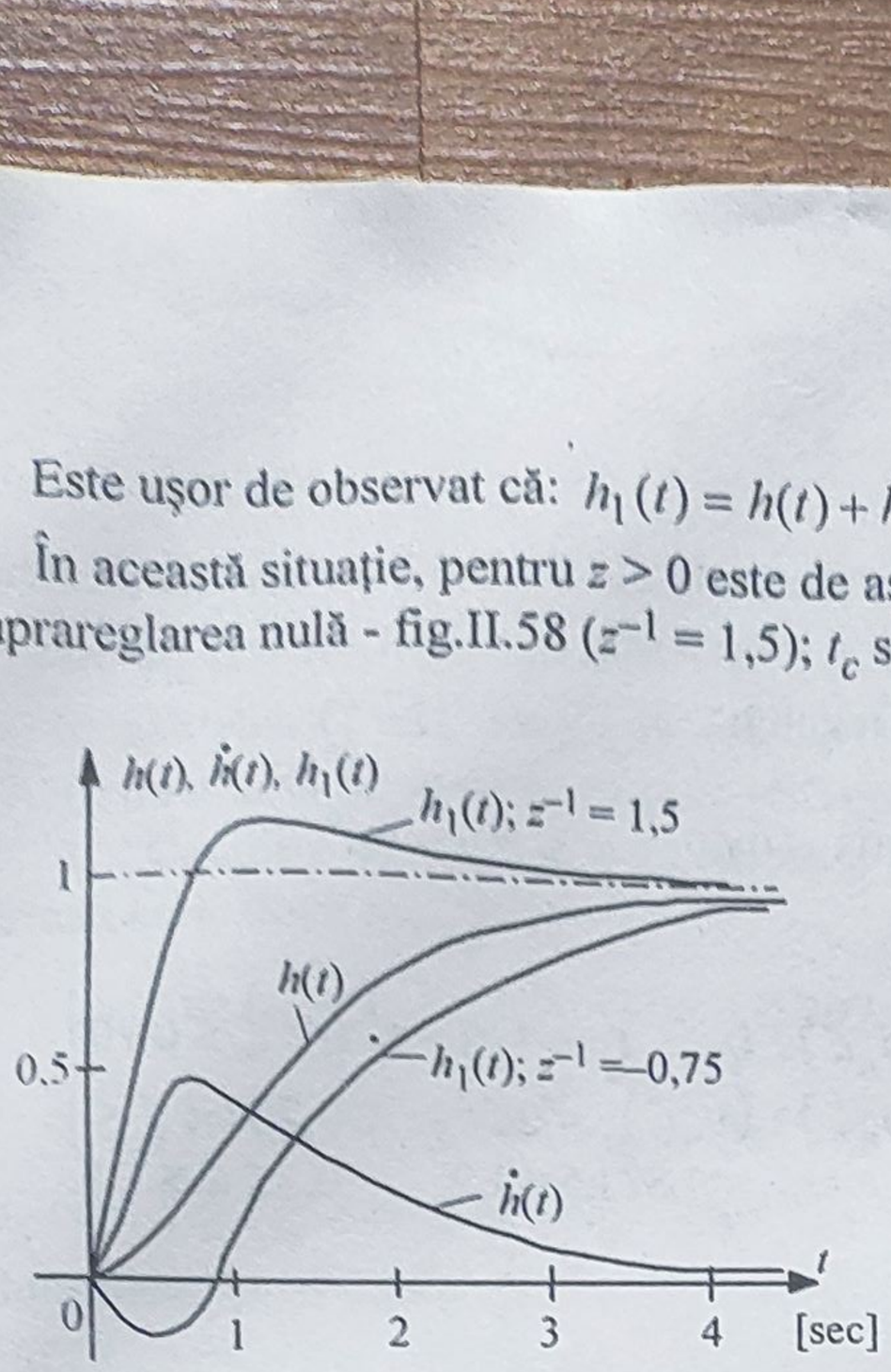


Fig.II.58. Răspunsurile indiciale la exemplul 7.9

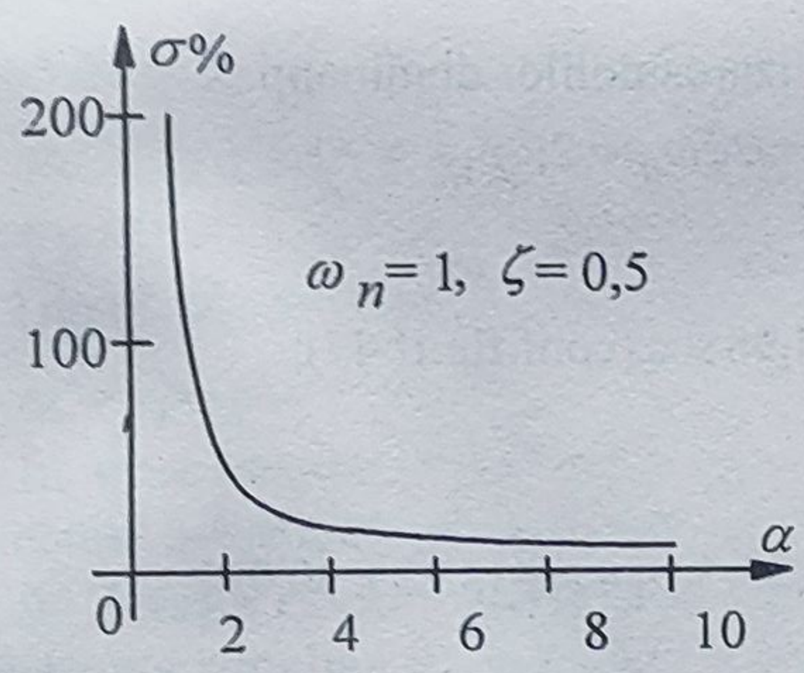


Fig.II.59. Dependenţa suprareglării σ% de poziţia α > 0 a zeroului suplimentar situat pe semiaxa reală negativă

Dacă zeroul este îndepărtat ($|z|)\to+\infty$, atunci efectul său este neglijabil.■

Fie o configuraţie cu doi poli dominanţi - funcţia de transfer $G(s)$, relaţia (7.55). Se introduce un zero suplimentar, $s=-\alpha\zeta\omega_n$, în care $-\zeta\omega_n$ este partea reală a polilor dominanţi şi $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ este un parametru în funcţie de valorile căruia se va evalua efectul zeroului suplimentar. Noua funcţie de transfer are expresia:

$$G_1(s) = \frac{K\omega_n}{\alpha\zeta}\,\frac{s+\alpha\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad (7.68)$$

în care coeficientul $K\omega_n/\alpha\zeta$ din faţa fracţiei are menirea de a păstra neschimbată valoarea de regim staţionar (adică $\overline{h} = \overline{h_1} = K$).

Din (7.55) şi (7.68) rezultă: $G_1(s)=G(s)+sG(s)/\alpha\zeta\omega_n$. Ca urmare, pentru răspunsurile indiciale se poate scrie relaţia: $h_1(t) = h(t) + \dot{h}(t)/\alpha\zeta\omega_n$.

Pentru $\alpha > 0$ zeroul suplimentar (situat pe semiaxa reală negativă), determină o creştere a suprareglării. De exemplu, pentru $\omega_n = 1$ şi $\zeta = 0{,}5$ relaţia dintre $\sigma\%$ şi α este reprezentată grafic în fig.II.59. Se observă că pentru $\alpha\in(0,4)$ (ceea ce înseamnă că zeroul suplimentar este dominant) suprareglarea $\sigma\%$ are o variaţie foarte mare. Pentru $\alpha\in[4,+\infty)$ (zeroul suplimentar este îndepărtat) suprareglarea $\sigma\%$ este aproximativ constantă. Investigaţii similare arată că zeroul suplimentar dominant poate asigura creşterea rapidităţii (micşorarea lui t_c); t_s rămâne aproximativ constant (fig.II.58).

Pentru $\alpha < 0$ (zeroul suplimentar este situat pe semiaxa reală pozitivă) se obţine $h_1(t) < 0$ în primele momente (a se vedea fig. II.58). O astfel de comportare este tipică pentru sistemele de defazaj neminim (a se vedea VI.3.3). În acest caz zeroul suplimentar poate avea ca efect o reducere a rapidităţii (creşterea lui t_c); t_s rămâne aproximativ constant (fig.II.58).

7.7. Efectul unui pol suplimentar

Fie o configuraţie cu doi poli dominanţi - funcţia de transfer $G(s)$, relaţia (7.55). Se introduce un pol suplimentar, $s=-\alpha\zeta\omega_n$, în care $-\zeta\omega_n$ este partea reală a polilor dominanţi (preexistenţi) şi $\alpha > 0$ este un parametru în funcţie de valorile căruia se va evalua efectul polului suplimentar. Noua funcţie de transfer are expresia:

$$G_1(s) = \frac{\alpha\zeta\omega_n}{s+\alpha\zeta\omega_n} \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \tag{7.69}$$

pentru care $\overline{h} = \overline{h}_1 = K$.

Din (7.55) şi (7.69) rezultă: $sG_1(s)+\alpha\zeta\omega_n G_1(s) = \alpha\zeta\omega_n G(s)$. Ca urmare, pentru răspunsurile indiciale se poate scrie: $\dot{h}_1(t)+\alpha\zeta\omega_n h_1(t) = \alpha\zeta\omega_n h(t)$. Din această relaţie rezultă că polul suplimentar (situat pe semiaxa reală negativă) poate avea ca efect o creştere a duratei regimului tranzitoriu t_s. De exemplu pentru $K = 1$ şi $\zeta = 0{,}5$ răspunsul indicial $h_1(t)$, pentru diverse valori $\alpha > 0$, este reprezentat în fig.II.60. Relaţia dintre $\tau_s = \omega_n t_s$ şi α este reprezentată grafic în fig.II.61. Se remarcă faptul că pentru $\alpha \in (0,4)$ (polul suplimentar este dominant) durata adimensională a regimului tranzitoriu, τ_s, are o variaţie foarte mare. Pentru $\alpha \in [4,+\infty)$ (polul suplimentar este îndepărtat) τ_s este aproximativ constant.

În încheiere trebuie remarcat că polul suplimentar poate determina reducerea suprareglării dar şi o reducere a rapidităţii (creşterea lui t_c), fig.II.60.

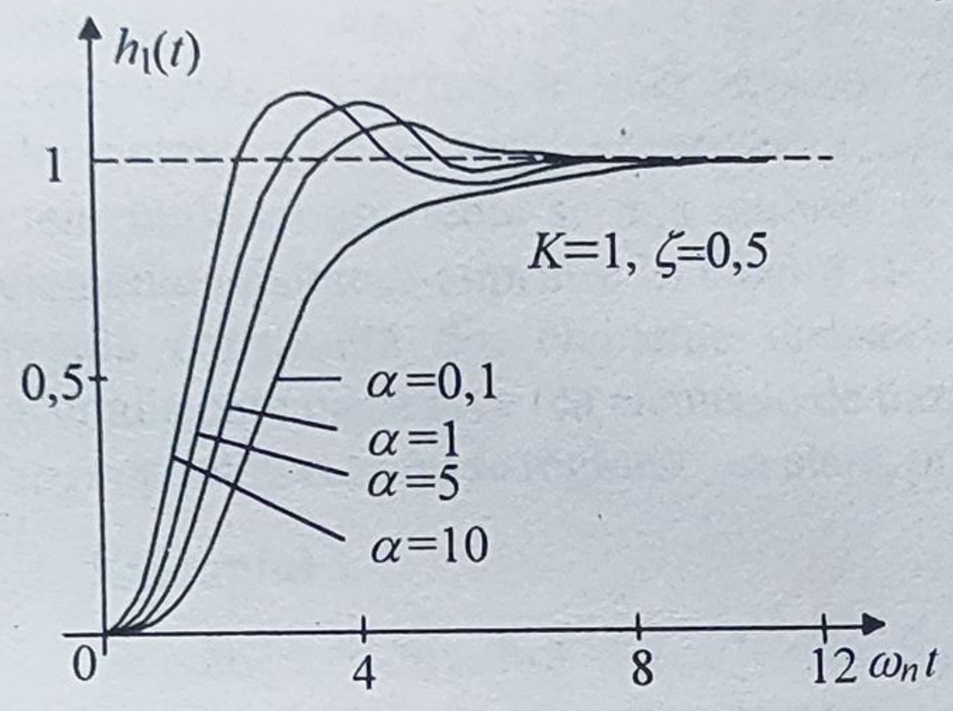


Fig.II.60. Răspunsul indicial al sistemului (7.69) pentru diverse poziţii $\alpha > 0$ ale polului suplimentar situat pe axa reală negativă

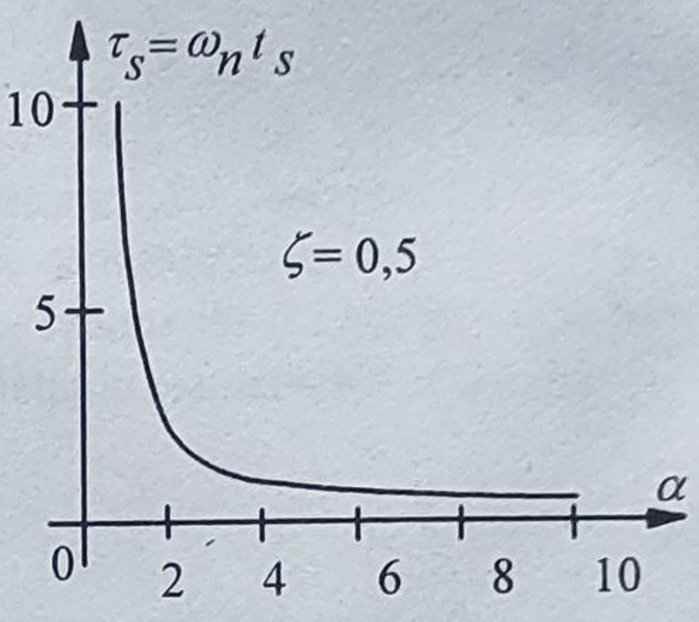


Fig.II.61. Dependenţa duratei adimensionale a regimului tranzitoriu τ_s de poziţia $\alpha > 0$ a polului suplimentar situat pe semiaxa reală negativă

7.8. Simbolizarea operatorială a sistemelor dinamice liniare

Prin utilizarea elementelor de transfer tipice descrise la 7.2, pe baza conexiunilor <<serie>>, <<paralel>> şi <<cu reacţie>>, se pot alcătui structuri având funcţii de transfer oricât de complicate. Din acest motiv şi pentru că elementele de transfer tipice pun în evidenţă cele mai simple operaţii de transfer intrare - ieşire, simbolurile P, I, D şi T se utilizează în combinaţii şi cu indici adecvaţi pentru caracterizarea operatorială a oricărui sistem dinamic liniar atunci când se cunoaşte funcţia lui de transfer.

Pentru atribuirea corectă a simbolurilor operatoriale se procedează astfel:

- Se fac toate simplificările factorilor comuni de la numărătorul şi numitorul lui $G(s)$.
- Dacă $G(s)$ are $\alpha \geq 0$ poli în origine, se scoate în factor la numitor s^α.
- Se împart toţi termenii de la numărătorul lui $G(s)$, unul câte unul, la s^α.
- Expresia de la numărător se simbolizează prin P, I şi D, după caz (cu indicii p şi q pentru I şi respectiv D pentru a simboliza ordinul maxim al operaţiilor corespunzătoare), considerând termenii ca funcţii de transfer ale unor elemente conectate în paralel.
- Inversul polinomului de la numitorul lui $G(s)$ este funcţia de transfer a unui element de tipul T (cu indice r pentru a simboliza ordinul maxim al operaţiei corespunzătoare) conectat în serie cu grupul elementelor asociate numărătorului.
- Simbolul operatorial are forma $PI_pD_qT_r$.

Exemplul 7.10

Se consideră funcţia de transfer: $G(s)=\dfrac{b_4s^4+b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2}$ şi se cere să se facă simbolizarea operatorială.

În ipoteza că nu există factori comuni între polinoamele de la numărătorul şi numitorul lui $G(s)$, se prelucrează $G(s)$ după cum urmează:

$$G(s)=\frac{b_4s^4+b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2(a_5s^3+a_4s^2+a_3s+a_2)}=\left(\underbrace{b_2}_{P}+\underbrace{\frac{b_1}{s}+\frac{b_0}{s^2}}_{I_2}+\underbrace{b_3s+b_4s^2}_{D_2}\right)\underbrace{\frac{1}{a_5s^3+a_4s^2+a_3s+a_2}}_{T_3}$$

Simbolul căutat este: $PI_2D_2T_3$.■

PROPRIETĂȚILE SISTEMELOR AUTOMATE

Capitolul III

1. Clasificarea sistemelor dinamice după structură

Structurabilitatea, ca proprietate a sistemelor dinamice, a fost evidențiată în mod implicit în capitolul precedent cu prilejul introducerii noțiunii de schemă bloc structurală (subcap.II.2). În continuarea acelei abordări, prin *structură fundamentală* se înțelege o reuniune structurată de elemente ale cărei proprietăți nu se regăsesc, ca atare, printre proprietățile elementelor componente. Proprietățile unei structuri fundamentale aparțin în primul rând relaţiilor dintre elementele componente, respectiv reuniunii structurate a elementelor. În acest context elementele componente se mai numesc şi *elemente de bază*. Dacă avem în vedere tipurile de elemente (sisteme) cuprinse în tabelul II.2 se poate afirma că o structură fundamentală este de regulă constituită din elemente disipative, elemente acumulatoare inductive şi/sau elemente acumulatoare capacitive (ca elemente de bază), deoarece reuniunile structurate ale acestor elemente au proprietăți care nu se regăsesc, ca atare, printre proprietățile elementelor componente.

Exemplul 1.1 .

Se consideră circuitul <<*L*, *C*>> din fig.III.1.

Se cere să se arate că acesta formează o structură fundamentală.

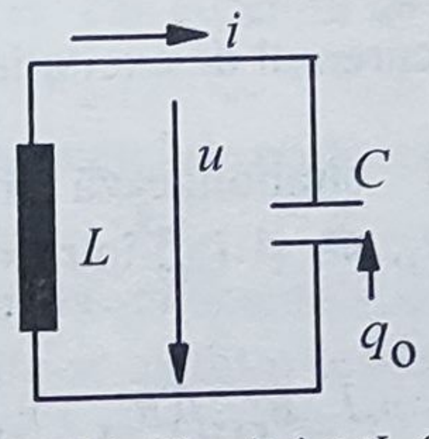


Fig.III.1. Circuitul <<*L*, *C*>> de la exemplul 1.1

Într-adevăr, conform fig.III.1 şi tabelului II.2, se pot scrie ecuațiile:

$$L\frac{di}{dt} = -u, i(0) = 0, C\frac{du}{dt} = i, u(0) = u_0 = \frac{q_0}{C},$$

din care, cu notația $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$, rezultă:

$$d^2u/dt^2 + \omega_n^2 u = 0, \quad u(0) = q_0/C, \quad u'(0) = i(0)/C = 0.$$

Soluția acestei ecuații diferențiale (cu condițiile inițale precizate) este: $u(t) = q_0 \cos\omega_n t/C$, $t \geq 0$.

Ca urmare, circuitul <<*L*, *C*>> este oscilant, acesta fiind proprietatea sa definitorie. Este lesne de observat că această proprietate nu se găseşte printre acelea ale elementelor <<*L*>> sau <<*C*>> luate separat. ■

S-a arătat la I.3 că o relație de tip special existentă în structurile sistemelor dinamice este reacția (pozitivă sau negativă). Neluând în considerare prezența operatorului uman, din punctul de vedere al inexistenței sau existenței reacției se disting sisteme dinamice a căror structură este: *deschisă* sau *închisă*.

1.1. Sisteme cu structură deschisă

Acestea sunt reuniuni de elemente cuplate funcțional astfel încât mărimea de intrare a oricărui element component nu este determinată, direct sau indirect, de mărimea de ieşire a respectivului element. Cu alte cuvinte structurile deschise nu conțin conexiuni <<cu reacție>>.

O structură deschisă este constituită numai din conexiuni <<serie>> şi/sau <<paralel>>. O structură fundamentală deschisă minimală este formată din două elemente conectate în serie (fig.III.2), a căror funcţionalitate este definită prin următoarele:

- *Subsistemul principal*, S_1, realizează dependenţa mărimii de ieşire y de mărimea de comandă m; în cazul sistemelor tehnice, S_1 este o instalaţie tehnologică.
- *Subsistemul de comandă*, S_2, realizează dependenţa mărimii de intrare / ieşire m (în S_1/din S_2) de mărimea de intrare u; se spune că S_1 este comandat de S_2 şi sistemul în ansamblu se numeşte *sistem de comandă.*

De regulă S_1 este dat şi se doreşte realizarea unui anumit transfer $u \to y$. Pentru realizarea lui efectivă se adaugă S_2, creat special, astfel încât sistemul în ansamblu să materializeze transferul $u \to y$. Aici trebuie să se ţină seama de faptul că (în special) asupra subsistemului S_1 acţionează perturbaţia w care tinde să modifice transferul $u \to y$. Ca urmare, mărimea u trebuie modificată (de exemplu de către un operator uman) astfel încât să se diminueze (în măsura posibilului) efectul lui w asupra lui y.

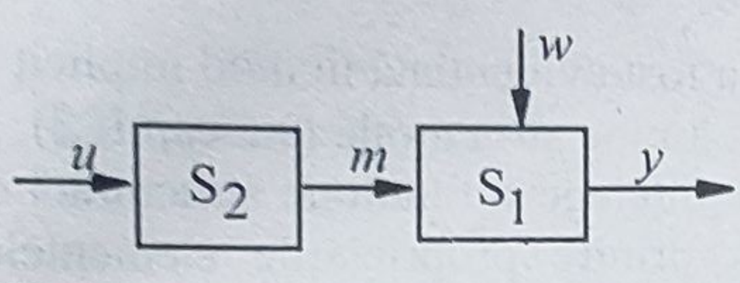


Fig.III.2. Structură fundamentală desçhisă minimală

Exemplul 1.2

Ca sistem cu structură deschisă se consideră şi se analizează generatorul electric de c.c. a cărui schemă este prezentată în fig.III.3. În conformitate cu notaţiile din figură, pentru regimul staţionar, se pot scrie următoarele relaţii:

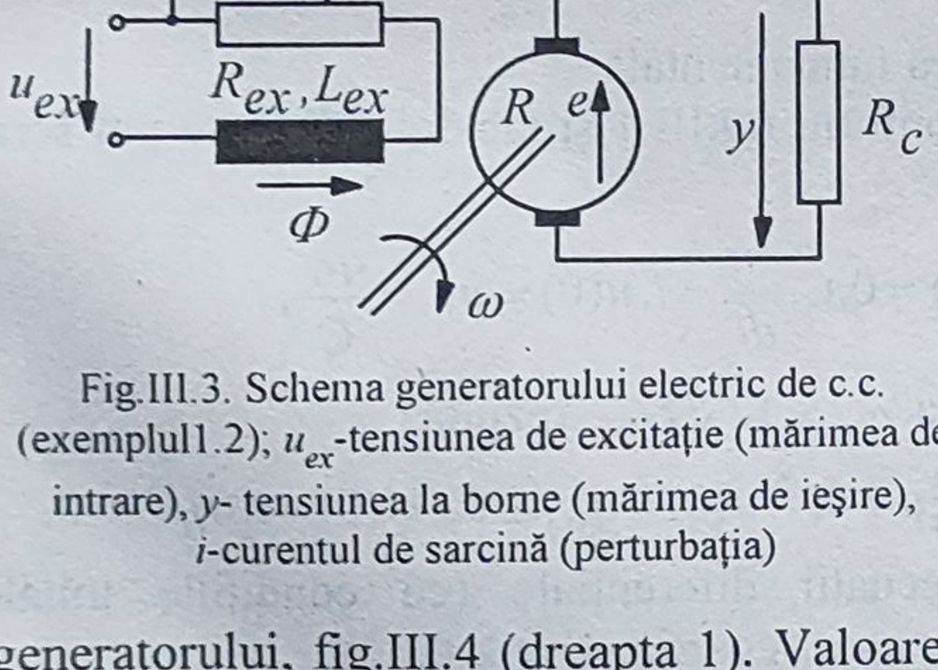


Fig.III.3. Schema generatorului electric de c.c. (exemplul1.2); u_{ex}-tensiunea de excitaţie (mărimea de intrare), y- tensiunea la borne (mărimea de ieşire), i-curentul de sarcină (perturbaţia)

$$y_s = e_s - Ri_s \qquad \text{(circuitul indusului) } (a_1)$$

$$e_s = k\omega_s \Phi_s \quad \text{(tensiunea electromotoare) } (a_2)$$

$$\Phi_s = L_{ex} i_{exs} \qquad \text{(fluxul de excitaţie) } (a_3)$$

$$i_{exs} = \frac{u_{exs}}{R_{ex} + r_{ex}} \quad \text{(curentul de excitaţie), } (a_4)$$

în care indicele s simbolizează regimul staţionar. Eliminând e_s, Φ_s şi i_{exs} între relaţiile (a_1) - (a_4) rezultă:

$$y_s = y_0 - Ri_s,\ y_0 = k\omega_s L_{ex} u_{exs} / (R_{ex} + r_{ex}). \ (a_5)$$

Relaţia (a_5) este caracteristica statică a generatorului, fig.III.4 (dreapta 1). Valoarea lui y_0 - tensiunea de <<mers în gol>> - poate fi modificată prin variaţia tensiunii de excitaţie u_{exs} sau a rezistenţei r_{ex}. În acest fel caracteristica statică se poate deplasa pe verticală (paralel cu ea însăşi) în scopul compensării efectului curentului de sarcină i_s (perturbaţia) asupra tensiunii la borne y_s (fig. III.4, caracteristicile 2 şi 3).

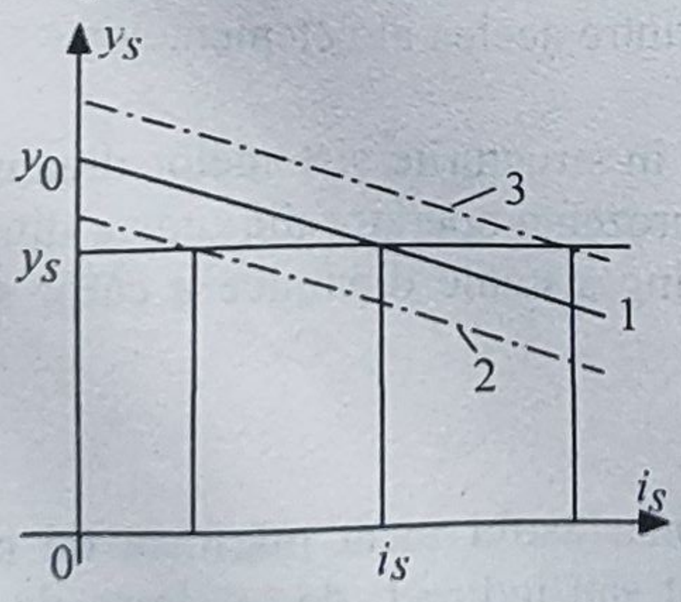


Fig.III.4. Caracteristica statică a generatorului electric de c.c. (exemplul 1.2)

Sistemul prezentat are structura deschisă. Subsistemul S_1 este format de generator, iar subsistemul S_2 este fie o sursă de tensiune externă (u_{exs} variabilă şi r_{ex} fixă), fie reostatul r_{ex} (r_{ex} variabilă şi u_{exs} fixă).■

Pentru diminuarea, eliminarea sau întărirea efectului perturbaţiei w asupra mărimii de ieşire

y se poate introduce un subsistem S_3 (fig.III.5) prin care se realizează o dependență suplimentară adecvată a mărimii de comandă m de perturbația w. (Soluția clasică în acest sens constă în introducerea, prin S_3, aditiv sau substractiv, a efectului lui w asupra lui m, așa cum se arată în fig.III.5). Se obține astfel un sistem de comandă care funcționează pe *principiul compensației* (Poncelet). Se remarcă faptul că sistemul obținut are în continuare o structură deschisă.

Exemplul 1.3

În cazul generatorului electric de c.c. (fig.III.3) soluția de aplicare a principiului compensației constă în introducerea unui electromagnet (fig.III.6, bobina 1, piesa feromagnetică mobilă 2 şi resortul antagonist 3) care acționează cursorul reostatului (fig.III.6, reostatul 4 şi tija 5).

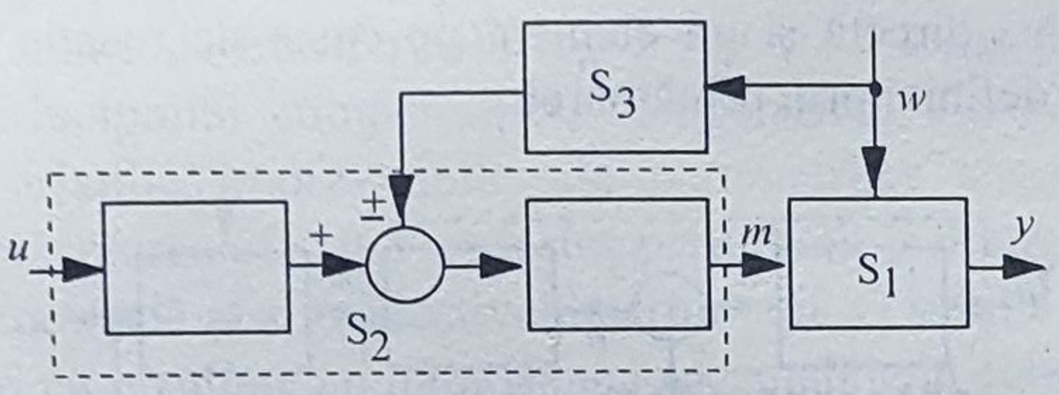


Fig.III.5. Structura fundamentală deschisă în care se aplică principiul compensației

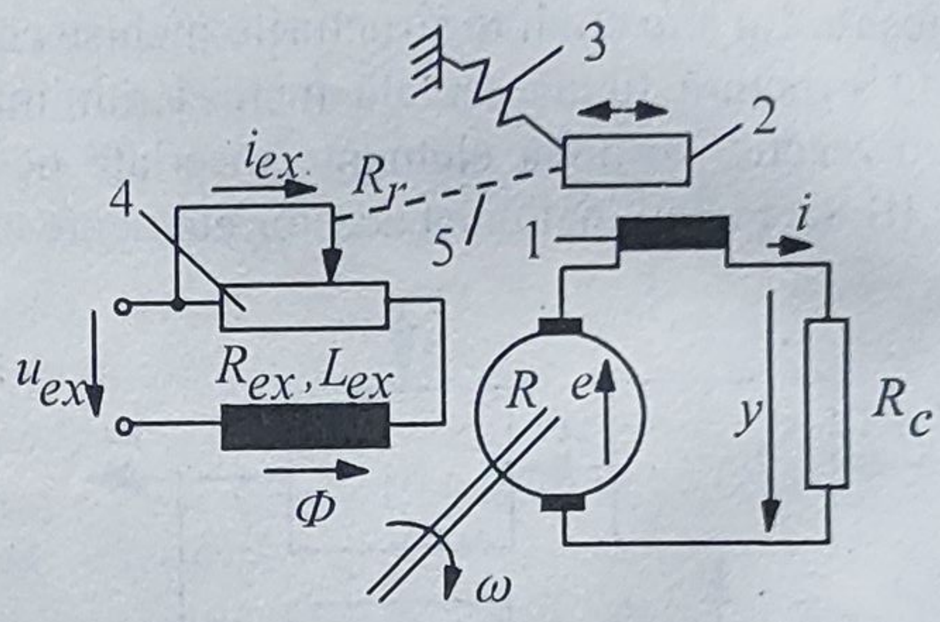


Fig.III.6. Schema generatorului electric de c.c. cu aplicarea principiului compensației (exemplul 1.3)

Bobina electromagnetului este conectată în serie cu indusul şi cu rezistența de sarcină.

În acest caz curentul de excitație în regim staționar este:

$$i_{exs} = u_{exs} / (R_{ex} + R_r), \qquad (b_1)$$

în care reostatul de reglare este descris de ecuația:

$$R_r = r_{ex} - k_r i_s, \qquad (b_2)$$

deoarece la creşterea/scăderea curentului i_s piesa 2 se deplasează spre dreapta/stânga realizându-se astfel o scădere/creştere a lui R_r; variația lui R_r este proporțională şi de sens opus aceleia a lui i_s.

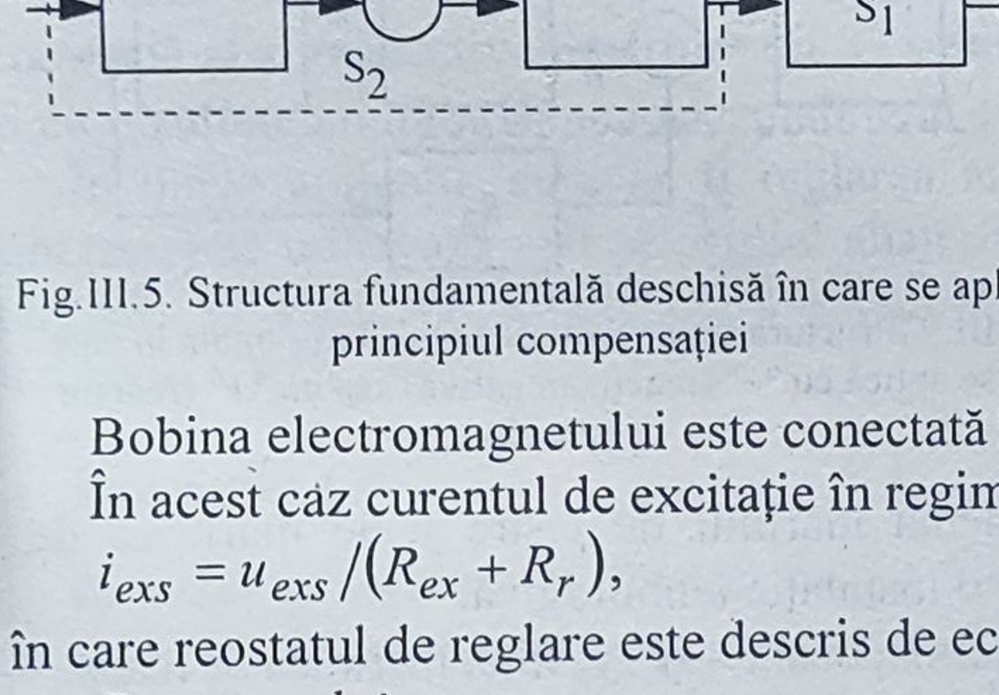


Fig.III.7. Caracteristica statică a generatorului electric de c.c. după aplicarea principiului compensației (exemplul 1.3)

Ca urmare, eliminând e_s, ϕ_s, i_{exs} şi R_r între ecuațiile (a_1)-(a_3), (b_1) şi (b_2) se obține caracteristica statică:

$$y_s = y_0 (R_{ex} + r_{ex}) / (R_{ex} + r_{ex} - k_r i_s) - Ri_s. \qquad (b_3)$$

Se observă că primul termen din membrul doi depinde de curentul de sarcină i_s. De exemplu, la creşterea/scăderea lui i_s acest termen creşte/scade de asemenea. Această creştere/scădere poate compensa (mai mult sau mai puțin) creşterea/scăderea termenului Ri_s (ecuația (b_3), membrul doi). În acest fel y_s poate fi menținut aproximativ constant într-o vecinătate a unui punct de funcționare dat, fig.III.7.

Trebuie subliniat că raţionamentul de mai sus se bazează pe ipoteza că R = constant, ceea ce nu are loc în general. Într-adevăr, R (rezistenţa indusului) depinde de temperatură care poate varia între limite largi. Orice variaţie a lui R produce o variaţie a lui Ri_s (în ecuaţia (b_3)). Simpla compensare după perturbaţia i_s nu mai are acum nici un efect deoarece de această dată variaţia lui Ri_s se datorează lui R şi nu lui i_s. Pentru a realiza o compensare a efectului variaţiei lui R ar fi necesară măsurarea lui R şi materializarea unei relaţii între i_{exs} şi R. Aplicarea consecventă a principiului compensaţiei ar conduce la soluţii similare pentru ω (viteza unghiulară a rotorului) etc, ceea ce, practic poate fi prea complicat.■

1.2. Sisteme cu structură inchisă

Acestea sunt reuniuni de elemente cuplate funcţional astfel încât cel puţin în cazul unui element component mărimea sa de intrare este determinată, direct sau indirect, de mărimea sa de ieşire. Cu alte cuvinte structurile închise conţin conexiuni <<cu reacţie>>.

O structură fundamentală închisă minimală este formată din trei elemente în conexiune <<cu reacţie>>: două elemente înseriate pe calea directă şi un element pe calea de reacţie (fig.III.8). Funcţionalitatea acestor elemente este definită prin următoarele:

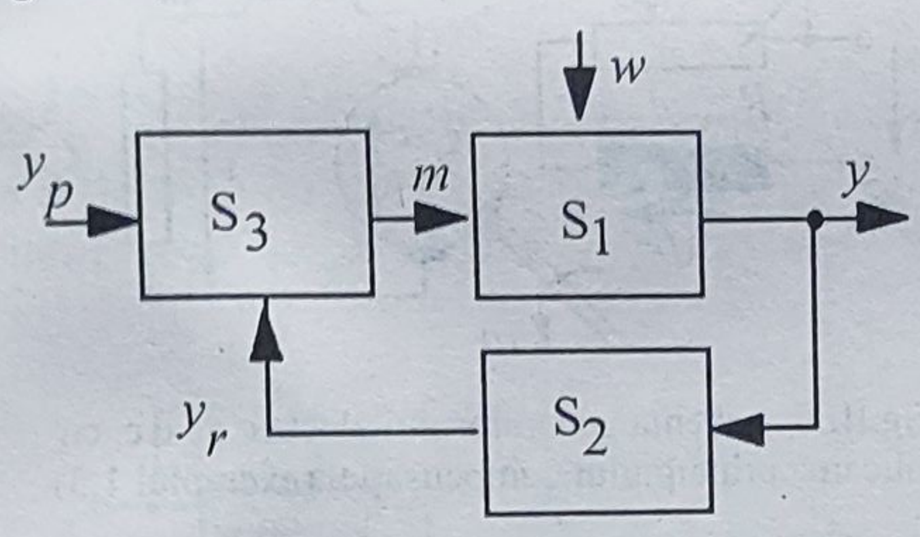


Fig.III.8. Structură fundamentală închisă minimală

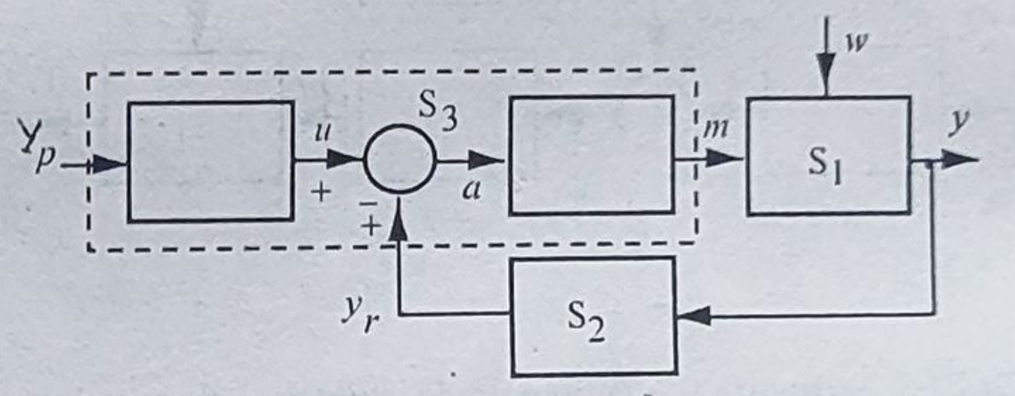


Fig.III.9.Structura fundamentală închisă minimală în care y_r se aplică cu "–" (reacţia negativă) sau cu "+" (reacţia pozitivă)

- *Subsistemul principal*, S_1, realizează dependenţa mărimii de ieşire y de mărimea de comandă m; în cazul sistemelor tehnice S_1 este o instalaţie tehnologică.
- *Subsistemul de reacţie*, S_2, realizează transferul informaţional $y \rightarrow y_r$, y_r fiind mărimea de reacţie.
- *Subsistemul decizional*, S_3, elaborează o decizie privind evoluţia mărimii de comandă m pe baza mărimilor de intrare y_p şi de reacţie y_r în conformitate cu un anumit algoritm. Transferul $(y_p, y_r) \rightarrow m$ trebuie să asigure realizarea unui anumit transfer $y_p \rightarrow y$ în condiţiile în care acesta este perturbat de w.

Se observă că m depinde de ambele mărimi de intrare: y_p şi w. Efectiv orice variaţie a lui y, indiferent de cauza care a provocat-o (în speţă y_p şi/sau w, variaţii ale parametrilor sistemului sau cauze care din varii motive nu sunt cuprinse în modelul matematic, dar care sunt prezente în sistemul real) are ca urmare, prin S_2 şi S_3, o modificare a lui m şi implicit a lui y.

Efectul variaţiei lui y asupra lui însuşi poate fi de semn contrar (reacţie negativă) sau de acelaşi semn (reacţie pozitivă) cu al respectivei variaţii.

Un caz particular uzual este acela în care S_3 realizează transferul $a \rightarrow m$, cu $a = u \mp y_r$ şi $y_p \rightarrow u$, fig.III.9. Semnul "–" defineşte reacţia negativă, iar semnul " + " defineşte reacţia pozitivă.

1° Reacţia negativă

În cazul sistemelor automate, atunci când y variază într-un sens, S_3 determină prin m o variaţie de sens contrar a lui y. Evident, în această situaţie sistemul este înzestrat cu o reacţie negativă. Variaţia de sens contrar a lui y trebuie să fie bine dozată ca valoare şi viteză astfel încât să se evite amorsarea unor oscilaţii neamortizate sau prea slab amortizate, respectiv să se

asigure transferuri $y_p \rightarrow y$ şi $w \rightarrow y$ de calitate acceptabilă (de exemplu caracterizabile prin indicii de calitate definiţi pe baza răspunsului indicial; a se vedea II.7.1).

Pentru $a = u - y_r$ (fig.III.9) sistemul conţine o conexiune cu reacţie negativă. Mărimea a se numeşte abaterea dintre u (de regulă proporţional cu y_p) şi y_r (de regulă proporţional cu y). Se spune că sistemul automat lucrează pe *principiul abaterii* (sau principiul Watt) deoarece orice variaţie a lui y, indiferent de cauza care a provocat-o, este urmată întotdeauna, datorită reacţiei negative, de o acţiune a întregului sistem în sensul diminuării sau chiar anulării abaterii a. Se poate spune că însăşi existenţa unei variaţii a abaterii (indiferent de cauza care a provocat-o) are ca efect evoluţia sistemului automat în sensul diminuării sau chiar a anulării ei.

Trebuie remarcat faptul că principiul abaterii poate asigura o comportare mai bună a sistemelor în comparaţie cu principiul compensaţiei. În cazul principiului abaterii se obţine o diminuare sau chiar anularea abaterii a, indiferent care este cauza care a produs variaţia lui a, prin simpla existenţă a reacţiei negative după mărimea de ieşire y şi a transferului $a \rightarrow m$ de formă adecvată. Implicit are loc şi o *stabilizare* a sistemului, respectiv se asigură anumite calităţi ale transferurilor $y_p \rightarrow y$ şi $w \rightarrow y$ din punctul de vedere al stabilităţii BIBO. În cazul principiului compensaţiei, compensarea efectului perturbaţiilor (este vorba de w dar şi de variaţiile imprevizibile ale parametrilor sistemului) asupra mărimii de ieşire y necesită măsurarea efectivă a acestor perturbaţii şi materializarea unei relaţii adecvate între mărimea de comandă m şi respectivele perturbaţii. O soluţie practică bazată pe această idee este complicată şi cu rezultate nu întotdeauna acceptabile în comparaţie cu soluţia aplicării principiului abaterii.

În unele aplicaţii, cum ar fi reglarea automată a tensiunii generatoarelor (de c.c. sau sincrone) se utilizează atât principiul abaterii cât şi principiul compensaţiei (după curentul de sarcină). O astfel de soluţie oferă o oarecare flexibilitate în stabilirea formei caracteristicii statice $y_s = f(i_s)$.

Exemplul 1.4

În cazul generatorului electric de c.c. (fig.III.3) soluţia de aplicare a principiului abaterii constă în introducerea unui electromagnet (fig.III.10, bobina 1, piesa feromagnetică mobilă 2 şi resortul antagonist 3) care acţionează cursorul unui reostat (fig.III.10, reostatul 4 şi tija 5). Bobina electromagnetului este conectată în paralel cu indusul şi cu rezistenţa de sarcină R_C. În acest caz curentul de excitaţie în regim staţionar este exprimat de relaţia (b_1) de la exemplul 1.3, în care reostatul de reglare este descris de ecuaţia:

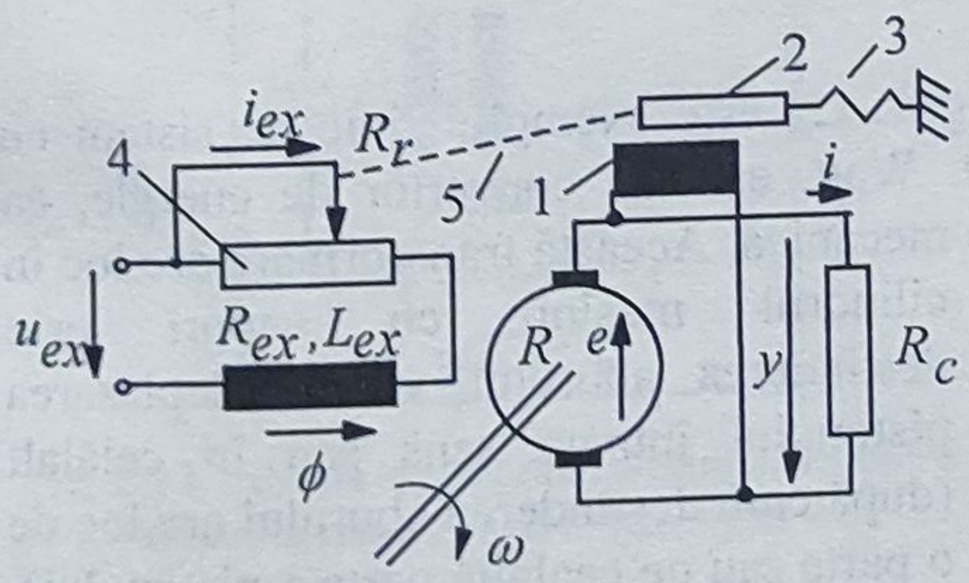


Fig.III.10. Schema generatorului electric de c.c. cu aplicarea principiului abaterii (exemplul 1.4)

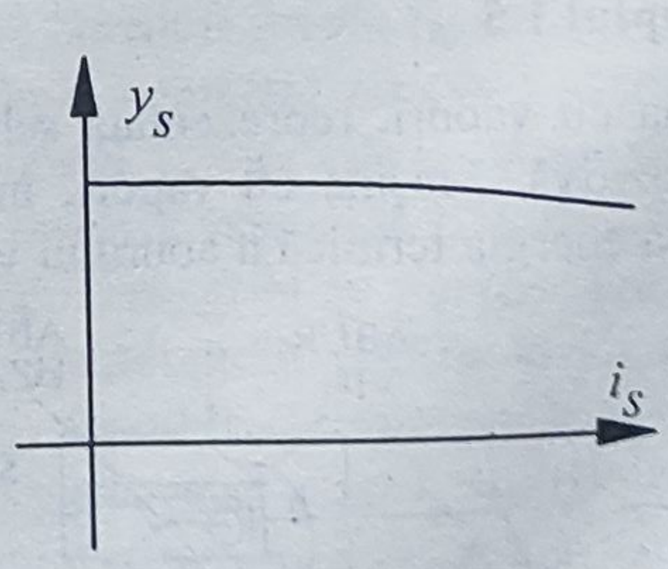


Fig.III.11. Caracteristica statică a generatorului electric de c.c. după aplicarea principiului abaterii

$$R_r = r_{ex} + k_r y_s, \qquad (c_1)$$

deoarece la creşterea/scăderea tensiunii y_s piesa 2 se deplasează spre stânga/dreapta; variaţia lui R_r este proporţională cu cea a lui y_s.

Ca urmare, eliminând e_s, ϕ_s, i_{exs} şi R_r între ecuaţiile (a_1)-(a_3), (b_1) şi (c_1) se obţine caracteristica statică:

$$y_s = y_0(R_{ex}+r_{ex})/(R_{ex}+r_{ex}+k_r y_s) - Ri_s \qquad (c_2)$$

Se observă că primul termen din membrul doi depinde de y_s. De exemplu, la creşterea lui i_s acest termen trebuie să se mărească într-o anumită măsură. Acest lucru şi satisfacerea ecuaţiei (c_2) sunt posibile prin micşorarea adecvată a lui y_s. Graficul funcţiei implicite definite de (c_2) este reprezentat în fig.III.11. Se trage concluzia că este posibilă menţinerea lui y_s la o valoare aproximativ constantă într-o vecinătate a unui punct de funcţionare dat.

Spre deosebire de soluţia prezentată la exemplul 1.3 (bazată pe principiul compensaţiei) în cazul sistemului din fig.III.10 orice variaţie a parametrilor sistemului este urmată de acţiunea sistemului în sensul diminuării abaterii. De exemplu, orice variaţie a tensiunii y_s (datorată variaţiei rezistenţei R a indusului în funcţie de temperatură, variaţiei turaţiei ω a motorului etc.) are ca urmare deplasarea piesei 2, respectiv a cursorului reostatului R_r, modificarea adecvată a curentului i_{ex} şi în final variaţia t.e.m. e astfel încât să aibă loc o revenire a tensiunii y_s la o valoare apropiată aceleia iniţiale.

Valoarea prescrisă (de referinţă) a tensiunii la borne se poate modifica prin forţa exercitată de resortul 3.

Soluţia de combinare a principiului abaterii şi principiului compensaţiei constă în utilizarea unui electromagnet cu două bobine: una conectată în paralel cu indusul şi cealaltă conectată în serie cu indusul.■

2° Reacţia pozitivă

În cazul sistemelor cu structură închisă (fig.III.8) este posibil ca, atunci când y variază într-un sens, S_3 să determine prin m o variaţie de acelaşi sens a lui y. În această situaţie sistemul este înzestrat cu o reacţie pozitivă. Variaţia de acelaşi sens a lui y poate amorsa oscilaţii întreţinute sau chiar neamortizate, ceea ce înseamnă că reacţia pozitivă poate determina o evoluţie spre limita de stabilitate sau chiar o comportare instabilă a sistemului.

Pentru $a = u + y_r$, în care a nu mai are semnificaţia de abatere, sistemul conţine o conexiune cu reacţie pozitivă (fig.III.9).

Exemplul 1.5

Maşina cu vapori, reprezentată schematic în fig.III.12, este exemplul tipic de sistem cu reacţie pozitivă. Maşina cu vapori, inventată de J. Watt, este un convertor de energie; ea transformă energia termică a aburului viu în energie mecanică. Această transformare are loc în cilindrul maşinii cu vapori prin destinderea aburului viu şi deplasarea pistonului într-un sens sau în celălalt (după cum destinderea aburului are loc de o parte sau de cealaltă parte a pistonului). Dacă destinderea aburului are loc în mod alternativ de o parte şi de cealaltă a pistonului, acesta execută o mişcare de "du-te - vino" care se transformă (prin biela AB) într-o mişcare de rotaţie a volantului.

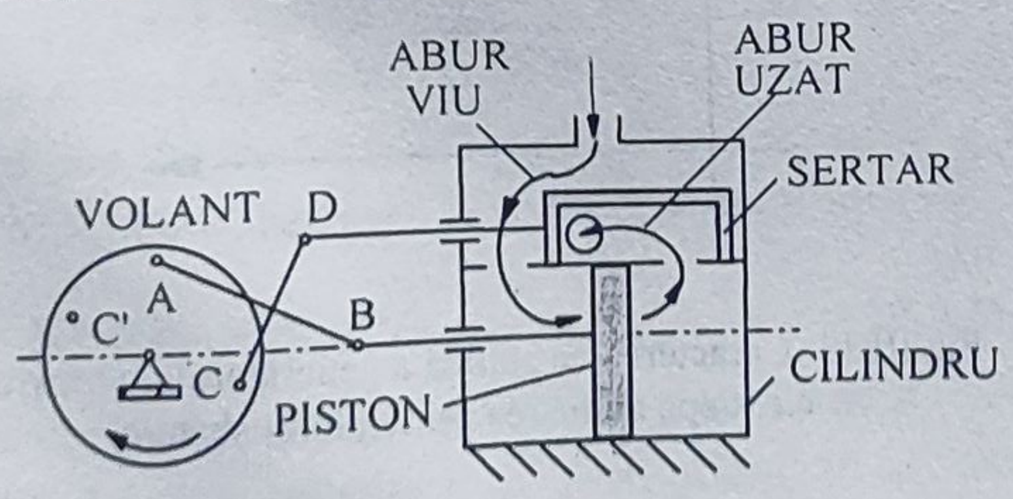


Fig.III.12. Schema maşinii cu vapori - sistem cu reacţie pozitivă (exemplul1.5)

Problema pe care o rezolvat-o J. Watt a fost aceea a alimentării cu abur viu, în mod alternativ, a celor două camere (de volum variabil) pe care le formează pistonul în interiorul cilindrului. Prin legătura informaţională CD, sertarul, în mişcarea sa de "du-te - vino", se deplasează adecvat (corelat) cu mişcarea pistonului, astfel încât, în timp ce aburul viu pătrunde prin orificiul neobturat de sertar în camera a cărui volum se măreşte (prin destinderea aburului), aburul uzat din camera a cărui volum se micşorează este evacuat în atmosferă prin orificiul aflat sub sertar. Evident bielele AB şi CD nu sunt în acelaşi plan, astfel că ele se pot mişca fără a se perturba reciproc. Decalajul unghiular dintre punctele A şi C trebuie realizat astfel încât atunci când pistonul se mişcă spre dreapta sertarul să nu obtureze orificiul de admisie din stânga (situaţia din fig.III.12), iar atunci când pistonul se mişcă spre stânga sertarul să nu obtureze orificiul de admisie din dreapta. În acest fel sistemul este înzestrat cu o reacţie pozitivă. Efectiv, însăşi mişcarea pistonului, prin legătura informaţională CD care asigură distribuţia adecvată a aburului, determină deplasarea sa "du-te - vino" şi implicit mişcarea de rotaţie a volantului. Un rol important în menţinerea acestei mişcări îl are volantul care este un acumulator (capacitiv) de energie cinetică.

Este uşor de observat că plasarea punctului C în poziţia diametral opusă C' (fig.III.12), schimbă caracterul reacţiei în sistem şi anume ea devine negativă. În această situaţie mişcarea pistonului nu mai este posibilă.

Maşina cu vapori aparţine deja istoriei tehnicii. Dar soluţia de realizare a distribuţiei aburului a fost preluată *mutatis mutandis* la motoarele cu ardere internă. La acestea legătura informaţională, care materializează reacţia pozitivă, este realizată prin lanţul cinematic de la arborele cotit la axul cu came până la supape (la motoarele Diesel se adaugă sistemul de injecţie a combustibilului, iar la motoarele Otto se adaugă sistemul de aprindere prin scânteie).■

Exemplul 1.6

În sfera sistemelor electrice sistemul tipic cu reacţie pozitivă este oscilatorul electronic. Exemplul clasic este oscilatorul cu triodă, fig.III.13 (trebuie subliniat faptul că oscilatoarele de mare putere din domeniul radiofoniei se realizează şi în prezent cu tuburi electronice).

În cazul schemei din fig.III.13 reacţia pozitivă se realizează prin cuplajul inductiv dintre circuitul anodic şi circuitul grilei. Se ştie că electronii emişi de catod (K) se deplasează spre anod (A) şi că grila (G) prin potenţialul său poate frâna (în cazul grilei negativate) sau accelera (în cazul grilei pozitivate) fluxul de electroni în mişcare de la catod la anod. La punerea schemei sub tensiune curentul anodic i_A creşte (de la zero) astfel că (la o conectare adecvată a secundarului transformatorului T, care este un element derivator; cf. II.7.2.e, inclusiv exemplul 7.5), în conformitate cu legea inducţiei, grila se pozitivează. Aceasta determină creşterea în continuare a curentului anodic i_A, fenomenul automenţinându-se prin pozitivarea grilei până când i_A atinge valoarea de saturaţie, rămânând constant. Acum tensiunea la bornele secundarului transformatorului este nulă, respectiv dispare pozitivarea prin transformator a grilei. Ceea ce urmează în mod firesc este micşorarea curentului anodic i_A. Conform legii inducţiei are loc o negativare a grilei, ceea ce determină o reducere a curentului anodic, fenomenul automenţinându-se prin negativarea grilei până când i_A atinge valoarea

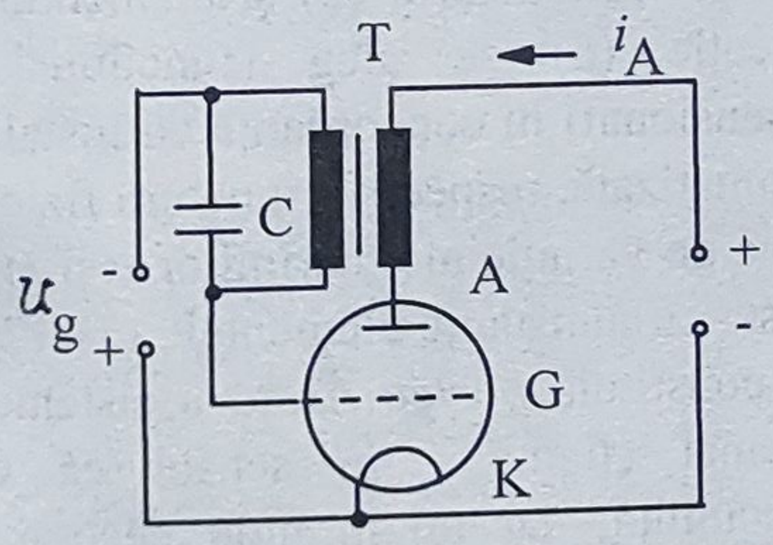


Fig.III.13. Schema oscilatorului electronic cu triodă - sistem cu reacţie pozitivă (exemplul 1.6)

rezidual㠠(foarte mică), rămânând constant. Acum tensiunea la bornele secundarului transformatorului este din nou nulă, respectiv dispare negativarea prin transformator a grilei. Ceea ce urmează este o creştere a curentului anodic ş.a.m.d. Este clar că sistemul este un generator de oscilaţii. Un rol important în menţinerea procesului oscilatoriu, pe lângă reacţia pozitivă care este esenţială, îl are condensatorul C care este un acumulator (capacitiv) de energie electrică (similarul volantului în cazul maşinii cu vapori - fig.III.13) şi valoarea medie a potenţialului grilei (stabilită prin u_g - fig.III.14). Trebuie remarcat faptul că la conectarea inversă a secundarului transformatorului se schimbă caracterul reacţiei în sistem şi anume ea devine negativă. În acest caz sistemul nu mai oscilează.

Oscilatoarele electronice cu tranzistori sunt realizate prin aplicarea *mutatis mutandis* a unor soluţii similare cu cea utilizată în cazul oscilatorului electronic cu triodă.■

Din examinarea modului de acţiune şi al efectelor celor două tipuri de reacţii se pot formula următoarele două caracterizări generale:

- Reacţia negativă are efect stabilizant.
- Reacţia pozitivă are efect destabilizant.

2. Sisteme automate monovariabile

Un sistem automat monovariabil se caracterizează prin una sau mai multe mărimi de intrare, o mărime de ieşire şi - fapt esenţial - o singură cale de reacţie între mărimea de ieşire şi una din mărimile de intrare. Mărimea de intrare şi mărimea de ieşire implicate în realizarea reacţiei negative se mai numesc respectiv *mărimea prescrisă* (*de referinţă*) şi *mărimea reglată*. Celelalte mărimi de intrare au de regulă caracter perturbator şi se numesc *perturbaţii*. Nota distinctă a perturbaţiilor este că ele acţionează mai mult sau mai puţin imprevizibil şi independent de sistemul automat şi/sau de voinţa operatorului uman (care îl utilizează/supervizează). În contrast, mărimea prescrisă este accesibilă operatorului uman, care o modifică în funcţie de necesităţile tehnologice.

2.1. Schema bloc funcţională

Schema bloc funcţională a unui sistem automat monovariabil este reprezentată în fig.III.14. Instalaţia automatizată (1) fiind cunoscută, proiectarea unui sistem automat constă în alegerea dispozitivului de automatizare (7), cu toate elementele sale. Traductorul (2) şi elementul de execuţie (6) se aleg (funcţional şi dimensional) în concordanţă cu instalaţia automatizată, respectiv cu natura fizică şi gama de variaţie ale mărimilor y şi m. În aceste circumstanţe elementele (1), (2) şi (6) constituie *partea fixată* a sistemului automat (fixată - în sensul că este prestabilită, dar nu în mod necesar cu parametri fixaţi). Elementul de execuţie (6) conţine în mod obişnuit un amplificator de putere (m poate fi o deplasare de translaţie sau de rotaţie, o tensiune electrică sau un curent electric etc.) care face posibilă conducerea instalaţiei automatizate (transferul $m \rightarrow y$). Traductorul (2) converteşte mărimea reglată y în mărimea de reacţie y_r (cu precizie conformă exigenţelor stipulate în tema de proiectare), dar astfel încât y_r

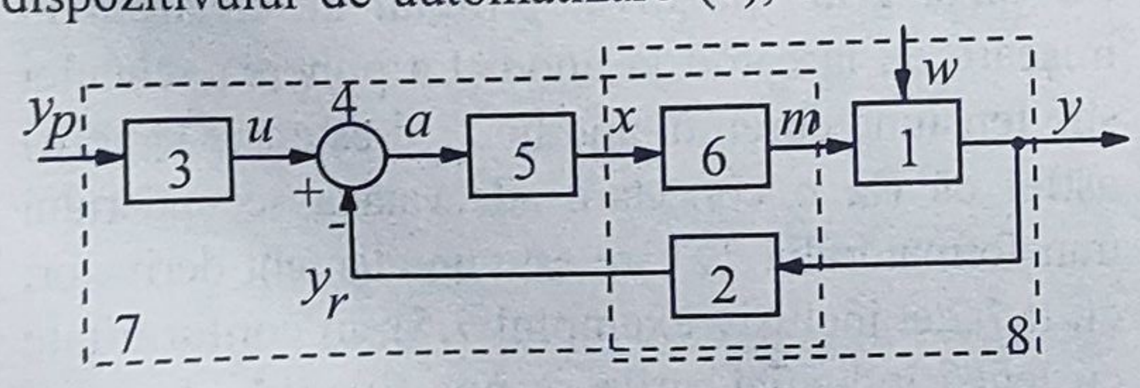


Fig.III.14. Schema bloc funcţională a unui sistem automat monovariabil; 1-instalaţia automatizată, 2-traductorul, 3-elementul de prescriere, 4-comparatorul, 5-regulatorul, 6-elementul de execuţie, 7-dispozitivul de automatizare, 8-partea fixată; y_p-mărimea prescrisă (de referinţă), y-mărimea reglată, y_r-mărimea de reacţie, u-mărimea prescrisă adaptată (comparabilă cu y_r), a-abatarea, x-mărimea de comandă, m-mărimea de execuţie, w-perturbaţia

să fie de aceeaşi natură fizică cu u, fiind astfel posibilă comparaţia între u şi y_r în comparatorul (4). În ceea ce priveşte regulatorul (5), care materializează *legea de reglare* (*algoritmul de reglare*), experienţa acumulată până în prezent în domeniul automaticii indică tipul de regulator (ca structură şi ca realizare tehnologică) pentru categoriile uzuale de sisteme automate utilizate în tehnică. Structura regulatorului fiind astfel stabilită, problema de rezolvat este aceea a alegerii valorilor celor mai adecvate ale parametrilor (ajustabili) ai regulatorului astfel ca sistemul automat să realizeze indicii de calitate impuşi prin tema de proiectare.

Elementul de prescriere (referinţă) (3) are un dublu rol: pe de o parte constituie o interfaţă între operatorul uman şi sistemul automat (y_p este de regulă poziţia unghiulară a unui ax, acţionabil manual, al unui potenţiometru etc., prevăzut cu un ac indicator şi scală gradată în unitatea de măsură a lui y); pe de altă parte converteşte pe y_p (care în fond este poziţia unghiulară a axului unui potenţiometru etc.) în *mărimea prescrisă* (*de referinţă*) *adaptată* u, care trebuie să fie de aceeaşi natură fizică cu mărimea de reacţie y_r, fiind astfel posibilă obţinerea abaterii $a = u - y_r$ cu ajutorul comparatorului (4).

Din punct de vedere constructiv elementul de prescriere (referinţă) (3), comparatorul (4) şi regulatorul (5) constituie de regulă o singură unitate (un modul constructiv). Această unitate este astfel realizată încât operatorul uman are posibilitatea modificării mărimii prescrise (de referinţă) şi a parametrilor ajustabili ai regulatorului.

Din punctul de vedere al realizării tehnologice, cele mai frecvent utilizate sunt regulatoarele electronice (analogice sau numerice) şi, cu destinaţie specială – regulatoarele pneumatice (de exemplu în industria petrochimică).

Este evident că sistemul automat cu schema bloc funcţională din fig.III.14 funcţionează pe principiul abaterii. Trebuie subliniat şi reţinut că pentru aprecierea calităţilor unui sistem automat (în speţă precizia de reglare în regim staţionar şi în regim tranzitoriu) cea mai potrivită mărime nu este abaterea a. Această afirmaţie pare surprinzătoare având în vedere că sistemul automat tinde să-şi anuleze propria abatere a. Ţinând însă seama de scopul pentru care se realizează un sistem automat, mărimea care în mod natural este cea mai potrivită pentru aprecierea calităţii (preciziei) este $e = y_p - y$, adică *eroarea* dintre mărimea prescrisă (de referinţă) şi mărimea reglată. În general $e \neq a$ şi în plus eroarea nu este nici generată şi nici nu acţionează în cadrul sistemului automat. Eroarea este o mărime virtuală, foarte utilă în analiza, sinteza (proiectarea) şi aprecierea calităţii (preciziei) unui sistem automat.

Exemplul 2.1

Pentru ilustrarea noţiunii de schemă bloc funcţională se consideră sistemul de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. cu schema reprezentată în fig.III.15.

Instalaţia automatizată este constituită de motorul electric de c.c. cu excitaţie separată (M). Modelul matematic corespunzător a fost obţinut în subcapitolul II.2 (exemplele 2.1, 2.2 şi 2.3).

Ca traductor de turaţie se foloseşte un tahogenerator (TG). Acesta este o maşină electrică de c.c. cu excitaţie separată, de construcţie specială şi de foarte mică putere, caracterizată de relaţia intrare-ieşire: $u_t = k_t \omega$, în care k_t este o constantă.

Elementul de prescriere este constituit de un potenţiometru (P) pentru care, într-o primă aproximaţie, se poate scrie: $u_p = k_p \omega_p$, în care k_p este o constantă.

Funcţia elementului de comparaţie este realizată prin conectarea în opoziţie a ieşirii potenţiometrului (P) şi a indusului tahogeneratorului (TG), astfel că pentru abaterea a se poate scrie: $a = u_p - u_t$.

Regulatorul (R) este de tip electronic (analogic). Uzual acesta realizează o lege de reglare de tip PID (adică funcţia de transfer este de tip PID, a se vedea II.7.8; detalii privind modul de realizare a regulatoarelor electronice analogice se vor prezenta în cap.IV).

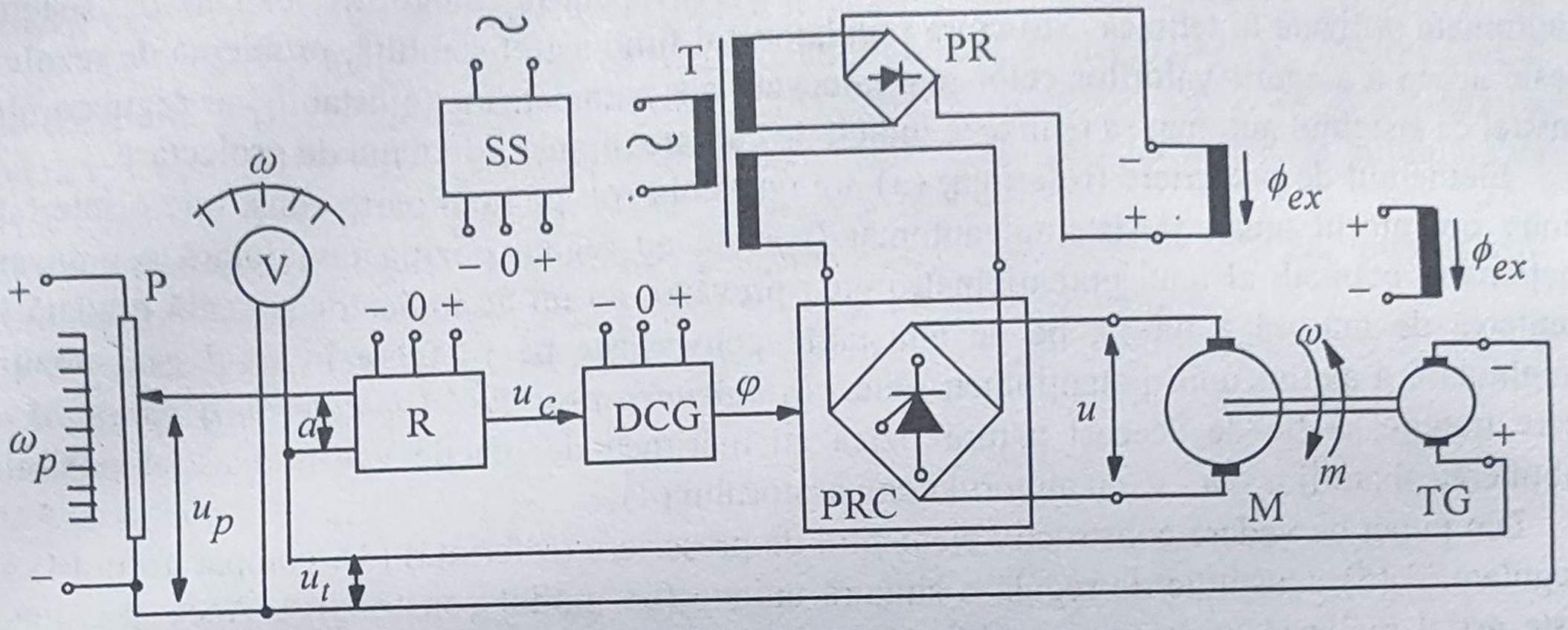


Fig.III.15. Schema bloc funcţională a sistemului de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. (exemplul 2.1); M-motorul, TG-tahogeneratorul, P-potenţiometrul de prescriere (referinţă) cu scala gradată în unităţi de turaţie, R-regulatorul, DCG-dispozitivul de comandă pe grilă, PRC-puntea redresoare (cu tiristoare) comandată; elemente auxiliare: T-transformatorul de putere, PR-puntea redresoare, SS-sursa stabilizată, V-voltmetrul cu scala gradată în unităţi de turaţie

Elementul de execuţie este format din dispozitivul de comandă pe grilă (DCG) şi puntea redresoare (cu tiristoare) comandată (PRC). Dispozitivul de comandă pe grilă are menirea de a converti tensiunea continuă u_c într-un tren de impulsuri de fază φ dependentă de u_c conform relaţiei: $\varphi = k_g u_c$, în care k_g este o constantă. Impulsurile astfel obţinute se aplică pe grilele tiristoarelor punţii redresoare comandate (PRC). Relaţia dintre u şi φ este neliniară, dar într-o primă aproximaţie (considerând că u şi φ sunt mici variaţii în jurul unui punct de funcţionare) se poate scrie: $u = k\varphi$, în care k este o constantă.

Pentru funcţionarea normală a sistemului sunt necesare o serie de elemente suplimentare: transformatorul de putere (T), care asigură alimentarea cu energie electrică (cu asigurarea decuplării galvanice faţă de reţeaua electrică) a punţii redresoare comandate (PRC) şi a circuitului de excitaţie a motorului (prin puntea redresoare (PR)), şi sursa stabilizată (SS), care asigură alimentarea la tensiune continuă stabilizată a potenţiometrului (P), a circuitului de excitaţie a tahogeneratorului (TG), a regulatorului (R) şi a dispozitivului de comandă pe grilă (DCG). Voltmetrul (V), cu scala gradată în unităţi de măsură a turaţiei, are menirea de a indica valoarea turaţiei reglate ω. Operatorul uman are posibilitatea să modifice valoarea mărimii prescrise (de referinţă) ω_p (indicată pe scala gradată în unităţi de măsură a turaţiei), a potenţiometrului şi să o compare cu valoarea mărimii reglate ω (indicată de voltmetru). Pentru afişarea valorii abaterii a se poate conecta un voltmetru (magnetoelectric, cu zero la mijlocul scalei) direct la bornele de intrare ale regulatorului (R). Scala acestui voltmetru poate fi gradată în volţi şi/sau în procente din valoarea maximă posibilă a abaterii. În ipoteza că se realizează $k_p = k_t$ (lucru posibil prin prelucrarea corespunzătoare a tensiunii u_t), atunci se obţine: $a = k_p(\omega_p - \omega)$, în care $\omega_p - \omega$ este eroarea dintre turaţia prescrisă (de referinţă) şi turaţia reglată (reală). În acest caz scala gradată în procente (a voltmetrului care măsoară abaterea) exprimă şi eroarea relativă procentuală dintre ω_p şi ω.

Funcţionarea sistemului de reglare automată a turaţiei se poate lesne explica pe baza principiului abaterii. Într-adevăr dacă are loc o variaţie într-un sens a abaterii a, oricare ar fi cauza care a provocat-o (variaţia mărimii prescrise (de referinţă) ω_p, variaţia cuplului de sarcină (perturbaţia) m care produce variaţia mărimii reglate ω, variaţii ale parametrilor sistemului (cele mai importante fiind: ale tensiunii de alimentare a transformatorului T şi ale rezistenţei indusului în funcţie de temperatură, toate având efecte asupra mărimii reglate ω), regulatorul (conform legii de reglare), dispozitivul de comandă pe grilă şi puntea redresoare comandată produc o variaţie de acelaşi sens a tensiunii u. Urmează o variaţie de acelaşi sens a turaţiei ω, ceea ce, prin reacţia negativă, conduce la diminuarea sau chiar la o variaţie de sens contrar (faţă de cea iniţială) a abaterii $a = \omega_p - \omega$. Prin alegerea adecvată a valorilor parametrilor regulatorului se poate asigura ca procesul de diminuare sau chiar de anulare a abaterii să se caracterizeze prin valori acceptabile ale indicilor de calitate definiţi pe baza răspunsului indicial (a se vedea II.7.1).■

2.2. Schema bloc structurală standard

De regulă elementele din schema bloc funcţională a unui sistem automat monovariabil au funcţii de transfer cunoscute. Pot exista şi excepţii în care unii coeficienţi ai polinoamelor unora dintre aceste funcţii de transfer sunt incerţi (adică definiţi pe anumite intervale din **R**) sau chiar necunoscuţi. Este cazul unora dintre funcţiile de transfer ale instalaţiei automatizate şi/sau al funcţiei de transfer a regulatorului (înainte de stabilirea valorilor parametrilor ajustabili).

În aceste condiţii fiecărui element din schema bloc funcţională (fig.III.14) i se poate asocia câte o relaţie de transfer (cu funcţii de transfer corespunzătoare).

Aplicând regulile de la II.2.2 şi 2.3 se obţine schema bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil, fig.III.16.

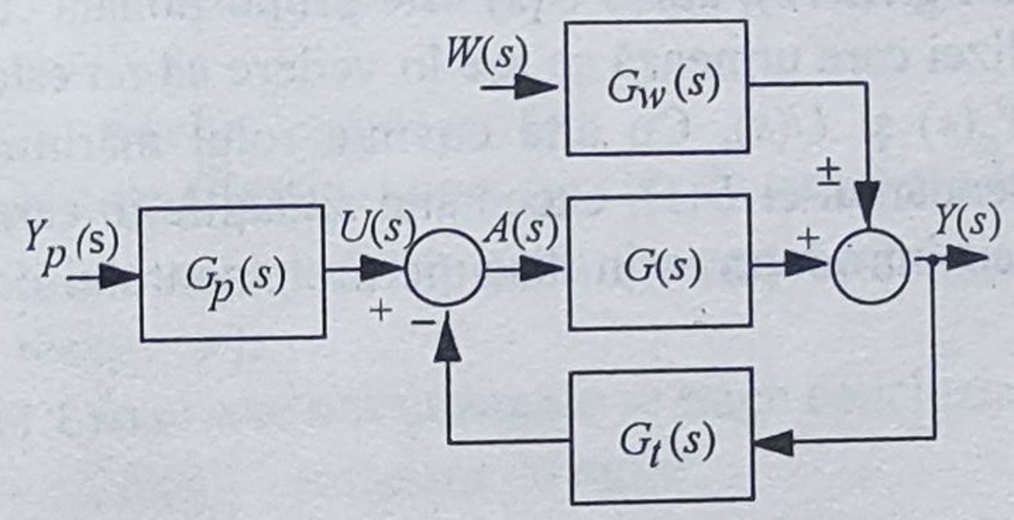


Fig.III.16. Schema bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil; $G_p(s)$ - funcţia de transfer a elementului de prescriere; $G(s)$ - funcţia de transfer a căii directe; $G_w(s)$ - funcţia de transfer a perturbaţiei; $G_t(s)$ - funcţia de transfer a traductorului (căii de reacţie)

Transferul intrare-ieşire al sistemului din fig.III.16 este descris de ecuaţia:

$$Y(s) = G_0(s)G_p(s)Y_p(s) \pm G_{0w}(s)W(s), \quad (2.1)$$

în care:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} \quad (2.2)$$

$$G_{0w}(s) = \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_t(s)}. \quad (2.3)$$

Semnificaţiile funcţiilor de transfer $G_p(s)$, $G(s)$, $G_w(s)$ şi $G_t(s)$ sunt prezentate în fig.III.16.

În plus trebuie reţinut faptul că:

$$G(s) = G_R(s)G_E(s)G_{IA}(s), \quad (2.4)$$

în care $G_R(s)$ este funcţia de transfer a regulatorului, $G_E(s)$ este funcţia de transfer a elementului de execuţie şi $G_{IA}(s)$ este funcţia de transfer a instalaţiei automatizate (partea situată pe calea directă).

Este de la sine înţeles că toate proprietăţile unui sistem automat sunt direct legate de ecuaţia (2.1) şi de funcţiile de transfer (2.2) şi (2.3).

Exemplul 2.2

Pentru ilustrarea noţiunii de schemă bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil se consideră sistemul de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. de la exemplul 2.1.

Modelul matematic al motorului electric de c.c. a fost obţinut în subcap.II.2 (exemplele 2.1, 2.2 şi 2.3) şi schema bloc structurală are forma din fig.II.20. Pe calea directă a conexiunii <<cu reacţie>>, conform schemei bloc funcţionale din fig.III.14 se găsesc: elementul de transfer $u \to \omega$ (descris de $G_{IA}(s)$) al motorului (fig.II.20), regulatorul - descris de funcţia de transfer $G_R(s)$, şi elementul de execuţie (format din dispozitivul de comandă pe grilă şi puntea redresoare comandată) - descris de funcţia de transfer $G_E(s)=k_g k$. În aceste circumstanţe schema bloc structurală standard din fig.III.16 se caracterizează prin:

- pentru transferul $a \to \omega$ al căii directe (relaţia (2.4)):

$$G(s) = k_g k G_R(s) \frac{k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)+k_1 k_2},$$

- pentru transferul $m \to \omega$ al motorului (fig.II.20):

$$G_w(s) = \frac{Ls+R}{(Ls+R)(Js+k_3)+k_1 k_2}$$

- la care, conform celor expuse la exemplul 2.1, se adaugă pentru elementul de prescriére (referinţă) şi respectiv pentru traductor:

$$G_p(s) = k_p, \quad G_t(s) = k_t . \blacksquare$$

3. Implicaţii ale principiului abaterii

De regulă $G_p(s) = k_p$ = constant (în schema din fig.III.16), adică $U(s)$ este proporţională cu $Y_p(s)$. Din acest motiv şi pentru simplificarea analizei care urmează se are în vedere că nu este necesară întotdeauna o distincţie expresă între $Y_p(s)$ şi $U(s)$. Cu alte cuvinte rolul mărimii prescrise (de referinţă) $Y_p(s)$ poate fi jucat şi de pendantul ei $U(s)$, exceptând situaţiile în care contextul şi scopul analizei implică în mod explicit introducerea în discuţie a elementului de prescriere, respectiv a ecuaţiei:

$$U(s) = G_p(s) Y_p(s). \tag{3.1}$$

3.1. O formă analitică a principiului abaterii

În conformitate cu schema bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil (fig.III.16) se pot scrie următoarele ecuaţii:

$$A(s) = U(s) - G_t(s) Y(s) \tag{3.2}$$

$$Y(s) = G(s) A(s) \pm G_w(s) W(s). \tag{3.3}$$

Eliminând $Y(s)$ între ecuaţiile (3.2) şi (3.3) rezultă:

$$A(s) = \frac{1}{1+G(s)G_t(s)} U(s) \mp \frac{G_w(s)G_t(s)}{1+G(s)G_t(s)} W(s), \tag{3.4}$$

numită *ecuaţia abaterii.*

Abaterea are două componente: una determinată de mărimea prescrisă $U(s)$ şi cealaltă de perturbaţia $W(s)$. Corespunzător se disting două funcţii de transfer ale abaterii:

$$G_{au}(s)=\frac{1}{1+G(s)G_t(s)} \tag{3.5}$$

aferentă mărimii prescrise $U(s)$, şi

$$G_{aw}(s)=\frac{G_w(s)G_t(s)}{1+G(s)G_t(s)} \tag{3.6}$$

aferentă perturbaţiei $W(s)$.

S-a arătat la 1.2.1° că în virtutea principiului abaterii însăşi existenţa unei variaţii a abaterii (indiferent de cauza care a provocat-o) are ca efect evoluţia sistemului automat în sensul diminuării sau chiar anulării ei. Având în vedere ecuaţia (3.4) această evoluţie depinde de $U(s)$ şi $W(s)$ dar şi de structura şi parametrii sistemului automat conform funcţiilor de transfer (3.5) şi respectiv (3.6). Se poate afirma că în general $A(s)\not\equiv 0$ În contrast, situaţia ideală (prin care se ţine seama de principiul abaterii într-o formă limită ideală) este aceea în care:

$$A(s)\equiv 0. \tag{3.7}$$

Întrucât în general $U(s)\not\equiv 0$ şi $W(s)\not\equiv 0$, rezultă că (3.7) poate fi satisfăcută dacă:

$$G_{au}(s)\equiv 0, \tag{3.8}$$

$$G_{aw}(s)\equiv 0. \tag{3.9}$$

Evident în cazul sistemelor automate reale condiţiile (3.8) şi (3.9) nu au loc. O abordare realistă a acestei probleme constă în slăbirea condiţiei (3.7) şi anume sub forma:

$|A(s)|$ - acceptabil de mic, (3.10)

ceea ce, corespunzător condiţiilor (3.8) şi (3.9), conduce la:

$|G_{au}(s)|$ - acceptabil de mic, (3.11)

$|G_{aw}(s)|$ - acceptabil de mic. (3.12)

Pe baza examinării funcţiilor de transfer (3.5) şi (3.6) se observă că acestea au acelaşi numitor:

$$F(s)=1+G(s)G_t(s), \tag{3.13}$$

în care $G(s)G_t(s)$ este funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis (sau în buclă deschisă) (a se vedea şi II.2.2.3°) şi $G(s)$ este funcţia de transfer a căii directe (a conexiunii <<cu reacţie>>).

În aceste circumstanţe se trage concluzia că pentru :

$|F(s)|$ - suficient de mare (3.14)

sunt îndeplinite premizele satisfacerii condiţiilor (3.11) şi (3.12).

Condiţia (3.14) poate fi îndeplinită prin alegerea corespunzătoare a funcţiei de transfer $G(s)$ în (3.13). $G(s)$ fiind constituită din mai mulţi factori (relaţia (2.4)), printre care şi $G_R(s)$ (funcţia de transfer a regulatorului), rezultă că satisfacerea condiţiei (3.14) poate fi asigurată prin alegerea adecvată a lui $G_R(s)$ şi anume astfel încât:

$|G(s)G_t(s)|$ - suficient de mare. (3.15)

3.2. Semnificaţia funcţiei $F(s)$

Pentru a evidenţia semnificaţia funcţiei $F(s)$ se consideră schema bloc din fig.III.16 în varianta din fig.III.17, în care $U(s)\equiv 0$, $W(s)\equiv 0$ şi legătura de la comparator la elementul descris de $G(s)$ este întreruptă.

Conform fig.III.17 se aplică $\tilde{A}(s)$ la intrarea elementului descris de $G(s)$ şi se evaluează diferenţa $\tilde{A}(s)-A(s)$, în care $A(s)$ este mărimea de ieşire a comparatorului. Se pot scrie ecuaţiile:

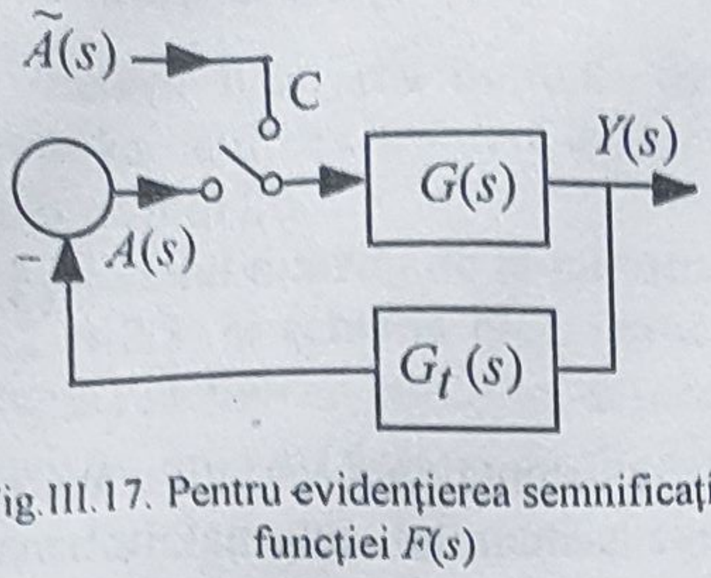


Fig.III.17. Pentru evidenţierea semnificaţiei funcţiei $F(s)$

$$A(s) = -G(s)G_t(s)\tilde{A}(s), \tag{3.16}$$

$$\tilde{A}(s) - A(s) = [1 + G(s)G_t(s)]A(s) \tag{3.17}$$

Din (3.13) şi (3.17) rezultă:

$$F(s) = \frac{\tilde{A}(s) - A(s)}{A(s)}, \tag{3.18}$$

ceea ce permite ca $F(s)$ să se numească funcţia de transfer *diferenţă a reacţiei*. Aceasta evidenţiază efectul buclei deschise conform fig.III.17 şi poate fi utilizată pentru explicarea evoluţiei sistemului după închiderea buclei în schema din fig.III.17 (adică $A(s) \equiv \tilde{A}(s)$).

În momentul închiderii buclei prin comutatorul C, fig. III.17, situaţia cea mai nefavorabilă din punctul de vedere al evoluţiei lui $\tilde{a}(t) \equiv a(t)$ în urma transferului prin bucla închisă este aceea în care $G(s)G_t(s)$ produce o schimbare de semn, respectiv $a(t)$ este de acelaşi semn cu $\tilde{a}(t)$ imediat înaintea închiderii buclei.

La închiderea buclei sunt posibile următoarele două cazuri:

$$1^\circ\ |A(s)| < |\tilde{A}(s)|, \tag{3.19}$$

ceea ce, conform relaţiei (3.16), implică în mod necesar:

$$|G(s)G_t(s)| < 1. \tag{3.20}$$

Închiderea buclei în situaţia (3.19), respectiv (3.20), are ca urmare $|A(s)| = |\tilde{A}(s)| \to 0$. Sistemul în buclă închisă are o comportare stabilă.

$$2^\circ\ |A(s)| \geq |\tilde{A}(s)|, \tag{3.21}$$

ceea ce, conform relaţiei (3.16), implică în mod necesar:

$$|G(s)G_t(s)| \geq 1. \tag{3.22}$$

Închiderea buclei în situaţia (3.21), respectiv (3.22), nu are ca urmare $|A(s)| = |\tilde{A}(s)| \to 0$. Sistemul în buclă închisă are o comportare instabilă.

Este clar că funcţia $F(s)$ (în subsidiar $G(s)G_t(s)$, respectiv $G_R(s)$), are un rol esenţial în asigurarea stabilităţii sistemului în bucla închisă. Funcţia de transfer $G(s)G_t(s)$ (respectiv $G_R(s)$) trebuie astfel aleasă încât să aibă loc (3.20), adică sistemul să fie stabil.

Comparând (3.15) cu (3.20) este uşor de remarcat că pot exista unii $s \in \mathbf{C}$ pentru care condiţiile (3.15) şi (3.20) pot fi contradictorii, ceea ce înseamnă că nu se pot asigura simultan o abatere acceptabil de mică (relaţia (3.10)) şi o comportare stabilă.

Întrucât asigurarea stabilităţii este prioritară, rezultă că rezolvarea acestei contradicţii constă în alegerea funcţiei de transfer $G(s)G_t(s)$ (respectiv $G_R(s)$) astfel încât (3.15) şi (3.20) să fie satisfăcute respectiv pentru diferiţi $s \in \mathbf{C}$ şi în cadrul unui compromis acceptabil.

3.3. Abaterea staţionară

Majoritatea sistemelor automate monovariabile (fig.III.16) utilizate în tehnică funcţionează pe durate relativ mari de timp (comparativ cu constantele de timp ale sistemului) în regim staţionar deoarece $u(t)$ şi $w(t)$ sunt funcţii constante pe porţiuni. În acest context valoarea abaterii staţionare poate oferi indicaţii asupra calităţii sistemului.

Se consideră că $y_p(t)$, $u(t)$ şi $w(t)$ sunt funcţii treaptă, adică:

$$y_p(t) = y_{ps}\sigma(t), \quad Y_p(s) = \frac{1}{s}y_{ps}, \tag{3.23}$$

$$u(t) = u_s \sigma(t), \quad U(s) = \frac{1}{s} u_s \,, \tag{3.24}$$

$$w(t) = w_s \sigma(t), \quad W(s) = \frac{1}{s} w_s \,. \tag{3.25}$$

Utilizând relaţia (3.4), cu (3.24) şi (3.25), şi teorema valorii finale (Anexa A1) se poate scrie:

$$a_s = \lim_{t \to +\infty} a(t) = \lim_{s \to 0} sA(s) = \frac{1}{1 + G(0)G_t(0)} u_s \pm \frac{G_w(0)G_t(0)}{1 + G(0)G_t(0)} w_s \,. \tag{3.26}$$

În general $a_s \neq 0$.

Un caz particular remarcabil este acela în care $G(s)$ are un pol în origine (există o componentă integratoare (I) pe calea directă, de exemplu în regulator). Atunci $|G(0)| = +\infty$ şi cum în mod uzual $G_t(0)$, $G_w(0)$ sunt finite, din (3.26) se obţine:

$$a_s = 0. \tag{3.27}$$

Acest rezultat, pe lângă importanţa practică deosebită, ilustrează virtuţile principiului abaterii atunci când, suplimentar faţă de reacţia negativă, sistemul automat are o componentă integratoare (I) pe calea directă. Fireşte, este posibil ca această componentă integratoare să aibă efecte nedorite asupra stabilităţii BIBO a sistemului automat. Pentru a evita acest lucru, $G(s)$ poate fi înzestrat în continuare (prin $G_R(s)$) cu poli şi zerouri astfel localizaţi încât să se asigure stabilitatea BIBO (a se vedea III.4) dar şi menţinerea rezultatului (3.27).

3.4. Efectul perturbaţiei

Transferul intrare-ieşire al sistemului automat cu schema din fig.III.15 este descris de ecuaţia (2.1), cu (2.2) şi (2.3). În ipoteza că sistemul funcţionează pe durate relativ mari de timp în regim staţionar, o posibilitate de apreciere a efectului valorii staţionare w_s a perturbaţiei asupra valorii staţionare y_s a mărimii reglate o oferă caracteristica statică $y_s = f(w_s)$.

Se consideră că $y_p(t)$ şi $w(t)$ sunt funcţii treaptă de forma (3.23) şi (3.25). Utilizând (2.1), în care se consideră numai semnul "+" între termenii din membrul drept deoarece semnul real se consideră inclus în $G_{0w}(s)$ (respectiv în $G_w(s)$), şi teorema valorii finale (Anexa A1) se poate scrie:

$$y_s = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\left[G_0(s)G_p(s)\frac{y_{ps}}{s} + G_{0w}(s)\frac{w_s}{s} \right] =$$

$$= G_0(0)G_p(0)y_{ps} + G_{0w}(0)w_s \,,$$

respectiv:

$$y_s = y_0 + S_0 w_s \,, \tag{3.28}$$

în care (utilizând (2.2) şi (2.3)):

$$y_0 = G_0(0)G_p(0)y_{ps} = \frac{G(0)G_p(0)}{1 + G(0)G_t(0)} y_{ps} \tag{3.29}$$

$$S_0 = G_{0w}(0) = \frac{G_w(0)}{1 + G(0)G_t(0)}. \tag{3.30}$$

Ecuaţia (3.28) reprezintă caracteristica statică intrare-ieşire a sistemului automat. Graficul este reprezentat în fig.III.18; y_0 se numeşte valoarea de mers în gol a mărimii reglate (se obţine pentru $w_s = 0$) şi S_0 este panta caracteristicii statice. Exceptând cazul $S_0 = 0$ orice variaţie a perturbaţiei w_s determină o variaţie corespunzătoare a mărimii reglate.

De regulă y_0 şi S_0 pot fi modificate între anumite limite cu ajutorul lui y_{ps} şi a unor parametri ai regulatorului astfel încât caracteristica statică să fie conformă cu cerinţele tehnologice.

În situaţia în care $G(s)$ are un pol în origine (există o componentă integratoare (I) pe calea directă, de exemplu în regulator) se obţine $|G(0)| = +\infty$. Întrucât $G_p(0)=G_I(0)$ şi $G_w(0)$ sunt finite, din (3.29) şi (3.30) rezultă respectiv $y_0=y_{ps}$ şi $S_0 = 0$. Aceasta înseamnă că (3.28) devine:

$$y_s = y_{ps}. \tag{3.31}$$

Ecuaţia (3.31) arată că mărimea reglată este invariantă în raport cu perturbaţia. Rezultatul (3.31) se corelează cu (3.27). Se spune că polul în origine al funcţiei de transfer a căii directe (componenta integratoare (I) pe calea directă, de exemplu în regulator) asigură invarianţa mărimii reglate în raport cu perturbaţia în regim staţionar.

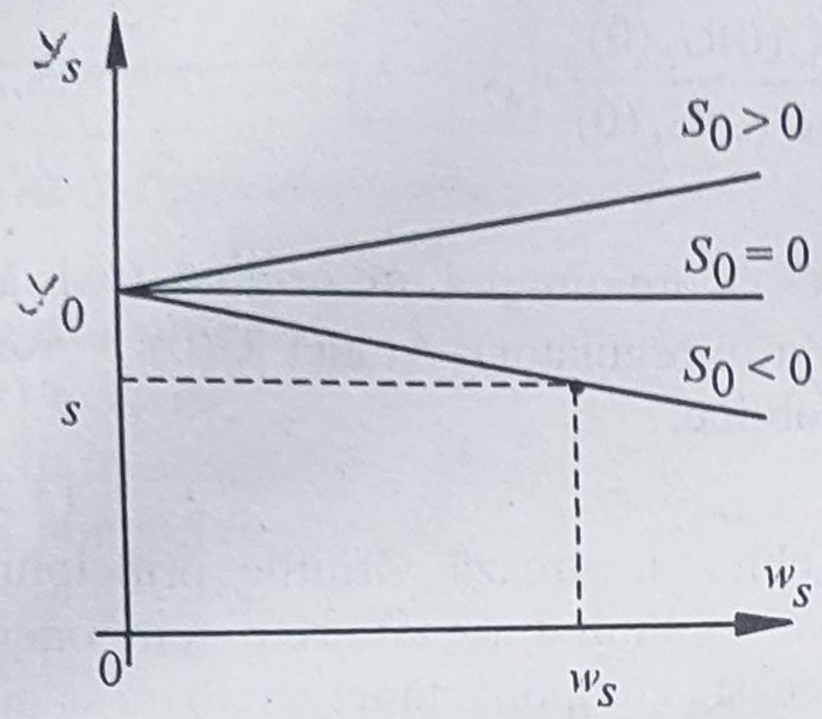


Fig.III.18. Caracteristica statică $y_s=f(w_s)$ a unui sistem automat monovariabil (ecuaţia (3.28)); în cazul $S_0 = 0$ se0 asigură invarianţa mărimii reglate în raport cu perturbaţia în regim staţionar

Forma caracteristicii statice prezintă o importanţă specială în cazul mai multor sisteme automate monovariabile care funcţionează interconectat la ieşire, astfel încât toate mărimile de ieşire sunt egale între ele şi perturbaţia globală este suma perturbaţiilor parţiale. Ca exemple tipice se pot aminti: generatoarele electrice (cu reglarea automată a tensiunii) conectate în paralel, generatoarele de abur (cu reglarea automată a presiunii) conectate la o conductă de abur comună, motoarele electrice de tracţiune (cu reglarea automată a turaţiei) cuplate mecanic (de exemplu în cazul locomotivelor - prin roţile de tracţiune acţionate de motoare şi calea de rulare).

În cazul interconectării la ieşire a două sisteme automate monovariabile caracteristicile statice au ecuaţiile:

$$y_s = y_{01} + S_{01}w_{s1} \tag{3.32}$$

$$y_s = y_{02} + S_{02}w_{s2} \tag{3.33}$$

şi graficele din fig.III.19.

Caracteristica statică echivalentă a ansamblului celor două sisteme automate interconectate la ieşire are ecuaţia (3.28) în care perturbaţia globală este:

$$w_s = w_{s1} + w_{s2}. \tag{3.34}$$

Eliminând w_{s1} şi w_{s2} între ecuaţiile (3.32)-(3.34) se obţine (3.28) în care:

$$y_0 = \frac{S_{01}y_{02} + S_{02}y_{01}}{S_{01} + S_{02}}, \; S_0 = \frac{S_{01}S_{02}}{S_{01} + S_{02}}. \tag{3.35}$$

Din (3.32), (3.33) şi fig.III.19 rezultă că perturbaţia globală w_s se repartizează între sistemele componente conform cu (3.34) dar şi în funcţie de parametrii y_{01}, S_{01} şi y_{02}, S_{02} ai celor două caracteristici statice. Modificarea acestor parametri conduce la schimbarea repartiţiei perturbaţiilor parţiale w_{s1} şi w_{s2} între sistemele componente, conform relaţiei (3.34). Orice variaţie a perturbaţiei globale w_s (repartizată între sistemele componente) are ca urmare, conform ecuaţiei (3.28), cu (3.35), o variaţie corespunzătoare a mărimii reglate y_s.

În cazul în care sistemul 1 are o componentă integratoare (I) pe calea directă (un pol în origine, de exemplu în funcţia de transfer a regulatorului), rezultă $S_{01} = 0$. Ecuaţia (3.32) devine:

$$y_s = y_{sp1} \tag{3.36}$$

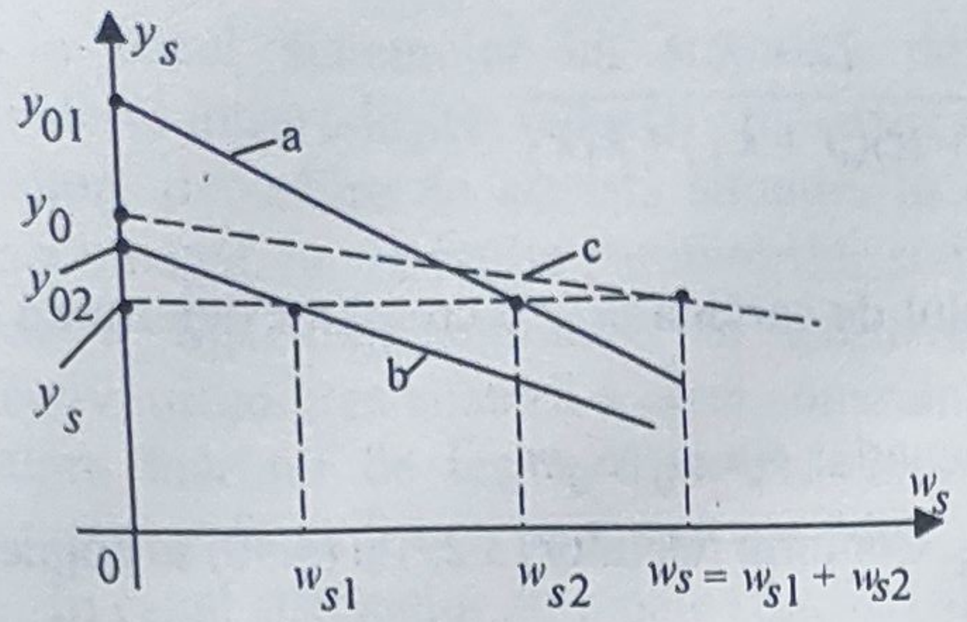


Fig.III.19. Caracteristicile statice ale unui ansamblu de două sisteme automate monovariabile interconectate la ieşire; a - sistemul 1 (ecuaţia (3.32)), b - sistemul 2 (ecuaţia (3.33)), c - ansamblul sistemelor 1 şi 2 (ecuaţia (3.29), cu (3.35))

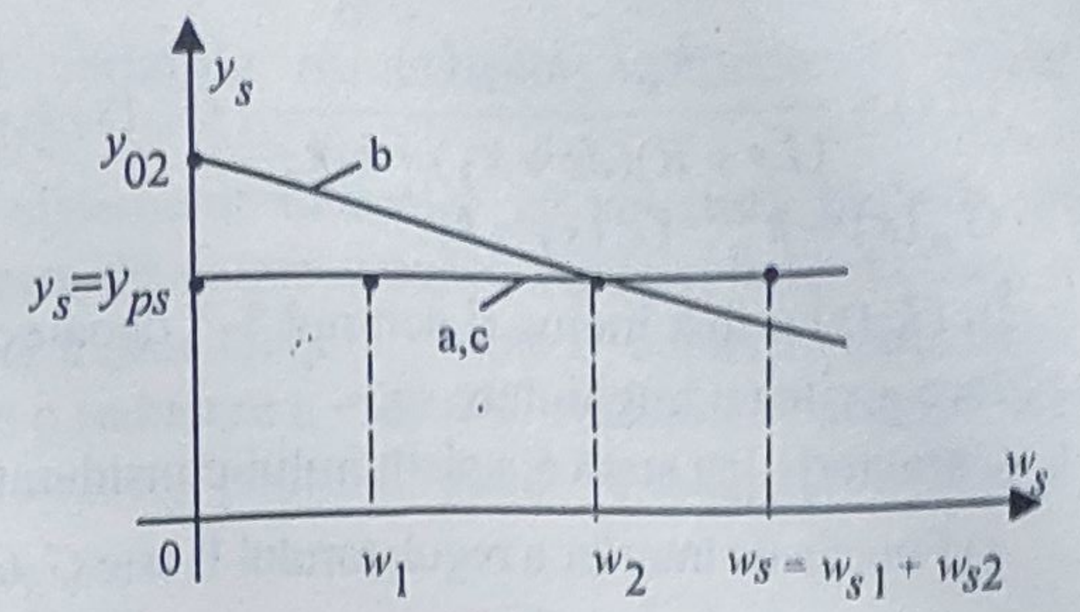


Fig.III.20. Caracteristicile statice ale unui ansamblu de două sisteme automate monovariabile interconectate la ieşire; a - sistemul 1 (ecuaţia (3.36)) cazul $S_{01} = 0$, b - sistemul 2 (ecuaţia (3.33)), c - ansamblul sistemelor 1 şi 2 (ecuaţia (3.36))

iar ecuaţia (3.33) rămâne neschimbată. Graficele corespunzătoare sunt prezentate în fig.III.20.

Din (3.35), (3.28) şi $S_{01} = 0$ rezultă că (3.36) este în acelaşi timp şi ecuaţia caracteristicii statice echivalente a ansamblului celor două sisteme interconectate la ieşire. Mărimea reglată y_s este invariantă în raport cu perturbaţia globală w_s. Aceasta se repartizează între sistemele componente în modul deja prezentat, dar modificarea repartiţiei perturbaţiilor parţiale w_{s1} şi w_{s2} este acum posibilă numai prin parametrii y_{02} şi S_{02} ai celui de al doilea sistem.

În cazul în care ambele sisteme automate au câte o componentă integratoare (I) pe calea directă, rezultă $S_{01} = S_{02} = 0$ şi ecuaţiile (3.32) şi (3.33) devin:

$$y_s = y_{ps1}, y_s = y_{ps2}. \tag{3.37}$$

Sistemul de ecuaţii (3.37) este (matematic) imposibil, exceptând cazul:

$$y_{ps1} = y_{ps2}. \tag{3.38}$$

Deşi condiţia (3.38) rezolvă problema existenţei unei soluţii a sistemului (3.37), din punct de vedere practic condiţia (3.38) nu este nicidecum satisfăcătoare, deoarece ea trebuie realizată foarte precis şi în plus variaţii oricât de mici ale valorilor prescrise (de referinţă) y_{ps1} şi y_{ps2} conduc la (3.37) cu:

$$y_{ps1} \neq y_{ps2}. \tag{3.39}$$

În cazul unor sisteme automate reale interconectate la ieşire, de exemplu în cel al unor generatoare electrice de c.c. (cu reglare automată de tensiune) conectate în paralel, situaţia (3.37), (3.39) trebuie evitată deoarece lipsa unei repartizări controlate a perturbaţiei între sistemele automate poate conduce la depăşirea limitelor normale de funcţionare. Referitor la exemplul a două generatoare electrice, una dintre maşinile electrice (şi anume cea a cărei mărime prescrisă (de referinţă) este mai mică) intră în regim de motor electric. O astfel de situaţie este anormală având în vedere că respectiva maşină electrică este antrenată de un motor termic care ar trebui să-i asigure funcţionarea în regim de generator electric.

Exemplul 3.1

Se consideră sistemul de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. de la exemplele 2.1 şi 2.2 (fig.III.15). Se cere să se determine caracteristica statică $\omega_s = f(m_s)$ în următoarele cazuri: regulator P; regulator PI; regulator P şi aplicarea principiului compensaţiei.

Conform rezultatelor de la exemplele 2.1 şi 2.2 şi relaţiilor (3.29) şi (3.30), funcţiile de transfer care trebuie avute în vedere sunt:

$$G(s)=\frac{k_g k_2 k G_R(s)}{(Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2},\ G_w(s)=-\frac{Ls+R}{(Ls+R)(J+k_3)+k_1k_2},$$

$G_p(s)=k_p,\ \ G_t(s)=k_t.$

În $G_w(s)$ a fost inclus şi semnul "–" deoarece cuplul de sarcină $m>0$ crescător determină o scădere a vitezei unghiulare ω.

Caracteristica statică a sistemului considerat are ecuaţia: $\omega_s=\omega_0+S_0m_s$

a) Funcţia de transfer a regulatorului P este $G_R(s)=k_R$. Conform relaţiilor (3.29) şi (3.30) se obţine:

$$\omega_0=\frac{k_pk_gk_2k_Rk}{Rk_3+k_1k_2+k_tk_gk_2k_Rk}\omega_{ps},\quad S_0=-\frac{R}{Rk_3+k_1k_2+k_tk_gk_2k_Rk}.$$

Panta S_0 poate fi modificată cu ajutorul parametrului acordabil k_R între limitele:

- pentru $k_R=0$, $S_0=-R/(Rk_3+k_1k_2)$, care este panta caracteristicii statice a motorului (neautomatizat);
- pentru $k_R\to+\infty$, $S_0\to0$.

O dată ales k_R pentru stabilirea pantei, valoarea de mers în gol, ω_0, se stabileşte prin valoarea prescrisă (de referinţă) ω_{ps}.

b) Funcţia de transfer a regulatorului PI este $G_R(s)=k_R+1/T_1s$; rezultă $G_R(0)=+\infty$. Conform relaţiilor (3.29) şi (3.30) se obţine: $\omega_0=(k_p\omega_{ps})/k_t,\ S_0=0$.

Prin etalonarea adecvată a elementului de prescriere (referinţă) se poate realiza $k_p=k_t$, ceea ce implică $\omega_0=\omega_{ps}$. Se obţine caracteristica statică: $\omega_s=\omega_{ps}$, care asigură independenţa, în regim staţionar, a mărimii reglate (viteza unghiulară ω_s) de perturbaţie (cuplul de sarcină m_s).

c) Aplicarea principiului compensaţiei constă, ca soluţie de principiu, în introducerea unui traductor de cuplu de sarcină (se montează pe axul motorului între motor şi maşina acţionată), cu funcţia de transfer $G_{tm}(s)=k_{tm}$, şi a unui amplificator, cu funcţia de transfer $G_{am}(s)=k_{am}$, conform schemei din fig.III.21 (ca parte integrantă a schemei din fig.III.15).

Funcţiile de transfer $G(s)$, $G_p(s)$, $G_t(s)$ şi $G_0(s)$, cu $G_R(s)=k_R$, rămân neschimbate. Datorită legăturii de la m la u_c (fig.III.21) funcţia de transfer $G_w(s)$, ţinând seama şi de fig.II.20, devine:

$$G_w(s)=\frac{\pm k_{tm}k_{am}k_gk_2k-(Ls+R)}{(Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2}.$$

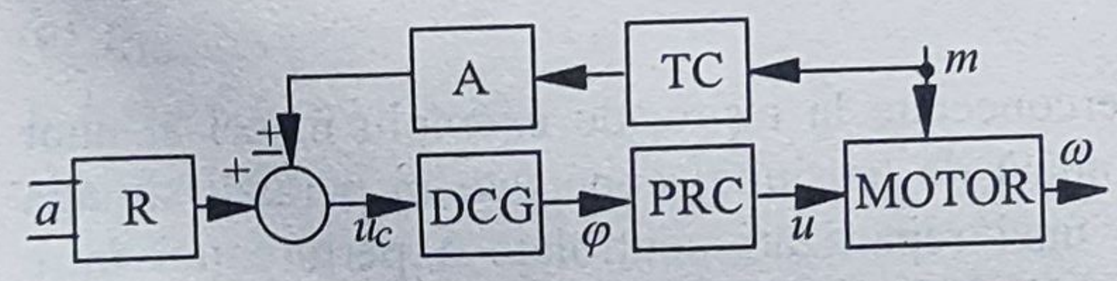


Fig.III.21. Aplicarea principiului compensaţiei la exemplul 3.1, punctul c; TC - traductorul de cuplu, A - amplificator, R - regulatorul, DCG - dispozitivul de comandă pe grilă, PRC - puntea redresoare comandată (a se vedea şi schema din fig.III.15)

În aceste condiţii ω_0 are expresia de la punctul a.

În schimb, conform formulei (3.30), S_0 are acum expresia:

$$S_0=\frac{\pm k_{tm}k_{am}k_gk_2k-R}{Rk_3+k_1k_2+k_tk_gk_2k_Rk}.$$

Panta S_0 poate fi modificată între limite relativ largi cu ajutorul parametrului ajustabil $k_{am}\geq0$, ceea ce asigură flexibilitate în stabilirea formei caracteristicii statice $\omega_s=f(m_s)$.■

3.5. Senzitivitatea la variaţia parametrilor

Sistemele dinamice, oricare ar fi natura lor, se află sub influenţa mediului în care funcţionează. Ca urmare parametrii lor se modifică în timp conform schimbării în timp a factorilor mediului ambiant.

În cazul sistemelor cu structură deschisă variațiile parametrilor influențează direct transferul întrare-ieşire, respectiv mărimea de ieşire.

Spre deosebire de această situație, în cazul sistemelor dinamice cu structură închisă, cu reacție negativă, variațiile parametrilor sunt sesizate de sistem datorită variației subsecvente a abaterii. Sistemul, acționând în sensul diminuării sau chiar al anulării abaterii, determină efectiv micşorarea abaterii a cărei consecință este o reducere a efectului variațiilor parametrilor asupra mărimii de ieşire. O astfel de comportare nu poate fi pusă în evidență în cazul sistemelor dinamice cu structură deschisă.

În cazul sistemelor automate (fig.III.16), în ipoteza:

$$\left|1+G(s)G_t(s)\right| \cong \left|G(s)G_t(s)\right| >> 1 \tag{3.40}$$

(admisă prin (3.15)) şi conform relației (2.1), cu (3.1), pentru $W(s) \equiv 0$, se poate scrie:

$$\left|Y(s)\right| = \left|\frac{G(s)}{1+G(s)G_t(s)}\right|\left|U(s)\right| \cong \frac{1}{\left|G_t(s)\right|}\left|U(s)\right|. \tag{3.41}$$

Ipoteza (3.40) şi rezultatul (3.41) au drept consecință faptul că $Y(s)$ este afectat cel mai mult de variațiile parametrilor traductorului şi într-o măsură mult mai mică de cele ale parametrilor elementelor de pe calea directă. Iată de ce trebuie acordată o atenție deosebită calității tuturor elementelor care constituie un sistem automat (fig.III.14), cu un accent special în ceea ce priveşte calitatea traductorului. Acesta trebuie să aibă precizia specificată în tema de proiectare şi parametri cât mai constanți în timp, respectiv cât mai puțin dependenți de factorii mediului ambiant. În aceste circumstanțe se poate afirma că, sub aspectul calității, un sistem automat nu poate fi în nici un caz mai bun decât traductorul cu care respectivul sistem este echipat.

Pentru evaluarea/aprecierea senzitivității unui sistem automat în raport cu variațiile parametrilor se utilizează funcțiile de senzitivitate ale sistemului automat.

În scopul introducerii cât mai naturale a acestor funcții se face mai întâi o comparație între efectele variațiilor parametrilor în cazurile sistemelor cu structură deschisă şi respectiv închisă, cu reacție negativă.

În cazul unui sistem dinamic cu structură deschisă descris de ecuația:

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{3.42}$$

se are în vedere că datorită variației parametrilor funcția de transfer $G(s)$ devine $G(s)+\Delta G(s)$. Variația $\Delta G(s)$ produce la ieşire variația $\Delta Y(s)$, care, în virtutea liniarității, se exprimă prin:

$$\Delta Y(s) = \Delta G(s)U(s). \tag{3.43}$$

În cazul unui sistem automat (sistem cu structură închisă, cu reacție negativă) descris de ecuația (2.1) (cu $W(s)\equiv 0$, pentru simplificare), înlocuind $G(s)$ cu $G(s)+\Delta G(s)$ se obține:

$$Y(s)+\Delta Y(s) = \frac{G(s)+\Delta G(s)}{1+[G(s)+\Delta G(s)]G_t(s)}U(s),$$

din care rezultă:

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{\left[1+G(s)G_t(s)+\Delta G(s)G_t(s)\right]\left[1+G(s)G_t(s)\right]}U(s). \tag{3.44}$$

Pentru $\left|G(s)\right| >> \left|\Delta G(s)\right|$ din (3.44) se obține:

$$\Delta Y(s) \cong \frac{\Delta G(s)}{\left[1+G(s)G_t(s)\right]^2}U(s). \tag{3.45}$$

Comparând (3.45) cu (3.43) rezultă că efectul lui $\Delta G(s)$ asupra lui $\Delta Y(s)$ este mult mai redus în cazul sistemelor automate, mai ales atunci când are loc (3.15).

1° Senzitivitatea la variaţia parametrilor căii directe

Pentru a implica considerentul de ordin comparativ deja enunţat şi pentru a exclude influenţa mărimii $U(s)$, senzitivitatea $S_0{}^G$ a unui sistem automat la variaţia parametrilor căii directe se defineşte sub forma raportului dintre variaţia relativă a funcţiei de transfer a sistemului automat şi variaţia relativă a funcţiei de transfer a căii directe. Se poate scrie:

$$S_0^G = \frac{\Delta G_0 / G_0}{\Delta G / G}.$$

Trecând la limită pentru $\Delta G \to 0$ se obţine:

$$S_0^G = \frac{\partial G_0 / G_0}{\partial G / G} = \frac{\partial(\ln G_0)}{\partial(\ln G)}. \tag{3.46}$$

Desigur că, într-o formă corespunzător adaptată, definiţia (3.46) poate fi utilizată şi în cazul unui sistem dinamic cu structură deschisă. Se scrie:

$$S^G = \frac{\partial(\ln G)}{\partial(\ln G)} = 1. \tag{3.47}$$

Senzitivitatea este o funcţie de variabilă complexă. Aprecierea efectivă a gradului de senzitivitate se face cu ajutorul valorilor funcţiei de senzitivitate. Valoarea nulă a modulului ei arată că sistemul corespunzător este insenzitiv la variaţia parametrilor; o valoare strict pozitivă indică un anumit grad de senzitivitate la variaţia parametrilor. În aceste circumstanţe (3.47) arată că un sistem cu structură deschisă are o senzitivitate ridicată la variaţia parametrilor.

Având în vedere ecuaţia (2.1) a transferului intrare-ieşire, în mod similar cu (3.46), se defineşte şi funcţia de senzitivitate:

$$S_{0w}^G = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G / G} = \frac{\partial(\ln G_{0w})}{\partial(\ln G)}. \tag{3.48}$$

În cazul sistemului automat descris de (2.1), cu (2.2) şi (2.3), aplicând (3.46) şi (3.48) se obţin respectiv:

$$S_0^G = \frac{\partial G_0}{\partial G}\frac{G}{G_0} = \frac{1}{1+GG_t} \tag{3.49}$$

$$S_{0w}^G = \frac{\partial G_{0w}}{\partial G}\frac{G}{G_{0w}} = \frac{-GG_t}{1+GG_t}. \tag{3.50}$$

În ipoteza (3.40) rezultă $S_0{}^G \cong 0$ şi $|S_{0w}{}^G| \cong 1$ care indică o senzitivitate foarte mică respectiv mare în raport cu variaţia parametrilor căii directe.

2° Senzitivitatea la variaţia parametrilor căii perturbaţiei

De această dată este vorba de variaţiile parametrilor funcţiei de transfer G_w care devine $G_w+\Delta G_w$. Senzitivitatea în acest caz se defineşte prin:

$$S_{0w}^{G_w} = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G_w / G_w} = \frac{\partial(\ln G_{0w})}{\partial(\ln G_w)}. \tag{3.51}$$

Aplicând (3.51) funcţiei de transfer (2.3) rezultă:

$$S_{0w}^{G_w} = \frac{\partial G_{0w}}{\partial G_w}\frac{G_w}{G_{0w}} = 1 \tag{3.52}$$

ceea ce indică o senzitivitate ridicată.

3° Senzitivitatea la variaţia parametrilor căii de reacţie

Se au în vedere variaţiile parametrilor traductorului, ceea ce înseamnă că funcţia de transfer G_t devine $G_t+\Delta G_t$. În acest caz se pot defini următoarele două funcţii de senzitivitate:

$$S_0^{G_t} = \frac{\partial G_0 / G_0}{\partial G_t / G_t} = \frac{\partial(\ln G_0)}{\partial(\ln G)}, \tag{3.53}$$

$$S_{0w}^{G_t} = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G_t / G_t} = \frac{\partial(\ln G_{0w})}{\partial(\ln G_t)}. \tag{3.54}$$

În cazul sistemului automat descris de (2.1), cu (2.2) şi (2.3), aplicând (3.53) şi (3.54) se obţin respectiv:

$$S_0^{G_t} = \frac{\partial G_0}{\partial G_t}\frac{G_t}{G_0} = -\frac{GG_t}{1+GG_t}, \tag{3.55}$$

$$S_{0w}^{G_t} = \frac{\partial G_{0w}}{\partial G_t}\frac{G_t}{G_{0w}} = -\frac{GG_t}{1+GG_t}. \tag{3.56}$$

În ipoteza (3.40) rezultă că $\left|S_0^{G_t}\right| = \left|S_{0w}^{G_t}\right| \cong 1$, ceea ce denotă o senzitivitate ridicată la variaţia parametrilor căii de reacţie.

Relaţiile (3.49), (3.50), (3.51), (3.55) şi (3.56) explicitează în fond noi aspecte ale principiului abaterii. În acest sens trebuie subliniat că senzitivitatea transferului $u \to y$ al unui sistem automat, evaluată prin ${S_0}^G$ (relaţia (3.49)), este de regulă redusă. În acelaşi timp nu se poate formula o afirmaţie similară despre senzitivităţile evaluate prin ${S_{0w}}^G$, ${S_{0w}}^{Gw}$, ${S_0}^{Gt}$ şi ${S_{0w}}^{Gt}$. Iată de ce în situaţiile în care se ştie că anumiţi parametri ai unui sistem automat se modifică în timp sub acţiunea factorilor de mediu sau a altor cauze este necesar să se adopte soluţii de proiectare care asigură reducerea senzitivităţii, dar fără ca prin aceasta să se reducă peste limitele admisibile calităţile de stabilitate BIBO.

Exemplul 3.2

Se consideră sistemul de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. (cu regulator P) de la exemplul 3.1. În situaţia în care parametrul k (factorul de amplificare al punţii redresoare comandate, dependent de tensiunea reţelei electrice de alimentare) se modifică în timp, se cere să se studieze funcţiile de senzitivitate ${S_0}^k$ şi ${S_{0w}}^k$ pentru regimul staţionar şi să se găsească valoarea parametrului acordabil k_R al regulatorului care asigură valori acceptabile ale funcţiilor ${S_0}^k$ şi ${S_{0w}}^k$.

Conform rezultatelor de la exemplul 3.1, funcţiile de transfer $G_0(0)$ şi $G_{0w}(0)$ necesare determinării celor două funcţii de senzitivitate se pot obţine din caracteristica statică de la exemplul 3.1, punctul a. Acestea au expresiile: $G_0(0) = ak_Rk/(b+ck_Rk)$, $G_{0w}(s) = -R/(b+ck_Rk)$ în care s-au utilizat notaţiile: $a = k_gk_2$, $b = Rk_3+k_1k_2$ şi $c = k_ta$, cu $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Conform relaţiilor (3.49) şi (3.50) se pot scrie: $S_0^k = b/(b+ck_Rk)$, $|S_{0w}^k| = ck_Rk/(b+ck_Rk)$ care, în mod evident, satisfac identitatea $S_0^k + |S_{0w}^k| = 1$. Graficele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.III.22.

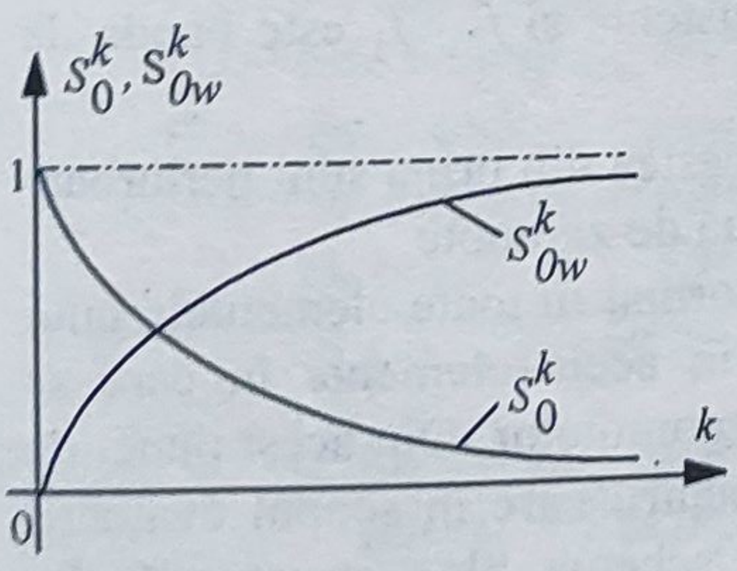


Fig.III.22. Graficele funcţiilor de senzitivitate la exemplul 3.2.

Dacă se acordă o importanţă egală celor două funcţii de senzitivitate, atunci soluţia corespunzătoare este: $S_0^k = |S_{0w}^k|$ din care rezultă: $k_Rk = b/c$.

Pentru $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ în care $k_{\min}$ şi $k_{\max}$ sunt cunoscute, rezultă că valoarea de acordare a lui k_R se poate alege:

$$k_R = \frac{1}{2}(k_{R\min} + k_{R\max}) = \frac{b}{2c}\left(\frac{1}{k_{\max}} + \frac{1}{k_{\min}}\right).$$

Este relativ uşor de observat că soluţia $S_0{}^k=|S_{0w}^k|$ corespunde minimului funcţiei: $\Im(k) = [(S_0{}^k)^2 + |S_{0w}^k|^2]/2$

Într-adevăr, se poate scrie: $\frac{d\Im(k)}{dk} = \frac{bck_R}{(b+ck_Rk)^3}(-b+ck_Rk) = 0$, din care rezultă soluţia deja obţinută: $k_Rk = b/c$.

În general se poate considera funcţionala: $\Im(k) = (\alpha(S_0{}^k)^2 + \beta|S_{0w}^k|^2)/2$ în care $\alpha > 0$, $\beta > 0$, cu $\alpha+\beta = 1$, sunt coeficienţi de ponderare prin care se acordă o importanţă diferită celor două funcţii de senzitivitate.

În aceste condiţii din: $d\Im(k)/dk = bck_R[-ab+(1-\alpha)ck_Rk]/(b+ck_Rk)^3 = 0$, rezultă: $k_Rk = ab/(1-\alpha)c$, cu $\alpha \in (0,1)$, fixat. Valoarea de acordare a lui k_R se poate alege: $k_R = (k_{R\min} + k_{R\max})/2 = \alpha b(1/k_{\max} + 1/k_{\min})/2(1-\alpha)c$. ■

3.6. Efectul zgomotelor

S-a arătat în paragraful precedent că pentru a obţine o senzitivitate redusă la variaţia parametrilor elementelor de pe calea directă (a conexiunii cu reacţie negativă) este necesar ca elementul de pe calea de reacţie negativă (traductorul) să fie de foarte bună calitate (cu variaţii foarte reduse ale parametrilor). În cadrul posibilităţilor tehnice de realizare a unor traductoare de foarte bună calitate soluţia uzuală constă în miniaturizarea, respectiv în conceperea şi construirea unor dispozitive care procesează semnale de foarte mică putere. Micşorarea puterii utile procesate de traductoare nu poate fi nelimitată deoarece aceste semnale pot deveni comparabile cu aşa numitele *zgomote*.

În mod generic (şi metaforic) prin zgomote se înţeleg fenomene perturbatoare, de natură stohastică, cu cele mai diverse origini, care se manifestă de regulă inerent, inevitabil şi independent de semnalele utile, în înseşi componentele fizice din care sunt constituite sistemele reale. Ele sunt produse de surse naturale sau de alte sisteme tehnice (ca efecte secundare, de regulă neintenţionate) şi după natura fizică pot fi: electrice, mecanice, fluidice etc.

Sursele de zgomot sunt de mare diversitate şi se pot aminti aici câteva dintre cele mai importante: agitaţia termică (a atomilor şi electronilor), radiaţiile radioactive, radiaţia cosmică, undele electromagnetice (radio, comunicaţii cu fir, linii de transport de energie) receptate accidental (de componentele unui sistem automat) prin efect de antenă sau prin inducţie.

În circuitele electronice cea mai importantă sursă de zgomot este agitaţia termică a electronilor. Din acest motiv se mai vorbeşte şi despre zgomotul termic din dispozitivele şi circuitele electronice. El se manifestă în toate elementele de circuit pasive sau active (rezistenţe, joncţiuni etc.). Valoarea eficace a tensiunii la recepţie a unui zgomot termic este dată de formula lui Nyquist: $E = 2\sqrt{kTR(f_2 - f_1)}\,[V]$, în care $k = 1{,}37\cdot10^{-3}$Ws/grad este constanta lui Bolzman, T este temperatura absolută, R este rezistenţa şi $f_2 - f_1$ este banda de frecvenţe la recepţie.

Dacă zgomotele au nivele comparabile cu semnalele utile, acestea din urmă sunt perturbate în sensul că informaţia utilă este mai mult sau mai puţin falsificată de zgomote.

Trebuie remarcat faptul că zgomotele se manifestă în mod normal în toate elementele unui sistem automat, dar ele au un efect perturbator clar numai în acele elemente în care se procesează semnale utile de nivel redus, comparabil cu nivelul zgomotelor. Din acest punct de vedere elementul cel mai defavorizat este traductorul, motiv pentru care în scopul evaluării efectului zgomotelor asupra unui sistem automat se adoptă schema bloc structurală din fig.III.23, în care sursa de zgomot este plasată la ieşirea traductorului.

Din această schemă rezultă că efectul zgomotului $Z(s)$ poate fi comparabil cu al mărimii (prescrise) $U(s)$, fapt confirmat de relația intrare - ieşire:

$$Y(s) = G_0(s)U(s) - G_0(s)Z(s)$$

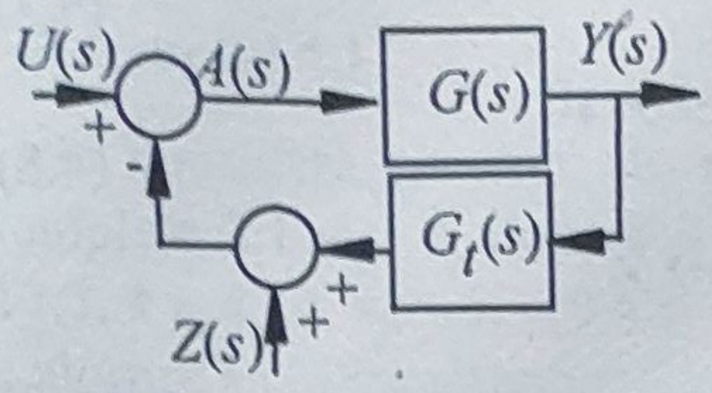


Fig.III.23. Schema bloc structurală pentru evaluarea efectului zgomotului

sau de expresia abaterii:

$$A(s) = \frac{1}{1 + G(s)G_t(s)}\left[U(s) - Z(s)\right]. \tag{3.57}$$

Dacă se realizează condiția (3.15) şi pentru acei s pentru care $|Z(s)|$ are valori mari, atunci cea de a două componentă din (3.57), cauzată de zgomot, poate fi redusă la valori acceptabile. Este însă de domeniul evidenței că principalul mijloc de reducere a efectului zgomotului constă în reducerea lui $|Z(s)|$, adică prin conceperea şi construcția unor traductoare de foarte bună calitate şi cu zgomot (propriu sau receptat din alte dispozitive sau sisteme) cât mai redus.

4. Stabilitatea

4.1. Polii şi zerourile sistemului automat

Se au în vedere schema bloc structurală standard din fig.III.16 şi ecuația transferului intrare - ieşire (2.1), cu (2.2), (2.3), în care $G_p(s) = k_p$, aşa cum s-a arătat în alineatul introductiv de la începutul subcap.3.

În legătură cu funcțiile de transfer (2.2) şi (2.3) se ține seama că:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q_a(s)Q_b(s)}{P_a(s)P_b(s)} \tag{4.1}$$

$$G_t(s) = \frac{Q_t(s)}{P_t(s)}, \tag{4.2}$$

$$G_w(s) = \frac{Q_w(s)}{P_a(s)}, \tag{4.3}$$

în care:

$P(s)$ este polinomul polilor căii directe, $P_a(s)$ este polinomul polilor instalației automatizate şi $P_b(s)$ este polinomul polilor regulatorului şi elementului de execuție;
$Q(s)$ este polinomul zerourilor căii directe, $Q_a(s)$ este polinomul zerourilor instalației automatizate ($P_a(s)$ şi $Q_a(s)$ sunt relativ prime între ele) şi $Q_b(s)$ este polinomul zerourilor regulatorului şi elementului de execuție ($P_b(s)$ şi $Q_b(s)$ sunt relativ prime între ele);
$P_t(s)$ este polinomul polilor căii de reacție;
$Q_t(s)$ este polinomul zerourilor căii de reacție ($P_t(s)$ şi $Q_t(s)$ sunt relativ prime între ele);
$Q_w(s)$ este polinomul zerourilor căii perturbației ($P_a(s)$ şi $Q_w(s)$ sunt relativ prime între ele).
În aceste circumstanțe din (2.2), (2.3), cu (4.1)–(4.3), rezultă respectiv:

$$G_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{Q(t)P_t(s)}{P(s)P_t(s) + Q(s)Q_t(s)}, \tag{4.4}$$

$$G_{0w}(s) = \frac{Q_{0w}(s)}{P_0(s)} = \frac{Q_w(t)P_t(s)P_b(s)}{P(s)P_t(s) + Q(s)Q_t(s)}, \tag{4.5}$$

în care:

$$P_0(s) = P(s)P_t(s) + Q(s)Q_t(s) \tag{4.6}$$

este polinomul polilor sistemului automat,

$$Q_0(s) = Q(s)P_t(s)\ . \tag{4.7}$$

este polinomul zerourilor sistemului automat pentru transferul $u \to y$, şi:

$$Q_{0w}(s) = Q_w(s)P_t(s)P_b(s) \tag{4.8}$$

este polinomul zerourilor sistemului automat pentru transferul $w \to y$.

Din (4.7) şi (4.8) rezultă respectiv următoarele:

a) mulţimea zerourilor sistemului automat pentru transferul $u \to y$ este egală cu reuniunea mulţimii zerourilor căii directe şi a mulţimii polilor căii de reacţie;

b) mulţimea zerourilor sistemului automat pentru transferul $w \to y$ este egală cu reuniunea mulţimii zerourilor căii perturbaţiei, a mulţimii polilor regulatorului şi elementului de execuţie şi a mulţimii polilor căii de reacţie.

Spre deosebire de această situaţie, din (4.6) rezultă că:

c) mulţimea polilor sistemului automat este în general diferită de reuniunea mulţimilor polilor căii directe şi ai căii de reacţie şi ale zerourilor căii directe şi ale căii de reacţie.

Se spune că reacţia negativă *alocă* polii şi (parţial) zerourile sistemului automat. În privinţa zerourilor se poate afirma că zerourile căii directe şi ale căii perturbaţiei sunt invariante în raport cu reacţia negativă deoarece aceste zerouri se regăsesc (nemodificate) ca zerouri ale sistemului automat respectiv pentru transferurile $u \to y$ şi $w \to y$.

Alocarea efectivă a polilor sistemului automat se realizează cu ajutorul anumitor parametri ajustabili ai căii directe (în speţă ai regulatorului) şi ea are ca scop localizarea polilor sistemului automat astfel încât să se asigure în primul rând stabilitatea BIBO şi apoi, în funcţie de cerinţele tehnologice, valori acceptabile pentru indicii de calitate. În acest context, din (4.4), (4.5) şi respectiv (4.7), (4.8) rezultă că indicii de calitate, în general, nu pot avea valori identice pentru transferurile $u \to y$ şi $w \to y$ deoarece zerourile sistemului automat pentru cele două transferuri sunt în general diferite şi în consecinţă şi răspunsurile indiciale corespunzătoare sunt diferite.

În cazul particular în care traductorul este un element de tip P, adică:

$$G_t(s) = k_t, \tag{4.9}$$

din relaţiile (4.4) - (4.8) se obţin următoarele:

$$G_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{Q(s)}{P(s) + k_t Q(s)}, \tag{4.10}$$

$$G_{0w}(s) = \frac{Q_{0w}(s)}{P_0(s)} = \frac{Q_w(s)P_b(s)}{P(s) + k_t Q(s)}, \tag{4.11}$$

$$P_0(s) = P(s) + k_t Q(s)\ . \tag{4.12}$$

$$Q_0(s) = Q(s), \tag{4.13}$$

$$Q_{0w}(s) = Q_w(s)P_b(s). \tag{4.14}$$

Se constată că în cazul particular (4.9) se produc unele modificări ale concluziilor a - c.

Astfel, din (4.13) şi (4.14) rezultă respectiv:

a') mulţimea zerourilor sistemului automat pentru transferul $u \to y$ este egală cu mulţimea zerourilor căii directe;

b') mulţimea zerourilor sistemului automat pentru transferul $w \to y$ este egală cu reuniunea mulţimii zerourilor căii perturbaţiei şi a mulţimii polilor regulatorului şi elementului de execuţie.

Similar din (4.12) rezultă că:

c') mulţimea polilor sistemului automat este în general diferită de reuniunea mulţimii polilor căii directe şi a mulţimii zerourilor căii directe.

Exemplul 4.1

Se consideră sistemul de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. de la exemplele 2.1 şi 2.2, în care $R = 0{,}15$, $L = 0{,}01$, $J = 300$, k_1=11,8, $k_2 = 11{,}5$, $k_3 = 10$, k_g = =11,3, $k = 4{,}72$, $k_p = k_t = 0{,}6$ şi $G_R(s) = k_R$ (regulator tip P). Se cere să se studieze posibilitatea de alocare a polilor sistemului automat cu ajutorul parametrului acordabil k_R.

Conform rezultatelor de la exemplul 2.2 se pot scrie funcţiile de transfer:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{613{,}36k_R}{3s^2 + 45{,}1s + 137{,}2}, \; G_t(s) = \frac{Q_t(s)}{P_t(s)} = 0{,}6.$$

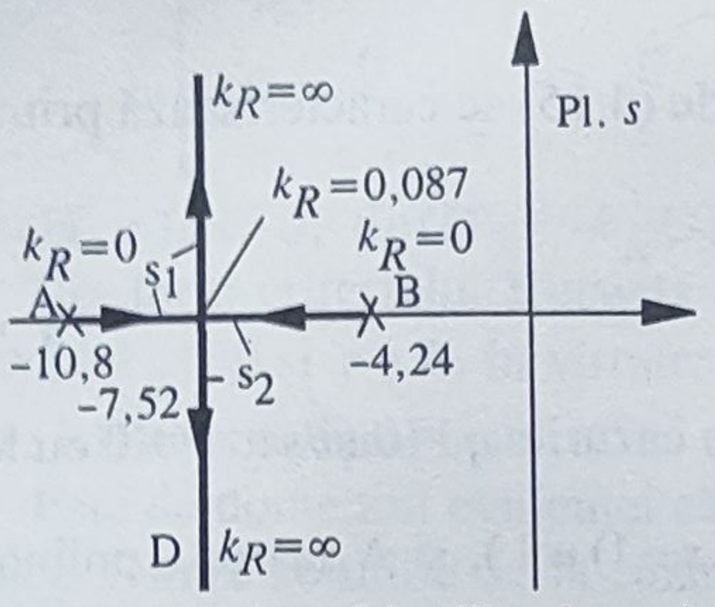


Fig.III.24. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 4.1 (locul geometric al polilor pentru $k_R \in [0,+\infty)$)

Polinomul polilor sistemului automat are expresia:

$$P_0(s) = 3s^2 + 45{,}1s + 137{,}2 + 368{,}02k_R.$$

Cei doi poli:

$$s_{1,2} = \begin{cases} -7{,}52 \pm 3{,}28\sqrt{1 - 11{,}39k_R}, \; 0 \le k_R \le 0{,}087, \\ -7{,}52 \pm j3{,}28\sqrt{11{,}39k_R - 1}, k > 0{,}087, \end{cases}$$

parcurg, pentru $k_R \in [0,+\infty)$, hodograful din fig.III.24.

Rezultă că parametrul acordabil k_R nu asigură o alocare complet arbitrară a polilor $s_{1,2}$, ci numai pe segmentul de dreaptă AB (poli reali) şi pe dreapta D (poli complex conjugaţi). Săgeţile indică sensul de parcurgere a hodografului atunci când parametrul k_R creşte de la 0 la $+\infty$.■

4.2. Stabilitatea structurală

Cunoaşterea polinomului polilor (4.6) permite analiza stabilităţii BIBO a sistemului automat. În acest scop se utilizează rezultatele prezentate în subcap.II.6.

Având în vedere că proprietăţile de stabilitate BIBO ale sistemului automat depind de parametrii acordabili ai regulatorului şi în general de toţi parametrii sistemului automat, o problemă deosebit de importantă, inclusiv din punctul de vedere al alegerii regulatorului, este aceea a stabilităţii structurale.

Definiţia 1

Un sistem dinamic se numeşte *BIBO structural stabil* dacă domeniul său de BIBO stabilitate parametrică este nevid.■

Procedura de determinare a domeniului de BIBO stabilitate parametrică a fost expusă la II.6.7. Determinarea efectivă a acestui domeniu pentru sisteme de ordin superior (mai mare decât 3) şi cu număr mare de parametri acordabili implică un considerabil efort de calcul. Este important ca în astfel de situaţii, înainte de aplicarea procedurii de la II.6.7, să se afle dacă sistemul analizat este sau nu BIBO structural stabil.

Se ştie că stabilitatea BIBO a unui sistem automat se analizează cu ajutorul polinomului polilor (4.6). Funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis (a buclei deschise) este:

$$G(s)G_t(s) = M(s)/N(s), \tag{4.15}$$

în care $M(s)$ şi $N(s)$ sunt două polinoame relativ prime între ele (adică nu au factori comuni, respectiv dacă astfel de factori au existat, ei au fost deja simplificaţi).

Conform relaţiilor (4.1), (4.2) şi (4.6) rezultă că:

$$M(s) = Q(s)Q_t(s) \tag{4.16}$$

$$N(s) = P(s)P_t(s) \tag{4.17}$$

şi polinomul polilor sistemului automat are expresia:

$$P_0(s) = N(s) + M(s). \tag{4.18}$$

Introducând notaţiile:

$$m = \text{grad } M(s) \tag{4.19}$$

$$n = \text{grad } N(s) \tag{4.20}$$

şi admiţând că $m \geq 0$ şi $n > m$, din (4.18) - (4.20) rezultă: grad $P_0(s) = n$.

Teorema 1 (Aizerman - Gantmaher)

Sistemul în circuit deschis (în buclă deschisă) reprezentat de (4.15) se caracterizează prin:

a) $M(s)$ este polinom hurwitzian.

b) $N(s)$ poate fi factorizat după cum urmează:

$$N(s) = s^p \prod_1^q (a_i s^2 + 1) \prod_1^r (b_j s - 1)\, N_1(s), \tag{4.21}$$

în care $p \geq 0$, $a_i > 0$, $i = \overline{1,q}$, $b_j > 0$, $j = \overline{1,r}$, $q \geq 0$ şi $r \geq 0$ (în cazurile $q = 0$ şi/sau $r = 0$ au loc prin definiţie: $\prod_1^{q=0}(a_i s^2 + 1) \equiv 1$ şi/sau respectiv $\prod_1^{r=0}(b_j s - 1) \equiv 1$), şi $N_1(s)$ este polinom hurwitzian de grad $n - \rho$, cu $\rho = p + 2q + r$.

O condiţie necesară şi suficientă ca sistemul automat să fie BIBO structural stabil este ca să fie satisfăcute următoarele inegalităţi:

1° $p + r \leq m + 1$;

2° m, n şi ρ conform tabelului:

ρ \ m	$m = 0$	m – par	m – impar
ρ - par	$n > 2\rho$	$m + n > 2\rho - 1$	$m + n > 2(\rho - 1)$
ρ - impar	$n > 2(\rho - 1)$	$m + n > 2(\rho - 1)$	$m + n > 2\rho - 1$

■

Exemplul 4.2

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.III.16 în care:

$$G(s) = G_R(s)G_F(s), \quad G_F(s) = k/(T^2 s^2 + 1), \quad G_w(s) = 0, \quad G_p(s) \equiv G_t(s) = 1.$$

Se cere să se determine $G_R(s)$ (funcţia de transfer a regulatorului) astfel încât sistemul automat să fie BIBO structural stabil.

Este evident că:

$$G(s)G_t(s) = G_R(s)k/(T^2 s^2 + 1).$$

Cazul I: $G_R(s)$ are toţi polii şi zerourile în $\{\text{Re } s < 0\}$. Rezultă $p = 0$, $q = 1$, $r = 0$ şi $\rho = 2$.

Inegalitatea 1° din teorema 1 are forma: $0 \leq m + 1$.

a. Se adoptă $m = 0$. Inegalitatea 2° din teorema 1 are forma: $n > 4$. Se adoptă $n = 5$, ceea ce înseamnă că: $G_R(s) = k_R/(s^3 + as^2 + bs + c)$, în care polinomul de la numitor este hurwitzian şi $k_R > 0$.

b. Se adoptă $m = 1$. Inegalitatea 2° din teorema 1 are forma: $n + 1 > 2$. Se adoptă $n = 2$, ceea ce înseamnă că: $G_R(s) = k_R(\tau s + 1)$, cu $k_R > 0$, $\tau > 0$.

Cazul II: $G_R(s)$ are un pol în $s = 0$, restul de poli şi toate zerourile fiind situate în $\{\text{Re } s < 0\}$.

Rezultă $p = 1, q = 1, r = 0$ şi $\rho = 3$. Inegalitatea 1° din teorema 1 are forma: $1 \le m + 1$.

a. Se adoptă $m = 0$. Inegalitatea $2°$ din teorema 1 are forma : $n > 4$. Se adoptă $n = 5$, ceea ce înseamnă că: $G_R(s)=k_R/s(s^2+as+b),\ k_R>0,\ a>0,\ b>0$.

b. Se adoptă $m = 1$. Inegalitatea $2°$ din teorema 1 are forma: $n + 1 > 5$. Se adoptă $n = 5$, ceea ce înseamnă că: $G_R(s)=k_R(\tau s+1)/s(s^2+as+b),\ k_R>0,\ \tau>0,\ a>0,\ b>0$.

Cazul III: $G_R(s)$ se adoptă, fără a ţine seama de teorema 1, de exemplu de forma: $G_R(s)= k_R/(\tau s+1),\ \ k_R>0,\ \ \tau>0$. Rezultă că: $G(s)G_t(s) = k_R k/(\tau s+1)(T^2s^2+1)$, $P_0(s)/T^2\tau = s^3+s^2/\tau+s/T^2+(k_Rk+1)/T^2\tau$. Matricea hurwitz asociată acestui polinom este:

$$\mathbf{H}_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} & 1 & 0 \\ (k_Rk+1)/T^2\tau & 1/T^2 & 1/\tau \\ 0 & 0 & (k_Rk+1)/T^2\tau \end{bmatrix},$$ din care rezultă:

$\det\mathbf{H}_1=1/\tau>0$, $\det\mathbf{H}_2=-k_Rk/T^2\tau<0$ şi $\det\mathbf{H}_3=(k_Rk+1)\det\mathbf{H}_2/T^2\tau<0$.

Conform criteriului Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) sistemul automat este BIBO instabil pentru $k_R > 0$ şi $\tau > 0$. În virtutea definiţiei 1 se poate spune că în acest caz sistemul automat este BIBO structural instabil.

Este de domeniul evidenţei că problema regulatorului, în termenii teoremei 1, nu are soluţie unică. Dintre soluţiile de la cazurile I şi II, cea mai simplă este aceea de la cazul I, punctul b (regulator PI).■

Din punctul de vedere al aplicaţiilor, simplitatea condiţiilor $1°$ şi $2°$ ale teoremei 1 permite formularea unor proceduri eficiente de alegere a funcţiei de transfer a regulatorului, aşa cum s-a arătat la exemplului 4.2.

În acelaşi timp teorema 1 confirmă, de această dată în mod riguros, una din calităţile esenţiale ale reacţiei negative şi anume că aceasta are efect stabilizant (a se vedea $1.1°$). Într-adevăr, conform relaţiei (4.21) sistemul în circuit deschis (format din $G(s)G_t(s)$) poate fi BIBO instabil (în cazurile în care cel puţin unul din numerele naturale $p,\ q,\ r$ este nenul). Cu toate acestea sistemul automat (în circuit închis, cu reacţie negativă), în condiţiile $1°$ şi $2°$ ale teoremei 1, este BIBO structural stabil.

Un caz particular relativ frecvent întâlnit în aplicaţii se caracterizează prin $q = 0$, $r = 0$ şi $\rho = p$, cu $p \in \{0,1,2\}$. Teorema 1 se enunţă sub următoarea formă particulară.

Teorema 2

Funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis are expresia:

$$G(s)G_t(s) = \frac{k}{s^p}\frac{b_ms^m + ... + b_1s + 1}{a_ns^n + ... + a_1s + 1}, \qquad (4.22)$$

în care $k > 0$, $p \in \{0,1,2\}$ şi polinoamele $b_ms^m+\ldots+b_1s+1$, $a_ns^n+\ldots+a_1s+1$ sunt hurwitziene şi relativ prime între ele.

Sistemul automat este BIBO structural stabil:

a. pentru $p \in \{0,1\}$ şi orice m şi n, cu $p + n > m \ge 0$.

b. pentru $p = 2$ şi orice m şi n, cu $p + n > m \ge 1$.■

$\mathcal{D}$. Pentru $p \in \{0,1,2\}$, condiţiile $1°$ şi $2°$ ale teoremei 1 se particularizează conform tabelului:

p	Condiţia 1°	Condiţia 2°		
		$m=0$	$m=2,4,6,....$	$m=1,3,5,...$
0	$m \geq 0$	$n \geq 1$	$m+n \geq 0$	$m+n \geq 0$
1	$m \geq 0$	$n \geq 0$	$m+n \geq 0$	$m+n \geq 1$
2	$m \geq 1$	–	$m+n \geq 2$	$m+n \geq 1$

Rezultă că pentru $p+n>m\geq 0$ şi $p\in\{0,1\}$ toate inegalităţile sunt satisfăcute. Pentru $p=2$ condiţia 1° este $m\geq 1$, pentru care condiţia 2° este de asemenea satisfăcută.■

5. Precizia unui sistem automat

5.1. Eroarea; implicaţii ale principiului abaterii

S-a arătat în subcap.3 că abaterea, $A(s)$, a unui sistem automat este produsă şi acţionează efectiv în cadrul sistemului (fig.III.16), este determinată de $U(s)$, $W(s)$ şi $Z(s)$ (fig.III.23) şi în general este neidentic nulă. S-a prezentat şi s-a argumentat faptul că reacţia negativă are efecte favorabile privind reducerea abaterii, în special a componentei sale determinată de perturbaţia $W(s)$.

În acest context este necesar să se afirme în mod explicit că o analiză pertinentă a *preciziei* unui sistem automat trebuie să se bazeze pe noţiunea de *eroare* şi nu pe aceea de abatere.

Prin *eroarea e* a unui sistem automat se defineşte diferenţa dintre mărimea prescrisă (de referinţă) y_p şi mărimea de ieşire y. Se scrie:

$$e=y_p-y. \tag{5.1}$$

Spre deosebire de abatere, eroarea este o mărime virtuală (ea nu este generată şi nu acţionează în cadrul sistemului automat cu schema bloc structurală din fig.III.16) şi se defineşte numai pentru studiul efectiv al preciziei sistemului, evident corelat cu faptul că menirea acestuia este de a realiza $y\equiv y_p$, respectiv $e\equiv 0$ (ca situaţie limită ideală).

Cu referire la schema din fig.III.16 şi relaţia (5.1) se poate scrie:

$$E(s)=Y_p(s)-Y(s)=\left[1-\frac{G_p(s)G(s)}{1+G(s)G_t(s)}\right]Y_p(s)\mp\frac{G_w(s)}{1+G(s)G_t(s)}W(s). \tag{5.2}$$

Se disting două componente ale erorii:

- eroarea în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă):

$$E_p(s)=\left[1-\frac{G_p(s)G(s)}{1+G(s)G_t(s)}\right]Y_p(s); \tag{5.3}$$

- eroarea în raport cu perturbaţia:

$$E_p(s)=\left[1-\frac{G_p(s)G(s)}{1+G(s)G_t(s)}\right]Y_p(s); \tag{5.4}$$

La acestea se poate adăuga şi componenta erorii determinată de zgomotul $Z(s)$ (conform fig.III.23), în eventualitatea că $Z(s)$ are efecte care nu pot fi neglijate.

Situaţia uzuală, în marea majoritate a aplicaţiilor, este aceea în care:

$$G_p(s)=k_p. \tag{5.5}$$

De asemenea, un caz particular frecvent întâlnit în aplicaţii se caracterizează prin:

$$G_t(s)=k_t. \tag{5.6}$$

Pentru (5.5) şi (5.6) se realizează de regulă şi condiţia:

$$k_p = k_t, \tag{5.7}$$

ceea ce, conform relației (5.3) și fig.III.16, conduce la:

$$E_p(s) = \frac{1}{1 + k_t G(s)} \frac{1}{k_t} U(s). \tag{5.8}$$

Întrucât componenta abaterii în raport cu $U(s)$ are expresia:

$$A_p(s) = \frac{1}{1 + k_t G(s)} U(s), \tag{5.9}$$

din (5.8) și (5.9) rezultă:

$$E_p(s) = \frac{1}{k_t} A_p(s). \tag{5.10}$$

Prin operații analoage, din (5.4), (5.6) și (5.7) rezultă:

$$E_w(s) = \frac{G_w(s)}{1 + k_t G(s)} W(s). \tag{5.11}$$

Similar cu (5.9), pentru componenta abaterii în raport cu $W(s)$ se poate scrie:

$$A_w(s) = \frac{k_t G_w(s)}{1 + k_t G(s)} W(s). \tag{5.12}$$

Din (5.11) și (5.12) se obține:

$$E_w(s) = \frac{1}{k_t} A_w(s). \tag{5.13}$$

În aceste circumstanțe din (5.2), cu (5.3), (5.10) și (5.4), (5.13) rezultă:

$$E(s) = \frac{1}{k_t}\left[A_p(s) \mp A_w(s)\right] = \frac{1}{k_t} A(s), \tag{5.14}$$

ceea ce înseamnă că pentru (5.5) - (5.7) eroarea este proporțională cu abaterea.

Pentru cazul particular $k_t = 1$ (reacția negativă unitară) rezultă:

$$E(s) \equiv A(s), \tag{5.15}$$

aceasta fiind singura situație în care eroarea coincide cu abaterea.

În afara acestei excepții, între eroare și abatere există deosebiri clare și anume: de natură dimensională, de anvergură a domeniului de valori și, nu în ultimul rând, de mod de definire (eroarea ca mărime virtuală și abaterea ca mărime reală).

Distincția dintre eroare și abatere este esențială dacă se ține seama că sistemul automat funcționează pe principiul abaterii (nu al erorii !) așa cum s-a arătat la 3.1 și că în mod necesar, precizia sistemului automat se definește și se studiază pe baza erorii.

În cazul general (corespunzător schemei din fig.III.16), conform relației (3.4) se pot scrie relațiile:

$$A_p(s) = \frac{1}{1 + G(s)G_t(s)} U(s), \tag{5.16}$$

$$A_w(s) = \frac{G_w(s)G_t(s)}{1 + G(s)G_t(s)} W(s). \tag{5.17}$$

Utilizând adecvat (5.3) și (5.4) se obțin respectiv:

$$E_p(s) = \frac{1}{G_p(s)} \{1 - G(s)[G_p(s) - G_t(s)]\} A_p(s), \tag{5.18}$$

$$E_w(s) = \frac{1}{G_t(s)} A_w(s). \tag{5.19}$$

Conform principiului abaterii însăşi existenţa unei variaţii a abaterii (indiferent de cauza care a provocat-o) are ca efect evoluţia sistemului automat în sensul diminuării sau chiar al anulării abaterii. Este evident că din (5.18) şi (5.19) rezultă că pentru $A_p(s)=0$ şi $A_w(s)=0$ se obţin $E_p(s)=0$ şi respectiv $E_w(s)=0$, dar modul în care $|A_p(s)|\to 0$ şi $|A_w(s)|\to 0$ este în general diferit de acela în care $|E_p(s)|\to 0$ şi respectiv $|E_w(s)|\to 0$.

Pe baza acestor constatări şi fără a pierde din vedere deosebirile dintre eroare şi abatere, principiul abaterii se poate extinde, *mutatis mutandis*, şi la eroare, ca mărime virtuală subsidiară abaterii.

5.2. Eroarea staţionară

De regulă sistemele automate sunt concepute, realizate şi menite să funcţioneze, pe durate relativ mari de timp, în regim permanent şi în particular în regim staţionar. În aceste circumstanţe de o importanţă deosebită pentru caracterizarea calităţilor (performanţelor) unui sistem automat este *eroarea staţionară* prin care se defineşte şi se evaluează precizia în regim staţionar a sistemului automat.

a. Eroarea staţionară în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă)

Pentru simplificarea scrierii şi în conformitate cu (5.3) se notează:

$$G_{ep}(s) = 1 - \frac{G_p(s)G(s)}{1+G(s)G_t(s)}, \tag{5.20}$$

prin care se desemnează funcţia de transfer a erorii în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă).

Se pot defini şi evalua următoarele tipuri uzuale de erori staţionare:

1° Eroarea staţionară de poziţionare. În acest caz mărimea prescrisă (de referinţă) este funcţia treaptă unitară pentru care se scrie:

$$y_p(t) = \sigma(t), \quad Y_p(s) = 1/s. \tag{5.21}$$

Aplicând teorema valorii finale (Anexa A1), din (5.3) şi (5.20) se obţine:

$$e_{ps} = \lim_{t\to+\infty} e_p(t) = \lim_{s\to 0} sE_p(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ep}(s)/s = G_{ep}(0). \tag{5.22}$$

2° Eroarea staţionară de viteză. În acest caz mărimea prescrisă (de referinţă) este *funcţia rampă unitară* (cu viteza unitară) pentru care se scrie:

$$y_p(t) = t\sigma(t), \quad Y_p(s) = 1/s^2. \tag{5.23}$$

Procedând ca la 1° rezultă:

$$e_{ps} = \lim_{t\to+\infty} e_p(t) = \lim_{s\to 0} sE_p(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ep}(s)/s^2 = \lim_{s\to 0} G_{ep}(s)/s. \tag{5.24}$$

3° Eroarea staţionară de acceleraţie. În acest caz mărimea prescrisă (de referinţă) este *funcţia parabolă unitară* (cu acceleraţie unitară) pentru care se scrie:

$$y_p(t) = t^2\sigma(t)/2, \quad Y_p(s) = 1/s^3. \tag{5.25}$$

Procedând ca la 1° se obţine:

$$e_{ps} = \lim_{t\to+\infty} e_p(t) = \lim_{s\to 0} sE_p(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ep}(s)/s^2 = \lim_{s\to 0} G_{ep}(s)/s^2. \tag{5.26}$$

Din (5.22), (5.24) şi (5.26) se remarcă faptul că ceea ce interesează relativ la eroarea staţionară este comportarea funcţiei de transfer $G_{ep}(s)$ în vecinătatea originii. În această situaţie este indicat să se facă uz de dezvoltarea în serie Taylor:

$$G_{ep}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k,\ c_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k G_{ep}(s)}{ds^k}\bigg|_{s=0}, \tag{5.27}$$

şi de o mărime prescrisă (de referinţă) de o formă generală:

$$y_p(t)=t^k\sigma(t)/k!,\quad Y_p(s)=1/s^{k+1}, \tag{5.28}$$

din care, prin particularizări adecvate, se obţin (5.21), (5.23) şi (5.25).

Eroarea staţionară se obţine cu ajutorul teoremei valorii finale după cum urmează:

$$e_{ps}=\lim_{t\to+\infty}e_p(t)=\lim_{s\to 0}s(c_0+c_1s+c_2s^2+\ldots+c_ks^k+\ldots)\frac{1}{s^{k+1}}= \tag{5.29}$$

$$=\lim_{s\to 0}\left(\frac{c_0}{s^k}+\frac{c_1}{s^{k-1}}+\frac{c_2}{s^{k-2}}+\ldots+c_k+c_{k+1}s+c_{k+2}s^2+\ldots\right).$$

Este evident că limita din (5.29) există şi este finită dacă şi numai dacă:

$$c_0=0,c_1=0,\ldots..,c_{k-1}=0. \tag{5.30}$$

În această situaţie rezultă:

$$e_{ps}=c_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}G_{ep}(s)\bigg|_{s=0},k=0,1,2,\ldots.. \tag{5.31}$$

Coeficienţii $c_0,c_1,c_2,\ldots.,c_k,\ldots..$ se numesc *coeficienţii erorii staţionare* în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă). Un sistem automat se numeşte de tipul k în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă) dacă primul coeficient al erorii staţionare nenul (în ordinea lor naturală) este c_k.

În acest stadiu al analizei este util să se examineze substratul structural al noţiunii de sistem automat de tipul k. Se are în vedere cazul mai simplu (şi uzual) caracterizat prin (5.5)-(5.7) şi

$$G(s)=Q(s)/P(s), \tag{5.32}$$

în care $P(s)$ şi $Q(s)$ sunt două polinoame relativ prime între ele, cu $Q(0)\neq 0$.

În aceste condiţii rezultă:

$$G_{ep}(s)=\frac{1}{1+k_tG(s)}=\frac{P(s)}{P(s)+k_tQ(s)}, \tag{5.33}$$

$$e_{ps}=c_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{P(s)}{P(s)+k_tQ(s)}\right)\bigg|_{s=0},\quad k=0,1,2,\ldots.. \tag{5.34}$$

Dacă sistemul automat este de tipul $k=0$, rezultă $c_0\neq 0$, ceea ce implică $P(0)\neq 0$. Aceasta înseamnă că funcţia de transfer a căii directe, $G(s)$, nu are nici un pol în origine (în $s=0$). Eroarea staţionară de poziţionare în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă) este nenulă (dar finită).

Dacă sistemul automat este de tipul $k=1$, rezultă $c_0=0$, $c_1\neq 0$, ceea ce implică $P(0)=0$, respectiv $P(s)=sP_1(s)$, în care $P_1(s)$ nu are nici un zero în origine (adică $P_1(0)\neq 0$). Funcţia de transfer a căii directe, $G(s)$, are un pol în origine, respectiv calea directă conţine un element integrator (I). Eroarea staţionară de poziţionare în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă) este nulă şi aceasta este o consecinţă imediată a prezenţei elementului I pe calea directă. În acelaşi timp eroarea staţionară de viteză este nenulă (dar finită). Dacă elementul I nu există în

mod natural în partea fixată a căii directe (în elementul de execuţie sau în instalaţia automatizată) atunci, pentru obţinerea erorii staţionare de poziţionare nule, respectivul element I trebuie introdus în regulator.

. Dacă sistemul este de tipul $k = 2$, rezultă $c_0 = 0$, ceea ce implică $P(0) = 0$, $P(s) = sP_1(s)$ şi

$$e_{ps} = c_1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{sP_1(s)}{sP_1(s)+k_l Q(s)}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{P_1(0)}{k_l Q(0)} = 0,$$

ceea ce conduce la $P_1(0) = 0$, respectiv: $P(s) = s^2 P_2(s)$, în care $P_2(s)$ are proprietatea $P_2(0) \neq 0$ ($P_2(s)$ nu are nici un pol în origine). Funcţia de transfer a căii directe, $G(s)$, are doi poli în origine, respectiv calea directă conţine două elemente integratoare (I) înseriate. Eroarea staţionară de poziţionare şi eroarea staţionară de viteză (ambele în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă)) sunt nule, ca o consecinţă imediată a existenţei a două elemente I, înseriate pe calea directă. În acelaşi timp eroarea de acceleraţie în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă) este nenulă (dar finită). Dacă partea fixată a căii directe nu conţine în mod natural două elemente I, atunci pentru obţinerea erorilor staţionare de poziţionare şi de viteză nule, aceste elemente trebuie introduse în regulator (până la numărul total de două elemente I, înseriate, pe calea directă).

În general, dar cu referire la (5.32) - (5.34), un sistem automat de tipul k are o funcţie de transfer a căii directe care posedă k poli în origine, respectiv calea directă conţine k elemente integratoare înseriate. Calitatea unui astfel de sistem este că erorile staţionare (5.31) în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă) de tip parabolă unitară de ordinul k (funcţia (5.28) – cu derivata de ordinul k unitară) sunt nule până la ordinul $k-1$ inclusiv (conform (5.30)).

b. Eroarea staţionară în raport cu perturbaţia

Un studiu similar cu cel de la punctul **a** se poate face în cazul funcţiei de transfer a erorii în raport cu perturbaţia:

$$G_{ew}(s) = \frac{G_w(s)}{1+G(s)G_w(s)}, \tag{5.35}$$

pentru care se poate scrie seria Taylor:

$$G_{ew}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k s^k,\ d_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}G_{ew}(s)\Big|_{s=0}. \tag{5.36}$$

Eroarea staţionară se obţine cu ajutorul teoremei valorii finale (Anexa A1), aplicată relaţiei (5.4), cu (5.35), (5.36) şi

$$w(t) = t^k \sigma(t)/k!, \quad W(s) = 1/s^{k+1}. \tag{5.37}$$

Se poate scrie:

$$e_{ws} = \lim_{t\to+\infty} e_w(t) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{d_0}{s^k} + \frac{d_1}{s^{k-1}} + ... + d_k + d_{k+1}s + ...\right). \tag{5.38}$$

Limita din (5.38) există şi este finită dacă şi numai dacă:

$$d_0 = 0, d_1 = 0, ..., d_{k-1} = 0. \tag{5.39}$$

În această situaţie rezultă:

$$e_{ws} = d_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}G_{ew}(s)\Big|_{s=0}, k = 0,1,2,..... \tag{5.40}$$

Coeficienţii d_0, d_1, d_2,..., d_k,... se numesc *coeficienţii erorii staţionare* în raport cu perturbaţia. Un sistem automat se numeşte de tipul k în raport cu perturbaţia dacă primul coeficient al erorii staţionare nenul (în ordinea lor naturală) este d_k.

Întrucât în general $G_{ep}(s) \not\equiv G_{ew}(s)$ (a se vedea (5.20) şi (5.32)) rezultă că un sistem automat nu este în mod necesar de acelaşi tip în raport cu mărimea prescrisă şi cu perturbaţia.

Pentru cazul mai simplu (şi uzual) caracterizat prin (5.5)-(5.7), (5.32) şi

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{P_a(s)P_b(s)}, \tag{5.41}$$

$$G_w(s) = \frac{Q_w(s)}{P_a(s)} \tag{5.42}$$

(a se vedea şi (4.1)-(4.3) şi textul explicativ aferent), din (5.35) şi (5.36) rezultă:

$$G_{ew}(s) = \frac{Q_w(s)P_b(s)}{P(s) + k_t Q(s)} \tag{5.43}$$

$$e_{ws} = d_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{Q_w(s)P_b(s)}{P(s)+k_t Q(s)}\right)\Bigg|_{s=0}, k = 0,1,2,... \tag{5.44}$$

Trebuie precizat că, de regulă, $Q_w(s)$ nu are zerouri în origine (adică $Q_w(0) \neq 0$), respectiv nu există elemente derivatoare (D) înseriate pe calea perturbaţiei.

Dacă sistemul automat este de tipul $k = 0$, rezultă $d_0 \neq 0$, ceea ce implică $P_b(0) \neq 0$. Aceasta înseamnă că funcţia de transfer a regulatorului şi elementului de execuţie nu are nici un pol în origine (în $s = 0$). Eroarea staţionară de poziţionare în raport cu perturbaţia este nenulă (dar finită).

Dacă sistemul automat este de tipul $k = 1$, rezultă $d_0 = 0$, $d_1 \neq 0$, ceea ce implică $P_b(0) = 0$, respectiv $P_b(s) = sP_{b_1}(s)$, în care $P_{b_1}(s)$ nu are nici un zero în origine (adică $P_{b_1}(0) \neq 0$). Funcţia de transfer a regulatorului şi elementului de execuţie are un pol în origine, respectiv fie regulatorul fie elementul de execuţie conţine un element integrator (I). Eroarea staţionară de poziţionare în raport cu perturbaţia este nulă şi aceasta este o consecinţă imediată a prezenţei elementului I menţionat mai sus. În acelaşi timp eroarea staţionară de viteză este nenulă (dar finită).

Dacă sistemul este de tipul $k = 2$, rezultă $d_0 = 0$, ceea ce implică $P_b(0) = 0$, $P_b(s) = sP_{b_1}(s)$, $P(s) = sP_1(s)$ şi

$$d_1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{Q_w(s)sP_{b_1}(s)}{sP_1(s)+k_t Q(s)}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{Q_w(0)P_{b_1}(0)}{k_t Q(0)} = 0.$$

Aceasta conduce la $P_{b_1}(0) = 0$, respectiv $P_b(s) = s^2 P_{b_2}(s)$, $P(s) = s^2 P_2(s)$, în care $P_{b_2}(s)$ şi $P_2(s)$ nu au nici un zero în origine (adică $P_{b_2}(0) \neq 0$, şi $P_{b2}(0) \neq 0$). Funcţia de transfer a regulatorului şi elementului de execuţie are doi poli în origine, respectiv acestea, împreună, conţin două elemente integratoare (I) înseriate. Eroarea staţionară de poziţionare şi eroarea staţionară de viteză (ambele în raport cu perturbaţia) sunt nule, ca o consecinţă imediată a existenţei celor două elemente I deja menţionate.

În general, dar cu referire la (5.41) – (5.44), un sistem automat de tipul k are o funcţie de transfer a regulatorului şi elementului de execuţie care posedă k elemente integratoare înseriate. Calitatea unui astfel de sistem este că erorile staţionare (5.44) în raport cu perturbaţia de tip

parabolă unitară de ordinul k (funcţia (5.37) - cu derivata de ordinul k unitară) sunt nule până la ordinul k–1 inclusiv (conform cu (5.39)).

Exemplul 5.1

Pentru ilustrarea studiului privind eroarea staţionară se consideră sistemul de reglare automată a turaţiei motorului electric de c.c. analizat în cadrul exemplelor 2.1, 2.2 şi 3.1.

Se cere determinarea erorilor staţionare în cazurile în care regulatorul este de tip P şi PI.

Schema bloc structurală are forma din fig.III.16. Funcţiile de transfer aferente au fost cele de la exemplele 2.2 sau 3.1, cu particularizarea $k_p = k_t$. Aceste funcţii de transfer au expresiile:

$$G(s) = \frac{k_g k_2 k G_R(s)}{(Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2}, G_w(s) = \frac{Ls+R}{(Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2}, G_p(s) = G_t(s) = k_t.$$

a). $G_R(s) = k_R$ (regulator P)

În conformitate cu (4.1)–(4.3) şi (5.41), (5.42) se identifică următoarele polinoame:

$$P(s) = P_a(s) = (Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2, P_b(s) \equiv 1, Q(s) = k_2k_gk_Rk, Q_w(s) = Ls+R.$$

Cu aceste polinoame şi utilizând relaţiile (5.34) şi respectiv (5.44) se obţin erorile staţionare de poziţionare:

$$e_{ps} = c_0 = P(0)/[P(0)+k_tQ(0)] = (Rk_3+k_1k_2)/(Rk_3+k_1k_2+k_tk_2k_gk_Rk),$$

$$e_{ws} = d_0 = Q_w(0)P_b(0)/[P(0)+k_tQ(0)] = R/(Rk_3+k_1k_2+k_tk_2k_gk_Rk).$$

b) $G_R(s) = k_R + 1/T_1 s = (k_R T_1 s+1)/T_1 s$ (regulator PI)

În conformitate cu (4.1)-(4.3) şi (5.41), (5.42) se identifică următoarele polinoame:

$$P(s) = P_a(s)P_b(s) = [(Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2]T_1s, P_a(s) = P_1(s) = (Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2,$$

$$P_b(s) = T_1 s, P_{b_1} \equiv 1, Q(s) = k_2k_gk(k_RT_1s+1), Q_w(s) = Ls+R.$$

Utilizând aceste polinoame şi relaţiile (5.34) şi respectiv (5.44) se obţin erorile staţionare:

- de poziţionare:

$$e_{ps} = c_0 = P(0)/[P(0)+k_tQ(0)] = 0, e_{ws} = d_0 = Q_w(0)P_b(0)/[P(0)+k_tQ(0)] = 0;$$

- de viteză:

$$e_{ps} = c_1 = P_1(0)/k_tQ(0) = (Rk_3+k_1k_2)/k_tk_2k_gk,$$

$$e_{ws} = d_1 = Q_w(0)P_{b_1}(0)/k_tQ(0) = R/k_tk_2k_gk\ .$$

■

6. Performanţele unui sistem automat

6.1. Indici de calitate

Abilitatea de a obţine un anumit regim permanent (staţionar) şi un anumit regim tranzitoriu rezidă în alegerea adecvată a structurii şi parametrilor regulatorului în condiţiile în care celelalte elemente ale sistemului automat sunt, de regulă, prestabilite (fixate). Pentru aceasta trebuie definită forma dorită a mărimii de ieşire în termenii performanţelor pe care trebuie să le realizeze sistemul automat. În mod obişnuit aceste performanţe se definesc în cazul răspunsului indicial. Se mai folosesc de asemenea răspunsul la funcţia rampă (unitară) şi răspunsul la funcţia parabolă (unitară).

Performanţele definite cu ajutorul răspunsului indicial se evaluează prin *indici de calitate* care se împart în două grupe:

- de regim staţionar: erorile staţionare care se exprimă de regulă în formă procentuală; acestea au fost definite în subcap.5;
- de regim tranzitoriu: suprareglarea, durata regimului tranzitoriu, durata de creştere; acestea au fost definite la II.7.1; în funcţie de necesităţile analizei şi/sau sintezei unui sistem automat mai pot fi avute în vedere: durata până la primul maxim; perioada oscilaţiilor; numărul de perioade de oscilaţie pe durata regimului tranzitoriu.

Aceşti indici de calitate sunt specificaţi sau specificabili (de regulă prin tema de proiectare) şi constituie obiective care urmează a fi realizate pe parcursul proiectării sistemului automat. Întrucât în majoritatea cazurilor pentru realizarea indicilor de calitate specificaţi se ajunge la soluţii (privind structura şi parametrii regulatorului) contradictorii, pe parcursul proiectării trebuie să se adopte soluţii de compromis prin care să se asigure valori acceptabile pentru toţi indicii de calitate.

Valorile admisibile ale indicilor de calitate se adoptă pe baza următoarelor considerente:

- Pentru erorile staţionare: acestea trebuie să aibă valori compatibile cu clasa de precizie a traductorului. Clasa de precizie a unui sistem automat nu poate fi în nici un caz mai bună decât clasa de precizie a traductorului utilizat.
- Pentru suprareglare: $\sigma\% \leq 18 - 20\%$.
- Pentru durata regimului tranzitoriu şi durata de creştere: acestea trebuie să fie compatibile cu posibilităţile reale ale instalaţiei automatizate şi ale dispozitivelor de automatizare. De exemplu, regulatorul, elementul de execuţie sau instalaţia automatizată au domenii limitate de variaţie a mărimilor de intrare şi de ieşire. Aceste limitări au caracter tehnologic sau se datorează fenomenului de saturaţie, puterilor nominale limitate ale unor dispozitive etc. De regulă realizarea unei viteze de variaţie mari a mărimii de ieşire implică generarea unei mărimi de comandă a instalaţiei automatizate de amplitudine mare, fapt care practic nu este posibil întotdeauna din cauza domeniilor limitate menţionate mai sus.

6.2. Indicatori sintetici de calitate

Faptul că între soluţiile care realizează indicii de calitate pot apărea contradicţii a condus la ideea definirii unor *indicatori sintetici de calitate* care să înglobeze toate aspectele avute în vedere atunci când s-au definit indicii de calitate pe baza răspunsului indicial.

Un indicator sintetic de calitate asigură o apreciere globală a calităţilor unui sistem automat. El se exprimă printr-un număr real şi pozitiv, poate fi calculat şi măsurat experimental. Se doreşte, uzual, minimizarea valorii indicatorului, ceea ce implicit înseamnă realizarea unei *optimizări* a sistemului automat. Acest fapt are consecinţe asupra structurii şi parametrilor sistemului automat (în primul rând ai regulatorului).

Cei mai utilizaţi indicatori sintetici de calitate sunt următorii:

1° ISE (integral of the square of the error)

$$I_1 = \int_0^T e^2(t)dt, \ T \geq t_s .$$

Acest indicator asigură o bună distincţie între răspunsurile (indiciale) slab amortizate şi cele puternic amortizate. I_1 = minim se obţine pentru o valoare de compromis a amortizării. I_1 poate fi măsurat experimental şi este foarte convenabil pentru tratări matematice şi pentru simulare numerică.

2° IAE (integral of the absolute magnitude of the error)

$$I_2 = \int_0^T |\, e(t)\,|\, dt, \ T \geq t_s .$$

Acest indicator este adecvat pentru studii de simulare numerică, dar mai dificil de utilizat în abordări matematice.

3° ITAE (integral of the time multiplied by the absolute magnitude of the error)

$$I_3 = \int_0^T t\,|e(t)|\,dt,\ T \geq t_s.$$

În acest caz prezența variabilei t în integrant are ca efect o ponderare adecvată a valorilor inițiale și finale ale lui $e(t)$. Astfel, valorile inițiale, de regulă mari (în valoare absolută), ale lui $e(t)$ intră cu o pondere mică (deoarece t este mic), în schimb valorile finale, de regulă mici, ale lui $e(t)$ întră cu o pondere mare (deoarece t este mare). Crește astfel rolul valorilor mici (finale - de regim staționar în cazul răspunsului indicial) ale erorii și prin minimizarea lui I_3 se realizează implicit și o reducere a erorii pentru t de valori mari.

În plus I_3 are o sensibilitate ridicată la variația parametrilor sistemului automat, astfel că I_3 = minim poate fi determinat experimental fără echivoc.

4° ITSE (integral of the time multiplied by the square of the error)

$$I_4 = \int_0^T te^2(t)dt,\ T \geq t_s.$$

Acest indicator are proprietăți similare cu I_3.

Exemplul 6.1

Pentru examinarea comparativă a proprietăților indicatorilor I_1 și I_3 se consideră sistemul automat cu structura din fig.III.25, pentru care: $G_0(s)=1/(s^2+2\zeta s+1)$, $E(s)=[(s^2+2\zeta s)/(s^2+2\zeta s+1)]U(s)$. Rezultatele care se obțin prin simulare pentru $u(t)=\sigma(t)$ sunt reprezentate grafic în fig.III.26. Acestea confirmă cele prezentate la 1° și 3°.■

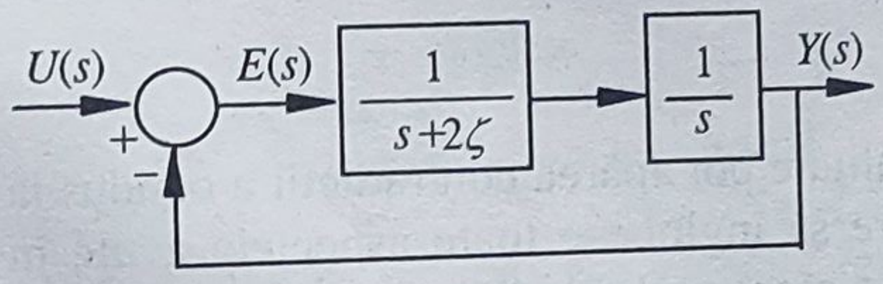


Fig. III.25. Schema bloc structurală a sistemului automat de la exemplul 6.1.

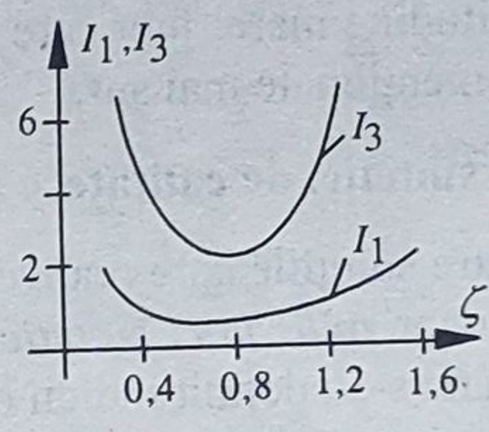


Fig.III.26. Graficele indicatorilor sintetici I_1 și I_3 la exemplul 6.1

Capitolul IV

LEGI DE REGLARE

De obicei legea de reglare este materializată de regulator (fig.III.14), dar există şi excepţii în sensul că anumite componente ale legii de reglare pot fi localizate în partea fixată a sistemului automat (de exemplu în elementul de execuţie). În acest caz componenta respectivă există în mod natural şi ea este folosită ca atare, nefiind necesară introducerea unei componente similare în regulator. În speţă este vorba de componenta integratoare (I) care poate exista în mod natural în partea fixată.

1. Regulatoare realizate cu amplificatoare operaţionale

1.1. Amplificatorul operaţional

Un amplificator operaţional, conform fig.IV.1, este constituit dintr-un amplificator electronic de c.c. (A_{cc}) la care se adaugă un circuit de intrare (impedanţa $Z_1(s)$) şi un circuit de reacţie (impedanţa $Z_2(s)$). Amplificatorul electronic de c.c. (realizat ca circuit integrat) se caracterizează prin:

- factorul de amplificare, K_0, are o valoare foarte mare pentru un domeniu relativ larg de frecvenţe;
- rezistenţele de intrare şi de ieşire au valoare foarte mare şi respectiv foarte mică.

Ţinând seama de notaţiile din fig.IV.1, pentru domeniul de liniaritate al A_{cc}, se pot scrie ecuaţiile:

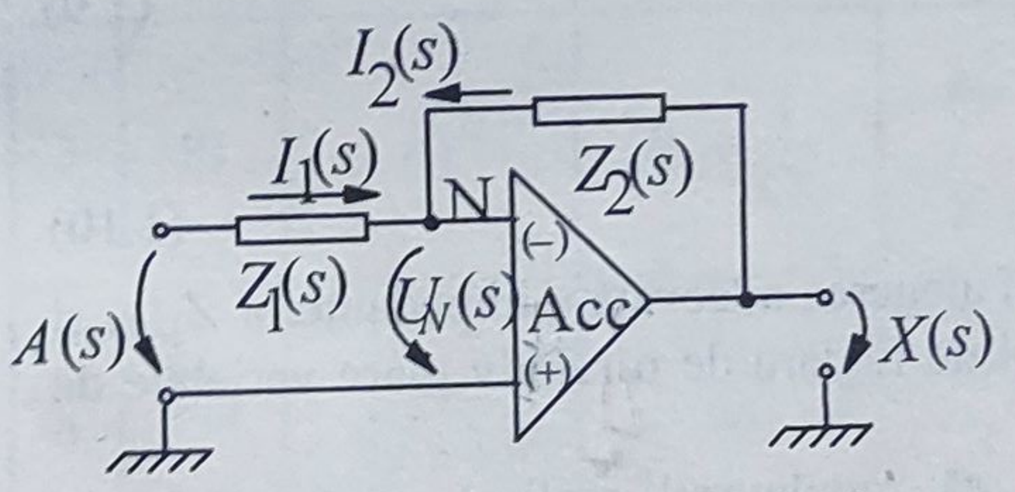


Fig.IV.1. Schema unui regulator electronic cu amplificator operaţional; A_{cc} - amplificator de c.c., $Z_1(s)$ - impedanţa de intrare, $Z_2(s)$ - impedanţa de reacţie; $A(s)$ - abaterea, $X(s)$ - mărimea de comandă (a elementului de execuţie)

- pentru nodul N:

$$I_1(s)+I_2(s)=0, \tag{1.1}$$

deoarece se consideră că rezistenţa proprie de intrare a A_{cc} este infinită;

- pentru circuitul de intrare:

$$I_1(s)=\frac{A(s)-U_N(s)}{Z_1(s)}; \tag{1.2}$$

- pentru circuitul de reacţie:

$$I_2(s)=\frac{X(s)-U_N(s)}{Z_2(s)}; \tag{1.3}$$

- pentru A_{cc}:

$$X(s)=-K_0U_N(s)\,. \tag{1.4}$$

Eliminând $I_1(s)$, $I_2(s)$ şi $U_N(s)$ între ecuaţiile (1.1) - (1.4) rezultă:

$$X(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \frac{1}{1+\frac{1}{K_0}\left[1+\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\right]} A(s), \tag{1.5}$$

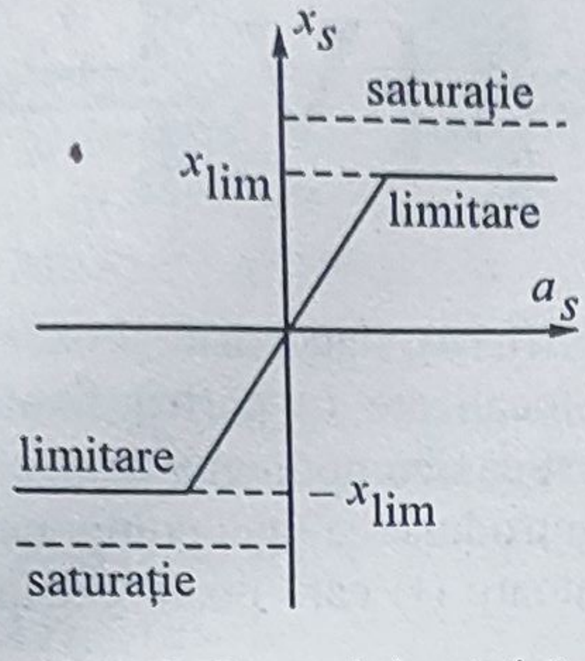


Fig.IV.2. Caracteristica statică a amplificatorului operațional (de tip P): cu zonă de saturație (naturală) şi cu zonă de limitare (realizată de schema din fig.IV.3)

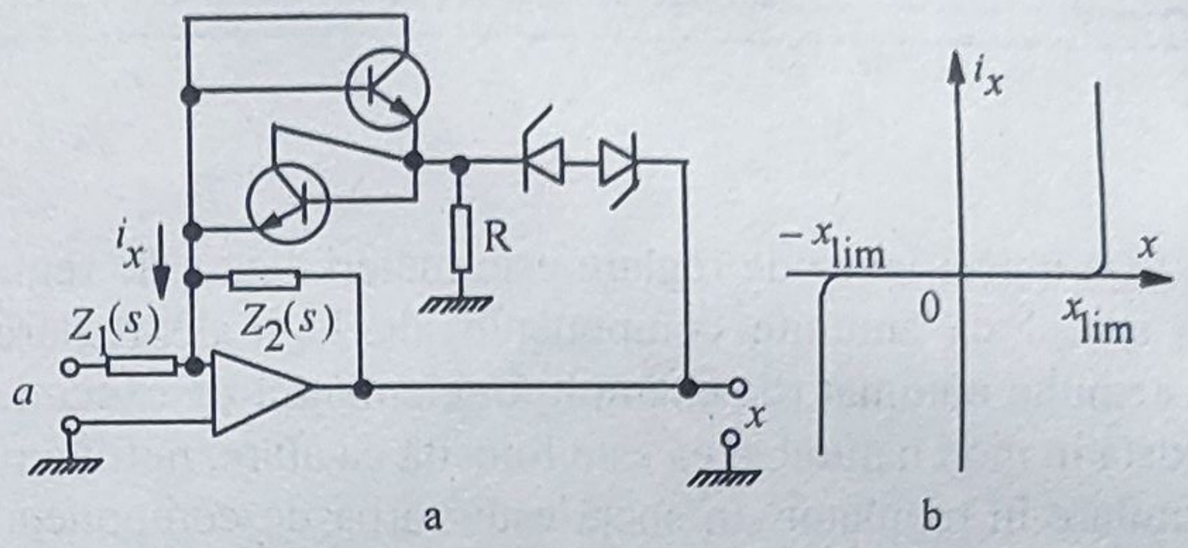


Fig.IV.3. Schema amplificatorului operațional cu circuit de limitare cu diode Zener (a); caracteristica circuitului de limitare (b)

în care se disting:

- funcția de transfer *ideală* a regulatorului: $G_R^i(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$, (1.6)

- factorul de *corecție*: $C(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{K_0}\left[1+\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\right]}$, (1.7)

- funcția de transfer a regulatorului: $G_R(s) = G_R^i(s)C(s)$. (1.8)

Din (1.7) rezultă:

$$\lim_{K_0 \to +\infty} C(s) = 1, \tag{1.9}$$

ceea ce permite să se facă uzual aproximația:

$$G_R(s) \cong G_R^i(s). \tag{1.10}$$

Aşa cum evidențiază relațiile (1.6) şi (1.10), prin alegerea adecvată a impedanțelor $Z_1(s)$ şi $Z_2(s)$ se pot obține funcții de transfer, respectiv legi de reglare de o relativ mare varietate de forme.

Din (1.5), respectiv (1.6) se remarcă faptul că regulatorul realizat cu amplificator operațional introduce şi o schimbare de semn între intrare şi ieşire. În consecință este necesară încă o schimbare de semn pe parcursul căii directe a sistemului automat. Aceasta se realizează de obicei în regulator, dar este posibilă şi în elementul de execuție.

Regulatoare cu structură izomorfă cu cea din fig.IV.1 se pot realiza şi cu amplificatoare pneumatice. Se obțin astfel regulatoare pneumatice utilizate în special în industria chimică şi petrochimică (deoarece folosirea regulatoarelor electronice este inadecvată din cauza pericolului de explozie).

Se ştie că zona de liniaritate a A_{cc} este mărginită de fenomenul de *saturație*, aşa cum se ilustrează în fig.IV.2. Funcționarea A_{cc} în zona de saturație este anormală deoarece A_{cc} rămâne în această zonă un timp relativ mare, chiar în situația în care cauza (a_s de amplitudine mare)

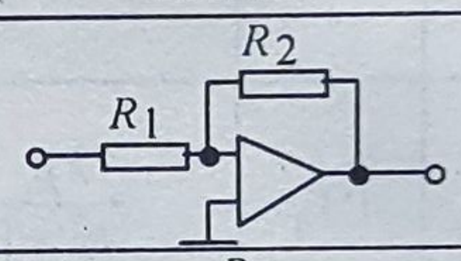
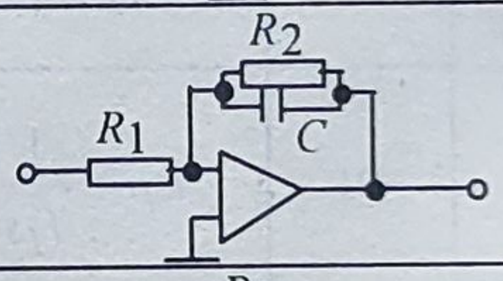
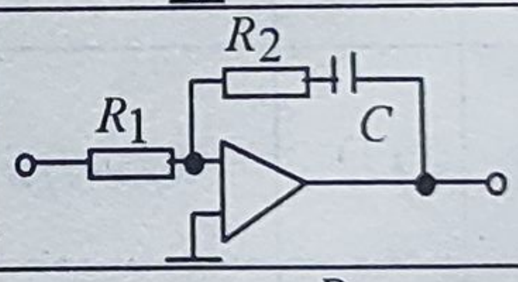
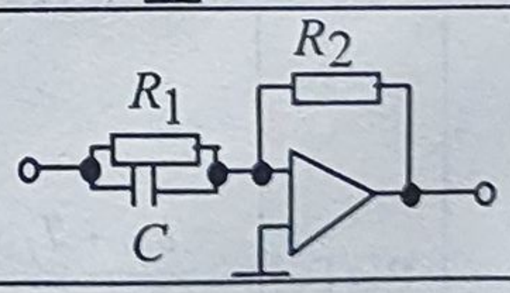
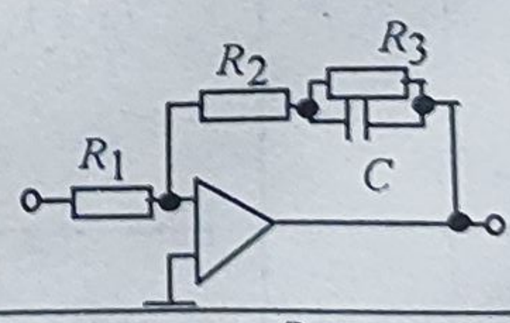
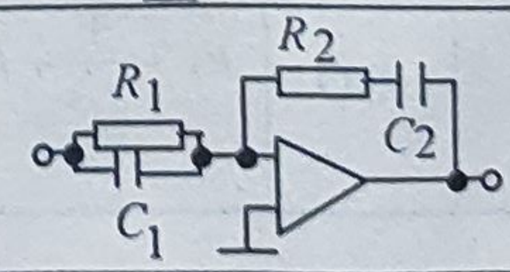
care a adus A_{cc} în saturaţie a dispărut. Pentru evitarea acestui fenomen se introduce un circuit de *limitare* pe calea de reacţie, de exemplu ca în fig.IV.3.a. Limitarea se realizează la un nivel (ajustabil) mai mic decât al saturaţiei, cu ajutorul diodelor Zener (conform caracteristicii $i_x = f(x)$ reprezentată grafic în fig.IV.3.b). Se evită astfel zona de saturaţie (fig.IV.2). Zona de limitare, deşi similară formal cu saturaţia, nu are dezavantajul acesteia deoarece punctul de funcţionare se poate mişca pe palierul de limitare ca şi în zona de liniaritate.

Evident, un element dinamic cu o caracteristică statică cu limitare, pentru care punctul de funcţionare ajunge în zona de limitare, este neliniar. În acest caz ecuaţiile (1.1) şi (1.4) şi rezultatul lor - ecuaţia (1.5) nu mai reflectă ceea ce are loc în zona de limitare. Pentru a descrie şi fenomenele din zona de limitare este necesară o abordare pe baza teoriei sistemelor automate neliniare (cap. VII).

1.2. Regulatoare uzuale

Elementele de circuit utilizate obişnuit pentru realizarea circuitelor de intrare şi de reacţie conform fig.IV.1 sunt rezistenţele şi condensatoarele (de foarte bună calitate). Cu acestea, în combinaţii adecvate, se pot obţine practic regulatoare cu funcţii de transfer prestabilite. Câteva dintre cele mai utilizate regulatoare cu amplificatoare operaţionale din categoria PID, sunt prezentate în tabelul IV.1.

Tabelul IV.1. Regulatoare din categoria PID

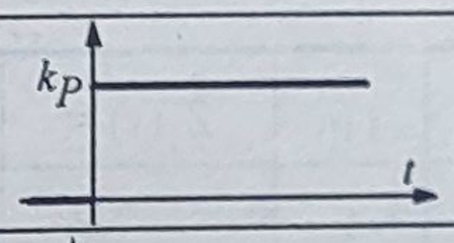
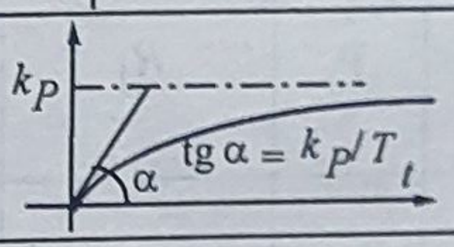
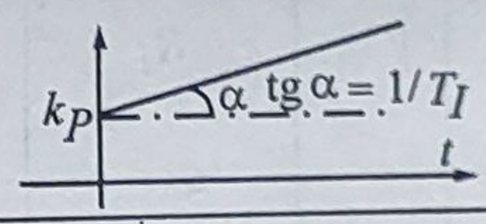
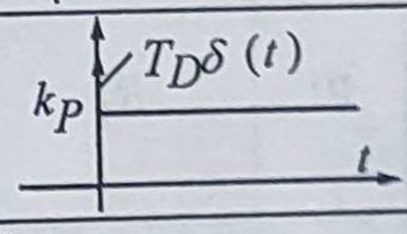
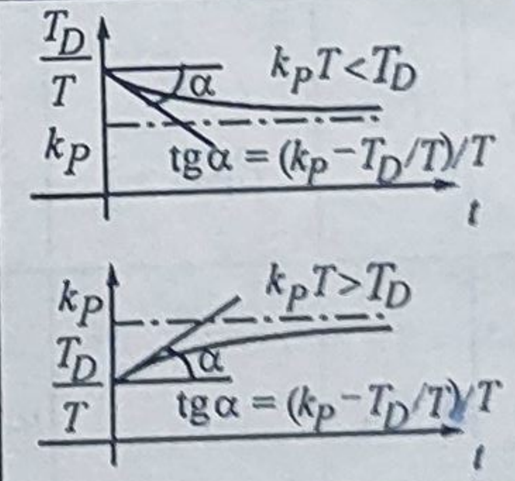
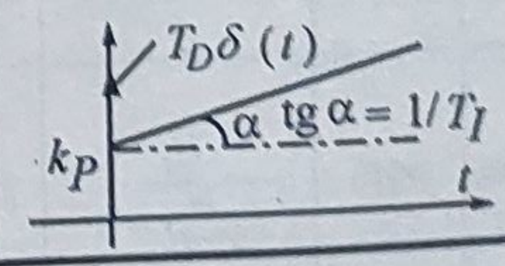
r.	Tip	$Z_1(s) =$	$Z_2(s) =$	Parametri	$G_R(s) \cong G_R^i(s) =$	Schema
1	P	R_1	R_2	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$	$-k_P$	
2	PT_1	R_1	$\frac{R_2}{R_2Cs+1}$	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$ $T = R_2C$	$-\frac{k_P}{Ts+1}$	
3	PI	R_1	$R_2 + \frac{1}{Cs}$	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$ $T_I = R_1C$	$-\left(k_P + \frac{1}{T_Is}\right)$	
4	PD	$\frac{R_1}{R_1Cs+1}$	R_2	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$ $T_D = R_2C$	$-(k_P + T_Ds)$	
5	PDT_1	R_1	$R_2 + \frac{R_3}{R_3Cs+1}$	$k_P = \frac{R_2+R_3}{R_1}$ $T_D = \frac{R_2R_3}{R_1}C$ $T = R_3C$	$-\frac{k_P + T_Ds}{Ts+1}$	
6	PID	$\frac{R_1}{R_1C_1s+1}$	$R_2 + \frac{1}{C_2s}$	$k_P = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$ $T_D = R_2C_1$ $T_I = R_1C_2$	$-\left(k_P + T_Ds + \frac{1}{T_Is}\right)$	

Este important de observat că fiecare dintre parametrii regulatorului depinde de mai mulți parametri ai circuitelor de intrare și de reacție. Aceasta înseamnă că între parametrii regulatorului există o anumită *interdependență*. De exemplu în cazul regulatorului PID (nr.6 în tabelul IV.1) modificarea rezistenței R_1 conduce la modificarea simultană a lui k_P și T_I (și anume în sensuri contrare). Această interdependență poate crea unele inconveniente la ajustarea parametrilor. Pentru evitarea unor astfel de situații se pot realiza regulatoare cu mai multe amplificatoare operaționale interconectate adecvat (de exemplu conectate în serie și paralel) astfel încât interdependența dintre parametrii regulatorului să se reducă sau chiar să se elimine.

1.3. Caracteristici ale regulatoarelor din categoria PID

Scurta prezentare care urmează se referă la legile de reglare realizate de regulatoarele din tabelul IV.1. Se au în vedere funcțiile de transfer din penultima coloană, pentru care, din motive de simplificare, se face abstracție de semnul "–" (s-a arătat la 1.1 că acest semn se "compensează" adecvat pe parcursul căii directe a sistemului automat).

Tabelul IV.2. Caracteristici ale regulatoarelor din categoria PID

Nr.	Tip	$G_R(s) \cong G_R'(s) =$	Zerouri și/sau poli suplimentari	Legea reglării	$h_R(t) \cong h_R^i(t)$
1.	P	k_P	–	$x = k_P a$	
2.	PT_1	$\frac{k_P}{Ts+1}$	$p = -\frac{1}{T}$	$T\dot{x} + x = k_P a$	
3.	PI	$k_P + \frac{1}{T_I s}$	$z = -\frac{1}{k_P T_I}$ $p = 0$	$x = k_p a + + \frac{1}{T_I}\int_0^t a dt$	
4.	PD	$k_P + T_D s$	$z = -\frac{k_P}{T_D}$	$x = k_P a + T_D \dot{a}$	
5.	PDT_1	$\frac{k_P + T_D s}{Ts+1}$	$z = -\frac{k_P}{T_D}$ $p = -\frac{1}{T}$	$T\dot{x} + x = = k_P a + T_D \dot{a}$	
6.	PID	$k_P + \frac{1}{T_I s} + T_D s$	$z_{1,2} = (-k_P \pm \sqrt{k_P^2 - 4T_D/T_I})/2T_D$ $p = 0$	$x = k_P a + + \frac{1}{T_I}\int_0^t a dt + T_D \dot{a}$	

Principalele caracteristici ale regulatoarelor din tabelul IV.1. sunt prezentate în tabelul IV.2 şi anume: zerourile şi polii suplimentari care pot fi introduşi de regulator în funcţia de transfer a căii directe a sistemului automat, legea de reglare (ca relaţie intrare-ieşire temporală) şi graficul răspunsului indicial.

2. Proprietăţi ale sistemelor automate cu regulatoare P, PD, PI şi PID

Scopul acestui subcapitol este acela de a ilustra, printr-o analiză succintă, proprietăţile sistemelor automate echipate cu regulatoare din categoria PID. Problema sintezei regulatorului pornind de la indicii de calitate admisibili impuşi prin tema de proiectare face obiectul cap.V şi VI.

Pentru a asigura o prezentare unitară şi pentru obţinerea unor rezultate comparabile în cazul celor patru tipuri de regulatoare se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.IV.4 în care, pentru simplificarea studiului, partea fixată este un element de tipul PT_2 cu funcţia de transfer:

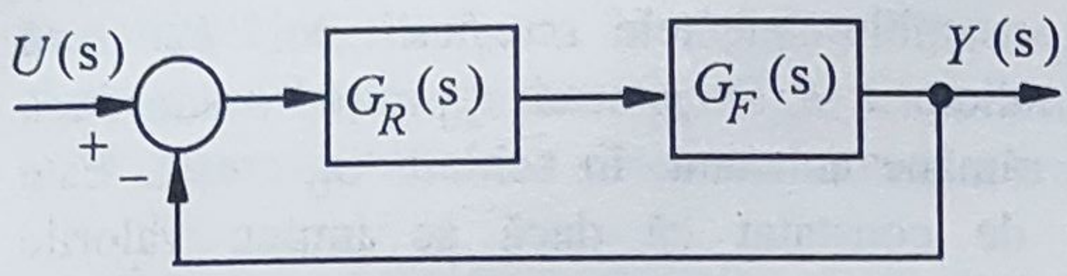


Fig.IV.4. Schema bloc structurală pentru studiul proprietăţilor regulatoarelor din categoria PID

$$G_F(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{2.1}$$

sau

$$G_F(s)=\frac{k}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1};\quad T_{1,2}=\frac{1}{\omega_n\left(\zeta\mp\sqrt{\zeta^2-1}\right)},\quad \zeta\geq 1. \tag{2.2}$$

Funcţia de transfer a regulatorului, $G_R(s)$, urmează să fie concretizată în conformitate cu tabelul IV.2 (nr.1,4,3 şi 6).

2.1. Regulatorul P

Funcţia de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s)=k_P;\quad k_P>0. \tag{2.3}$$

Conform schemei din fig.IV.4, cu (2.1), (2.3), funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s)=\frac{k_0\omega_{n0}^2}{s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2},k_0=k_Pk/(k_Pk+1),\omega_{n0}=\omega_n\sqrt{k_Pk+1},\zeta_0=\zeta/\sqrt{k_Pk+1}. \tag{2.4}$$

Dependenţa acestor parametri de parametrul ajustabil k_P al regulatorului este ilustrată în fig.IV.5. Remarcabil este faptul că prin creşterea lui k_P se produce o scădere a factorului de amortizare ζ_0 , ceea ce implică o creştere a suprareglării σ_0, respectiv o creştere a erorii în regim tranzitoriu, şi o scădere a duratei de creştere t_{c0}, respectiv o creştere a rapidităţii răspunsului indicial (datorită creşterii lui ω_{n0}).

Întrucât regulatorul utilizat este de tip P (cu un singur parametru ajustabil) rezultă că efectele menţionate se datorează în primul rând reacţiei negative.

O caracterizare pertinentă a calităţii sistemului automat este posibilă pe baza indicilor de calitate ai regimurilor staţionar şi tranzitoriu.

În conformitate cu III.5.a, eroarea staţionară este:

$e_s = 1/(k_P k + 1)$.

Utilizând II.7.2. c_3 se poate scrie:

- pentru suprareglare:

$$\sigma_0 = e^{-\pi\zeta_0/\sqrt{1-\zeta_0^2}} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{k_P k+1-\zeta^2}}, 0 \le \zeta_0 < 1;$$

- pentru durata regimului tranzitoriu:

$$t_{s0} \cong \begin{cases} 6\zeta_0/\omega_{n0} = 6\zeta/\omega_n(k_P k+1), & \zeta_0 > 0{,}707 \\ 3/\zeta_o\omega_{n0} = 3/\zeta\omega_n = \text{constant}, & 0 < \zeta_0 \le 0{,}707 \end{cases};$$

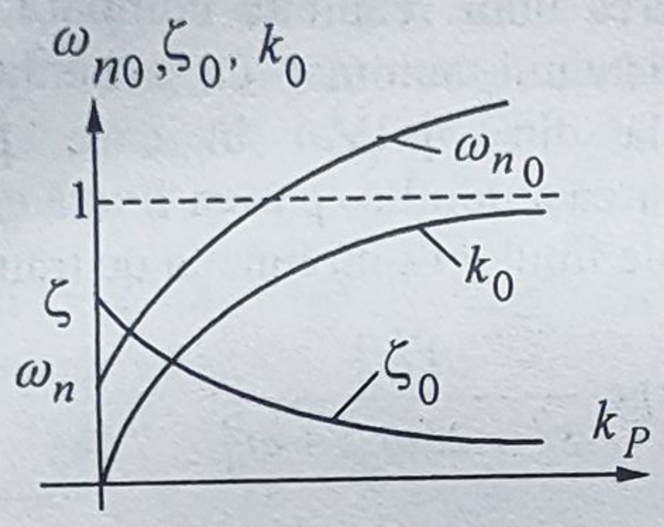


Fig.IV.5. Dependența parametrilor k_0, ω_{no} și ζ_0 de k_P (relațiile (2.4)) în cazul regulatorului P

- pentru durata de creştere:

$$t_{c0} \cong 1{,}8/\omega_n\sqrt{k_P k+1}, \quad 0{,}3 \le \zeta_0 \le 0{,}8.$$

Pe ansamblu efectele creşterii lui k_P sunt contradictorii: e_s si t_{c0} scad, t_{s0} inițial scade după care rămâne constant, în schimb σ_0 creşte. Este uşor de constatat că dacă se impun valorile admisibile e_{s0}, σ_{0a}, t_{s0a} şi t_{c0a}, satisfacerea condițiilor:

$$e_s \le e_{sa}, \sigma_0 \le \sigma_{0a}, t_{s0} \le t_{s0a}, t_{c0} \le t_{c0a} \quad (2.5)$$

cu ajutorul parametrului ajustabil k_P este de obicei imposibilă.

Pe de altă parte realizarea unui compromis ar presupune de fapt schimbarea valorilor e_{sa}, σ_{0a}, t_{s0a} şi t_{c0a} ceea ce nu este posibil, de regulă, decât între limite relativ mici. Din acest motiv, regulatorul P este utilizat mai puțin frecvent. Un caz în care rezultatele utilizării unui regulator P pot fi satisfăcătoare este acela în care partea fixată este de tip PT_1. Acest caz va fi studiat ca un caz particular la 2.2.b (relația (2.9).

2.2. Regulatorul PD

Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = k_P + T_D s; k_P > 0, T_D \ge 0. \quad (2.6)$$

a) Pentru $\zeta \ge 0$, conform schemei din fig.IV.4, cu (2.1) şi (2.5), funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k_0\omega_{n0}^2(1+sT_D/k_P)}{s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2}, k_0 = k_P k/(k_P k+1), \omega_{n0} = \omega_n\sqrt{k_P k+1}, \zeta_0 = (2\zeta + k\omega_n T_D)/2\sqrt{k_P k+1}. \quad (2.7)$$

Comparând (2.4) cu (2.7) se constată că dependența parametrilor k_0, ω_{n0} şi ζ_0 de k_P este similară cu aceea din cazul regulatorului P. În plus ζ_0 depinde şi de T_D. În acest caz la creşterea lui k_P , cerută de exemplu de creşterea lui k_0 (respectiv de reducerea erorii staționare $e_s = 1-k_0$) şi/sau de creşterea lui ω_{n0} (respectiv de reducerea duratei de creştere t_{c0}), este posibilă compensarea unei eventuale scăderi a factorului de amortizare ζ_0 prin creşterea adecvată a lui T_D. De fapt singurul efect al componentei derivative $T_D s$ a regulatorului este acela că prin creşterea lui T_D are loc o creştere a factorului de amortizare

ζ_0. Acest efect este de luat în seamă atunci când factorul de amortizare ζ al părţii fixate este foarte mic.

Regulatorul PD introduce un zero suplimentar pe calea directă a sistemului automat care se regăseşte neschimbat în $G_0(s)$ (relaţia (2.7)). În aceste circumstanţe duratele t_{s0} şi t_{c0} depind într-o primă aproximaţie de $\zeta_0\omega_{n0}$ şi respectiv ω_{n0}, ca în cazul elementului T_2 (după cum s-a arătat la II.7.2. c_3). În schimb aşa cum s-a arătat la II.7.5, zeroul suplimentar poate introduce o dependenţă a suprareglării σ_0 de T_D / k_P.

b) În cazul particular $\zeta \geq 1$, pentru schema din fig.IV.4, cu (2.2) şi (2.5), se obţine:

$$G_R(s)G_F(s)=\left(1+\frac{T_D}{k_P}s\right)\frac{k_P k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}. \tag{2.8}$$

În aceste condiţii zeroul suplimentar introdus de regulator poate fi utilizat pentru compensarea polului celui mai lent din partea fixată. Se poate deci adopta: $T_D/k_P=T_1$, ceea ce transformă partea fixată în element PT_1; regulatorul devine de tip P şi sistemul în circuit deschis are funcţia de transfer: $G_R(s)G_F(s)=k_P k/(T_2 s+1)$.

Funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s)=\frac{k_0}{T_0 s+1}, k_0=k_P k/(k_P k+1), T_0=T_2/(k_P k+1). \tag{2.9}$$

Pentru indicii de calitate: $e_s=1/(k_P k+1)$, $t_{s0}\cong 3T_0=3T_2/(k_P k+1)$ şi inegalităţile corespunzătoare din (2.5) se poate ajunge la o soluţie adecvată pentru k_P, deoarece creşterea lui k_P are ca efect atât scăderea lui e_s cât şi a lui t_{s0}. O dată ales k_P, se poate alege $T_D = k_P T_1$.

2.3. Regulatorul PI

Funcţia de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s)=k_P+\frac{1}{T_I s}, \quad k_P \geq 0, \quad T_I > 0. \tag{2.10}$$

a) Pentru $\zeta \geq 0$, conform schemei din fig.IV.4., cu (2.1) şi (2.10), funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s)=\frac{k\omega_n^2(k_P s+1/T_I)}{s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n^2(k_P k+1)s+k\omega_n^2/T_I}. \tag{2.11}$$

Problema prioritară care trebuie rezolvată este aceea a stabilităţii BIBO. În acest scop se asociază polinomului polilor lui $G_0(s)$ matricea Hurwitz:

$$\mathbf{H}_3=\begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n & 1 & 0 \\ k\omega_n^2/T_I & \omega_n^2(k_P k+1) & 2\zeta\omega_n \\ 0 & 0 & k\omega_n^2/T_I \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Conform criteriului Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4.) din (2.12) se obţin condiţiile: $\det \mathbf{H}_1 = 2\zeta\omega_n > 0$, $\det \mathbf{H}_2 = \omega_n^2[2\zeta\omega_n(k_P k+1)-k/T_I]>0$, $\det \mathbf{H}_3 = (k\omega_n^2/T_1)\det \mathbf{H}_2 > 0$. Din aceasta rezultă că sistemul automat este BIBO stabil dacă şi numai dacă: $\zeta>0$, $\omega_n>0$ şi

$$T_I > k/[2\zeta\omega_n(k_P k+1)]. \tag{2.13}$$

Inegalitatea (2.13), pentru care se dă şi imaginea din fig.IV.6, este o condiţie de ajustare a parametrilor regulatorului în scopul asigurării stabilităţii BIBO.

Condiţia (2.13) poate fi pusă şi sub forma:

$$1/T_I < 2\zeta\omega_n(k_P k + 1)/k, \tag{2.14}$$

care exprimă faptul că amplitudinea $1/T_I$ a componentei I a regulatorului PI (relaţia (2.10)) nu poate fi oricât de mare. Cu alte cuvinte, pentru $1/T_I$ foarte mare (T_I foarte mic) acţiunea componentei I a regulatorului este foarte puternică şi acest lucru, în situaţia nesatisfacerii condiţiei (2.13), face ca, prin circuitul de reacţie, abaterea să nu mai evolueze în sensul propriei sale diminuări sau chiar anulări, ci dimpotrivă. Sistemul automat este BIBO instabil. Din acest motiv ajustarea efectivă a parametrului T_I (sistemul automat fiind în funcţiune) se face întotdeauna de la valori foarte mari către valori mici.

În situaţia în care este necesară o condiţie de ajustare în scopul realizării unei rezerve de stabilitate $\alpha_{\min}$, se face schimbarea de variabilă $s = z - \alpha_{\min}$ în polinomul polilor, urmând ca pentru noul polinom să se facă uz de criteriul Hurwitz sau de ecuaţiile (6.19) de la II.6.7.

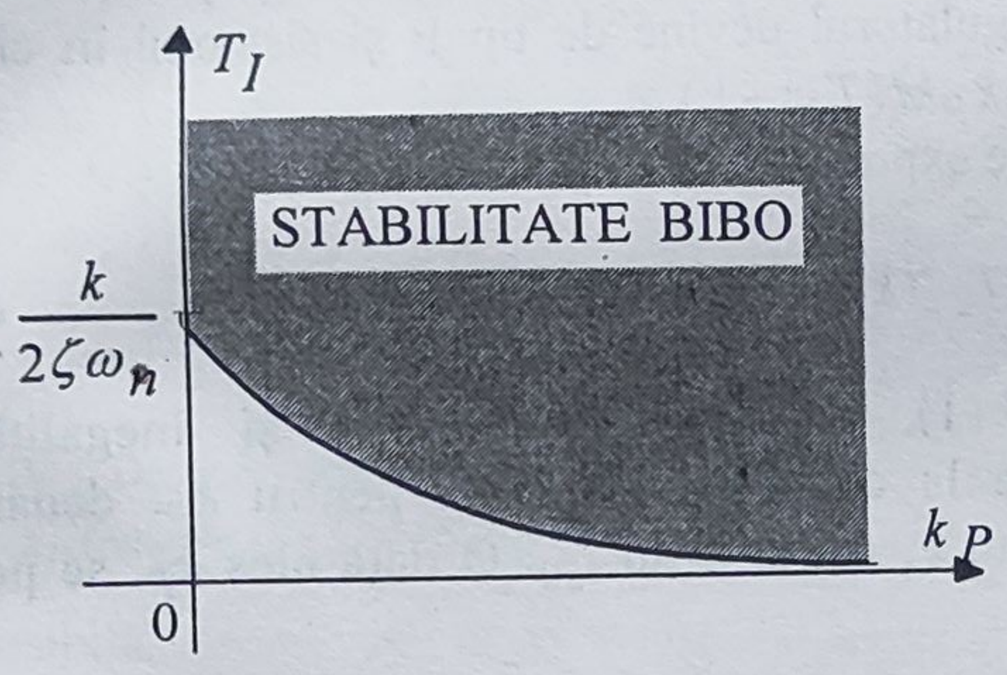


Fig. IV.6. Domeniul de stabilitate BIBO (condiţia (2.13)) în cazul regulatorului PI

Avantajul principal al prezenţei componentei I pe calea directă a sistemului automat, sub rezerva satisfacerii condiţiei (2.13) (sau (2.14)), este că sistemul automat realizează eroarea de poziţionare nulă, conform relaţiei: $e_s = 1 - G_0(0) = 0$.

b) În cazul particular $\zeta \geq 1$, pentru schema din fig.IV.4, cu (2.2) şi (2.10), se obţine:

$$G_R(s)G_F(s) = (k_P T_I s + 1)\frac{k/T_I}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

În aceste circumstanţe zeroul suplimentar introdus de regulatorul PI poate fi utilizat pentru compensarea celui mai lent pol al părţii fixate. Se adoptă $k_P T_I = T_1$, ceea ce transformă partea fixată în element PT_1; regulatorul devine de tip I şi sistemul în circuit deschis are funcţia de transfer:

$$G_R(s)G_F(s) = \frac{k/T_I}{s(T_2 s + 1)}.$$

Funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k}{T_2 T_I s^2 + T_I s + k} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta_0\omega_{n0}s + \omega_{n0}^2}, \omega_{n0} = \sqrt{k/T_2 T_I}, \zeta_0 = \sqrt{T_I/kT_2}/2.$$

Ajustarea lui T_I urmează să se facă în scopul satisfacerii ultimelor trei inegalităţi din (2.5), eventual pe baza unui compromis acceptabil între σ_{0a}, t_{0a}, t_{s0a}, având în vedere că variaţia lui

T_I are efecte contrare asupra factorului de amortizare ζ_0 și pulsației naturale ω_{n0}. O dată ales T_I se determină $k_P = T_1/T_I$.

2.4. Regulatorul PID

Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = k_P + \frac{1}{T_I s} + T_D s, k_P \geq 0, T_I > 0, T_D \geq 0. \tag{2.15}$$

Pentru $\zeta \geq 0$, conform schemei din fig.IV.4, cu (2.1) şi (2.15), funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k\omega_n^2\left(T_D s^2 + k_P s + 1/T_I\right)}{s^3 + \omega_n\left(2\zeta + k\omega_n T_D\right)s^2 + \omega_n^2\left(1 + k_P k\right)s + k\omega_n^2/T_I}. \tag{2.16}$$

Şi în acest caz este necesar să se analizeze cu prioritate stabilitatea BIBO. În acest scop se asociază polinomului polilor lui $G_0(s)$ matricea Hurwitz:

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \omega_n\left(2\zeta + k\omega_n T_D\right) & 1 & 0 \\ k\omega_n^2/T_I & \omega_n^2\left(1 + k_P k\right) & \omega_n\left(2\zeta + k\omega_n T_D\right) \\ 0 & 0 & k\omega_n^2/T_I \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

În conformitate cu criteriul Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) din (2.17) se obţin condiţiile: $\det\mathbf{H}_1 = \omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D) > 0$, $\det\mathbf{H}_2 = \omega_n{}^2[\omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D)(k_P k + 1) - k/T_I] > 0$, $\det\mathbf{H}_3 = (k\omega_n{}^2/T_I)\det\mathbf{H}_2 > 0$. Din acestea rezultă că sistemul automat este BIBO stabil dacă şi numai dacă: $\zeta > 0$, $\omega_n > 0$ şi

$$T_I > k/[\omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D)(k_P k + 1)] \tag{2.18}$$

Inegalitatea (2.18), pentru care se dă o imagine grafică în fig. IV.7, este o condiţie de ajustare a parametrilor regulatorului pentru asigurarea stabilităţii BIBO. Comparativ cu regulatorul PI, prezenţa componentei D în funcţia de transfer a regulatorului, oferă posibilităţi ceva mai largi de ajustare a parametrului T_I. Acest fapt este vizibil şi din (2.18), în care creşterea/micşorarea lui T_D permite micşorarea/creşterea adecvată a lui T_I. Este de asemenea evident că legea de reglare PID îmbină toate proprietăţile legilor PD şi PI prezentate la 2.2 şi 2.3.

Funcţia de transfer a sistemului în buclă deschisă este:

$$G_R(s)G_F(s) = \left(s^2 + \frac{k_P}{T_D}s + \frac{1}{T_I T_D}\right)\frac{k\omega_n^2 T_D}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}.$$

În această situaţie zerourile suplimentare introduse de regulatorul PID pot fi utilizate pentru compensarea polilor părţii fixate. Se adoptă: $k_P/T_D = 2\zeta\omega_n$ şi $1/T_I T_D = \omega_n{}^2$. Regulatorul devine de tip I şi sistemul în circuit deschis are funcţia de transfer:
$G_R(s)G_F(s) = k\omega_n^2 T_D / s$. Funcţia de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k\omega_n^2 T_D}{s + k\omega_n^2 T_D} = \frac{1}{T_0 s + 1}, T_0 = \frac{1}{k\omega_n^2 T_D}.$$

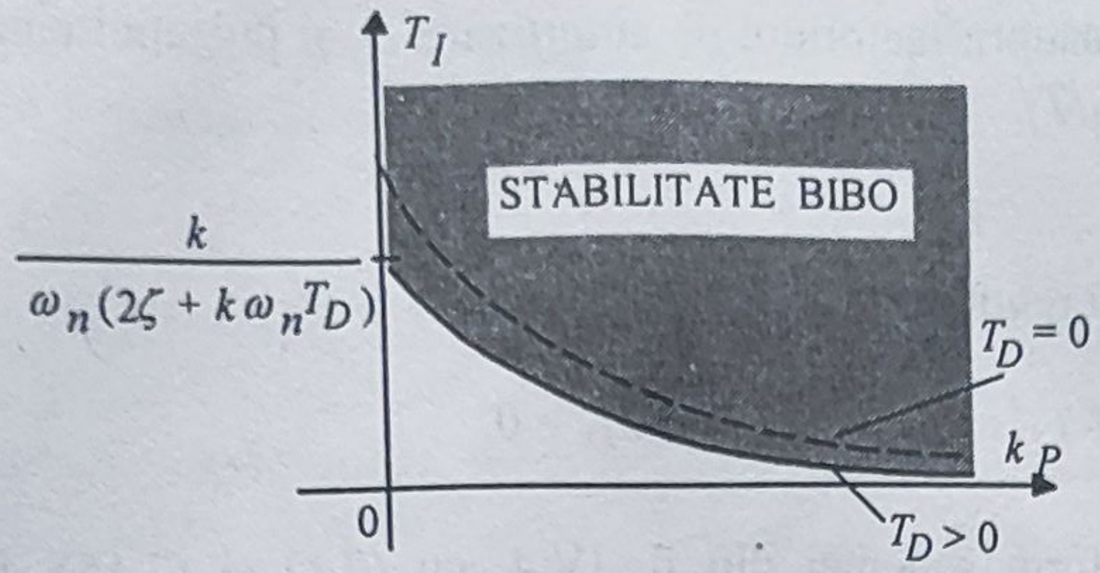


Fig.IV.7. Domeniul de stabilitate BIBO (condiţia (2.18))
în cazul regulatorului PID

Ajustarea lui T_D urmează să se facă în scopul satisfacerii condiţiei $t_{s0} = 3T_0 \leq t_{s0a}$, respectiv din $T_D \geq 3/k\omega_n^2 t_{s0a}$. Pe această bază urmează să se ajusteze $k_P = 2\zeta\omega_n T_D$ şi $T_I = 1/\omega_n^2 T_D$.

Capitolul V

METODA LOCULUI RĂDĂCINILOR

1. Generalități

1.1. Formularea problemei

S-a arătat deja că între performanțele unui sistem dinamic (exprimate prin indicii de calitate - a se vedea II.7.4 - 6) şi localizarea polilor şi zerourilor funcției sale de transfer există a legătură foarte strânsă. În cazul sistemelor automate această afirmație are o relevanță specială în conexiune cu particularitatea că în scopul sintezei regulatorului (adică a unei părți a căii directe) este necesar ca, pornind de la indicii de calitate admisibili, să se găsească ce localizare trebuie să aibă polii şi zerourile sistemului automat şi pe această bază să se stabilească structura şi parametrii regulatorului. Nu trebuie pierdut din vedere că soluția se obține în condițiile în care o parte a sistemului automat este prestabilită; este vorba de partea fixată formată din instalația automatizată, elementul de execuție şi traductorul (fig.III.14).

Schema bloc structurală avută în vedere este cea din fig.III.16, cu relațiile (III.2.1)-(III.2.4). În ipoteza că $G_P(s) = k_P$, se poate face abstracție de elementul de prescriere, astfel că schema bloc structurală pe care se bazează dezvoltările din acest capitol este aceea din fig.V.1. Pentru simplificarea expunerii se consideră $W(s) \equiv 0$, dar o abordare similară cu cea din acest capitol este posibilă şi pentru $W(s) \not\equiv 0$.

Conform schemei din fig.V.1 funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

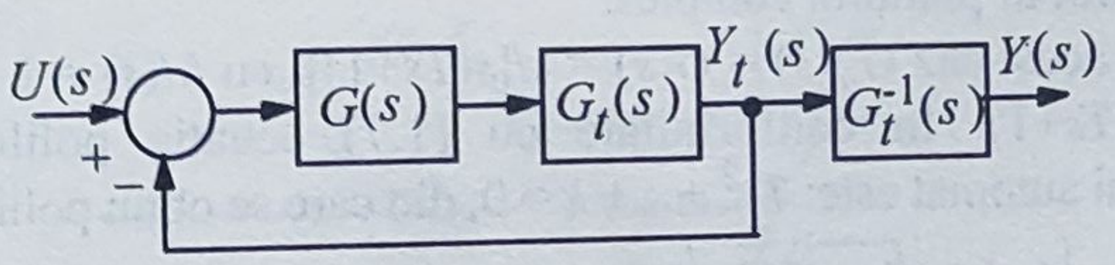


Fig.V.1. Schema bloc structurală pentru studiul metodei locului rădăcinilor

$$G_0(s) = \frac{G_d(s)}{1+G_d(s)} G_t^{-1}(s), \qquad (1.1)$$

în care

$$G_d(s) = G(s)G_t(s) \qquad (1.2)$$

este funcția de transfer a sistemului în *circuit deschis*, şi

$$G(s) = G_R(s)G_E(s)G_{IA}(s) \qquad (1.3)$$

este funcția de transfer a *căii directe* (conform fig.III.14 şi relației (III.2.4)).

Întrucât $G_t(s)$ este de regulă o funcție de transfer de tip P, PT_1, rezultă că $G_t^{-1}(s)$ nu are poli finiți. În conformitate cu (1.1), urmează că

$$1+G_d(s) = 0, \qquad (1.4)$$

numită şi *ecuația caracteristică* a sistemului automat, are ca rădăcini exact polii sistemului automat.

Pentru

$$G_d(s) = kM(s)/N(s), \qquad (1.5)$$

în care $M(s)$ şi $N(s)$ sunt polinoamele (relativ prime între ele) zerourilor şi respectiv polilor sistemului în circuit deschis şi $k \geq 0$ este un parametru dependent de factorul de amplificare al sistemului în circuit deschis, din (1.4) şi (1.5) se obţine:

$$1 + kM(s)/N(s) = 0. \tag{1.6}$$

Prin eliminarea numitorului $N(s)$ din (1.5) rezultă:

$$N(s) + kM(s) = 0, \tag{1.7}$$

care este *ecuaţia polilor* sistemului automat.

Ecuaţia (1.7) pune în evidenţă faptul că polii sistemului automat (în circuit închis) depind de parametrul $k \geq 0$ şi de polii şi zerourile sistemului în circuit deschis. Se poate aprecia că evaluarea acestei dependenţe este de o importanţă cardinală atât pentru analiza proprietăţilor sistemului automat cât şi, mai ales, pentru sinteza regulatorului. Un studiu al unei astfel de dependenţe s-a făcut în subcap.III.4, la exemplul 4.1.

Exemplul 1.1

Pentru schema bloc structurală din fig.V.1 se consideră $G_{IA}(s) = 1/(Ts+1)$, $G_E(s) = 1$, $G_t(s) = 1$ şi a) $G_R(s) = k$, b) $G_R(s) = k/s$, c) $G_R(s) = k(\tau s+1)/s$. Se cere să se studieze dependenţa polilor sistemului automat de parametrul $k \geq 0$.

a) În acest caz $G_d(s) = G(s) = k/(Ts+1)$, cu $M(s) = 1$ şi $N(s) = Ts + 1$. În conformitate cu (1.7) ecuaţia polilor sistemului automat este: $Ts + 1 + k = 0$, din care se obţine polul: $s = -(k+1)/T$. Pentru ilustrarea dependenţei acestui pol de parametrul k se utilizează reprezentarea grafică din fig.V.2. Reprezentarea se face în planul complex deoarece în general polii unui sistem automat sunt numere complexe. Săgeata indică sensul de parcurgere a hodografului pentru k luând valori crescătoare; pentru $k = 0$ polul sistemului automat coincide cu polul $s = -1/T$ al sistemului în circuit deschis; pentru $k = +\infty$, polul sistemului automat ajunge în punctul de la infinit al planului complex.

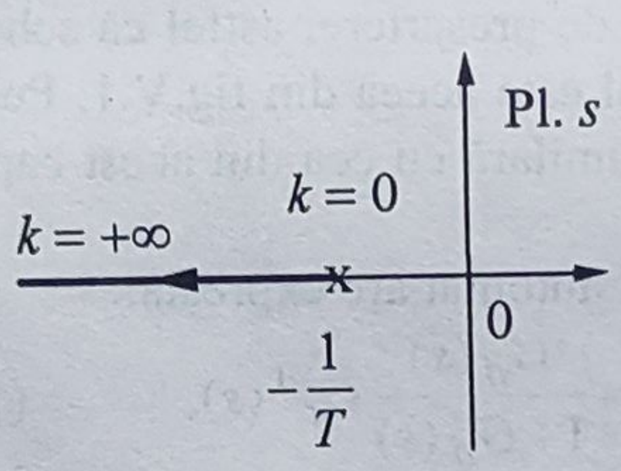


Fig.V.2. Hodograful polului sistemului automat la exemplul 1.1.a

b) În acest caz $G_d(s) = G(s) = k/[s(Ts+1)]$, cu $M(s) = 1$ şi $N(s) = s(Ts+1)$. În conformitate cu (1.7) ecuaţia polilor sistemului automat este: $Ts^2 + s + k = 0$, din care se obţin polii:

$$s_{1,2} = \begin{cases} (-1 \pm \sqrt{1-4kT})/2T, & 0 \leq k \leq 1/4T, \\ (-1 \pm j\sqrt{4kT-1})/2T, & k > 1/4T. \end{cases}$$

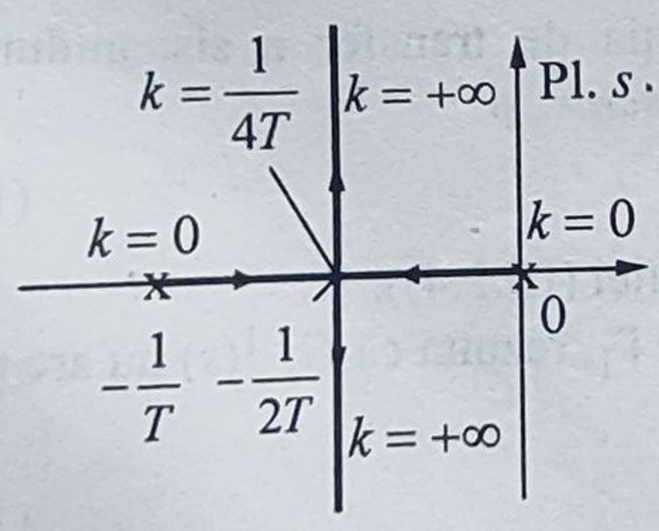


Fig.V.3. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.b

Dependenţa acestor doi poli de parametrul k este ilustrată în fig.V.3. Comparativ cu cazul a se observă că polul $s = 0$ existent în $G_d(s)$ produce o deplasare spre dreapta a hodografului. Pentru $k = 0$ polii sistemului automat pornesc din polii $s_1 = 0$ şi $s_2 = -1/T$ ai sistemului în circuit deschis; pentru $k = 1/4T$ se obţine $s_1 = s_2 = -1/2T$ şi pentru $k > 1/4T$ cei doi poli sunt complex conjugaţi, ajungând în punctul de la infinit pentru $k = +\infty$.

c) În acest caz $G_d(s) = G(s) = k(\tau s+1)/[s(Ts+1)]$, cu $M(s) = \tau s + 1$ şi $N(s) = s(Ts + 1)$. În conformitate cu (1.7) ecuaţia polilor sistemului automat este: $Ts^2 + (\tau k+1)s + k = 0$, din care se obţin polii:

$$s_{1,2}=\begin{cases}[-(\tau k+1)\pm\sqrt{(\tau k+1)^2-4kT}\,]/2T\,, & (\tau k+1)^2\geq 4Tk,\\ [-(\tau k+1)\pm j\sqrt{4kT-(\tau k+1)^2}\,]/2T\,, & (\tau k+1)^2<4Tk.\end{cases}$$

Discriminantul ecuației polilor este: $\Delta=\tau^2k^2+2(\tau-2T)k+1$. Întrucât Δ este un polinom de gradul 2 în k, trebuie avut în vedere și discriminantul ecuației $\Delta=0$. Aceasta este $\Delta_1=4T(T-\tau)$.

În funcție de valorile constantelor T și τ se disting următoarele cazuri:

I. $\tau<T$, $\Delta_1>0$.

Rădăcinile ecuației $\Delta=0$ sunt: $k_{1,2}=[-(\tau-2T)\pm 2\sqrt{T(T-\tau)}\,]/\tau^2$, $k_1<k_2$.

1° Pentru $k\in[0,k_1]\cup[k_2,+\infty)$ rezultă $\Delta\geq 0$, ceea ce înseamnă că polii $s_{1,2}$ sunt reali. Pentru $k=0$ rezultă $s_1=0$ și $s_2=-1/T$. Pentru $k=k_1$ rezultă $s_{1,2}=-1/\tau+\sqrt{(1/\tau-1/T)/\tau}$; iar pentru $k=k_2$ rezultă $s_{1,2}=-1/\tau-\sqrt{(1/\tau-1/T)/\tau}$. Pentru $k=+\infty$ se obține $s_1=-1/\tau$ și $s_2=-\infty$.

2° Pentru $k\in(k_1,k_2)$ rezultă $\Delta<0$, ceea ce înseamnă că polii $s_{1,2}$ sunt complex conjugați. Cei doi poli descriu un cerc. Pentru a demonstra acest lucru se notează:

$$\begin{cases}x=-(\tau k+1)/2T\\ y=\sqrt{4Tk-(\tau k+1)^2}\,/2T\,,\end{cases}$$

care reprezintă părțile reală și imaginară ale polilor $s_{1,2}$. Eliminând k între x și y se ajunge la ecuația: $(x+1/\tau)^2+y^2-(1/\tau-1/T)/\tau=0$. Aceasta este ecuația unui cerc cu centrul în $(-1/\tau,0)$ și raza $\sqrt{(1/\tau-1/T)/\tau}$.

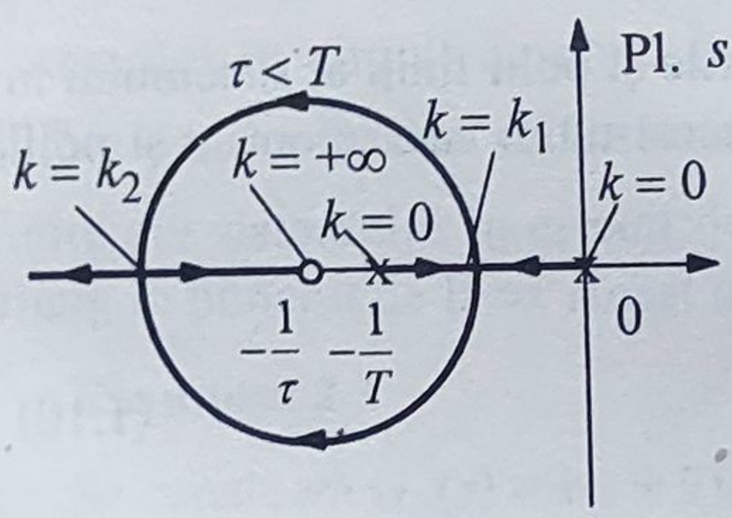


Fig.V.4. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.c (cazul I)

Hodograful polilor $s_{1,2}$ este reprezentat în fig.V.4.

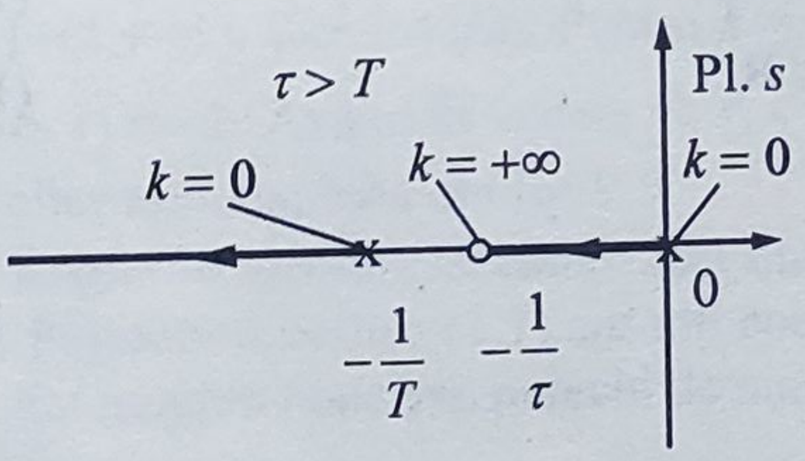


Fig.V.5. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.c (cazul II)

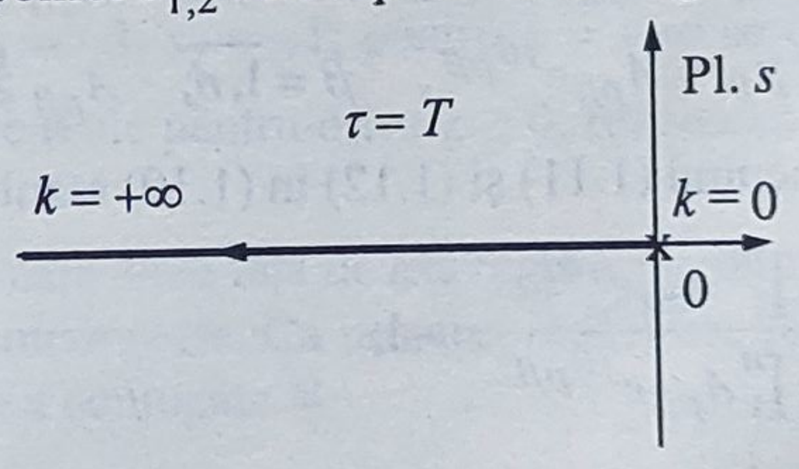


Fig.V.6. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.c (cazul III)

II. $\tau>T$, $\Delta_1<0$.

În acest caz $\Delta>0$ pentru $k\geq 0$, ceea ce înseamnă că polii sistemului automat, $s_{1,2}$, sunt reali. Pentru $k=0$ rezultă $s_1=0$ și $s_2=-1/T$. Pentru $k=+\infty$ rezultă $s_1=-1/\tau$ și $s_2=-\infty$.

Hodograful polilor $s_{1,2}$ este reprezentat în fig.V.5.

III. $\tau=T$.

În acest caz $G_d(s)=G(s)=k/s$. Efectul polului $s=-1/T$ este compensat de efectul zeroului $s=-1/\tau$. Ecuația polilor sistemului automat este $s+k=0$, din care se obține polul $s=-k$. Hodograful corespunzător coincide cu semiaxa reală negativă (fig.V.6). ■

După cum se poate constata de la exemplul 1.1. (în special punctul c) determinarea pe calea directă a rădăcinilor ecuației (1.7) ca funcții de parametrul k nu este procedura utilizabilă în general deoarece se bazează pe calcule relativ laborioase, iar în cazul ecuațiilor de grad mai mare nu există formule pentru calculul rădăcinilor.

Sintetizând ceea ce s-a prezentat până aici rezultă că problema de fond care va fi soluționată în continuare este aceea a determinării prin proceduri neconvenționale, sub formă grafică, a dependenței rădăcinilor ecuației (1.7) a polilor sistemului automat de parametrul k al sistemului în circuit deschis. Rezultatul este *locul rădăcinilor* care în fond este locul geometric (hodograful) al rădăcinilor ecuației (1.7) (a polilor sistemului automat) pentru k luând valori de la 0 la $+\infty$.

1.2. Ecuațiile fundamentale ale locului rădăcinilor

Pentru a ajunge la formularea unui rezultat fundamental, utilizabil la reprezentarea locului rădăcinilor, se concretizează următoarele:

$$M(s) = \prod_1^m (s - z_\alpha) \tag{1.8}$$

$$N(s) = \prod_1^n (s - p_\beta), \tag{1.9}$$

în care $m \le n$ şi $z_\alpha \neq p_\beta$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{1, n}$; z_α şi p_β sunt zerourile şi polii finiți ai sistemului în circuit deschis; z_α şi p_β sunt numere reale sau complexe; în acest ultim caz zerourile şi polii respectivi există ca perechi de numere complexe conjugate.

Înlocuind (1.8) şi (1.9) în (1.6) se obține:

$$k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)} = -1,\ s \in \mathbf{C},\ k \in \mathbf{R}_+. \tag{1.10}$$

Fie $s = Ae^{j\theta}$, $A \ge 0$, $\theta \in \mathbf{R}$. Se definesc fazorii:

$$s - z_\alpha = A_{z\alpha} e^{j\theta_{z\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1, m}; \quad A_{z\alpha} \ge 0, \quad \theta_{z\alpha} \in \mathbf{R}; \tag{1.11}$$

$$s - p_\beta = A_{p\beta} e^{j\theta_{p\beta}}, \quad \beta = \overline{1, n}; \quad A_{p\beta} \ge 0, \quad \theta_{p\beta} \in \mathbf{R}. \tag{1.12}$$

Înlocuind (1.11) şi (1.12) în (1.10) rezultă:

$$k \frac{\prod_1^m A_{z\alpha} e^{j\theta_{z\alpha}}}{\prod_1^n A_{p\beta} e^{j\theta_{p\beta}}} = -1,$$

din care, în mod echivalent, se obțin ecuațiile:

$$k \frac{\prod_1^m A_{z\alpha}}{\prod_1^n A_{p\beta}} = 1 \tag{1.13}$$

$$\sum_1^m \theta_{z\alpha} - \sum_1^n \theta_{p\beta} = (2i + 1)\pi,\ i \in \mathbf{Z}. \tag{1.14}$$

Este uşor de intuit că ecuația (1.14), care nu depinde de k, conține proprietatea esențială utilizabilă pentru construcția locului rădăcinilor. Conform ecuației (1.14) se poate afirma că: punctul s aparține locului rădăcinilor dacă şi numai dacă suma tuturor argumentelor fazorilor cu originea în zerourile lui $G_d(s)$ şi vârful în s (fazori definiți prin (1.11)) minus suma tuturor argumentelor fazorilor cu originea în polii lui $G_d(s)$ şi vârful în s (fazori definiți prin (1.12)) este un multiplu impar de π.

Ecuația (1.13), explicitată sub forma:

$$k = \prod_1^n A_{p\beta} \Big/ \prod_1^m A_{z\alpha} \tag{1.15}$$

se utilizează pentru parametrizarea locului rădăcinilor după valorile lui $k \in \mathbf{R}_+$. Pentru un s aparținând locului rădăcinilor se măsoară modulele $A_{p\beta}$, $\beta = \overline{1, n}$, și $A_{z\alpha}$, $\alpha = \overline{1, m}$, după care se calculează valoarea corespunzătoare a lui k utilizând (1.15).

2. Reguli de trasare a locului rădăcinilor

Pe baza ecuației (1.13) și (după caz) a ecuațiilor (1.6), (1.10) și (1.13) se pot formula următoarele 10 reguli de trasare calitativă rapidă a locului rădăcinilor pentru $G_d(s)$ dat în formă factorizată (relația (1.5) cu (1.8), (1.9)).

1° Pentru k luând valori de la 0 la $+\infty$ cele n rădăcini ale polinomului polilor sistemului automat pornesc din polii lui $G_d(s)$ și ajung în zerourile lui $G_d(s)$.■

D. Ecuația polilor (1.7) este de gradul n și are n rădăcini. Pentru $k = 0$, din (1.7) cu (1.9), ecuația polilor este: $\prod_1^n (s - p_\beta) = 0$, ceea ce înseamnă că locul rădăcinilor pornește din polii sistemului în circuit deschis. Înmulțind (1.10) cu $1/k$ și făcând apoi $k \to +\infty$ se obține: $\prod_1^m (s - z_\alpha) = 0$, ceea ce înseamnă că m dintre polii sistemului automat ajung în zerourile finite ale sistemului în circuit deschis. Restul de $n - m$ poli ai sistemului, pentru $k \to +\infty$, ajung în punctul de la ∞. Acest lucru este vizibil din (1.10) pentru $k \to +\infty$ și $|s| \to +\infty$.■

Exemplul 2.1

Se consideră $G_d(s) = k(s + 2)/[(s + 1)(s + 3)]$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

În conformitate cu (1.4), după eliminarea numitorului și efectuarea tuturor calculelor, se obține ecuația polilor sistemului automat: $s^2 + (k + 4)s + 2k + 3 = 0$. Aceasta are rădăcinile: $s_{1,2} = [-(k + 4) \pm \sqrt{k^2 + 4}]/2$. Pentru $k = 0$ rezultă $s_1 = -3$, $s_2 = -1$; pentru $k = +\infty$ se obține $s_1 = -\infty$, $s_2 = -2$. Având în vedere că $s_{1,2}$ sunt numere reale pentru orice $k \geq 0$, rezultă că locul rădăcinilor are imaginea din fig.V.7.

2° Ramurile locului rădăcinilor sunt simetrice două câte două față de axa reală a planului s.■

D. Polinomul polilor (1.7) are toți coeficienții numere reale. Ca urmare, rădăcinile ecuației (1.7) sunt numere reale sau perechi de numere complex conjugate.■

Exemplul 2.2

Se consideră $G_d(s) = k/(s^2 + 1)$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

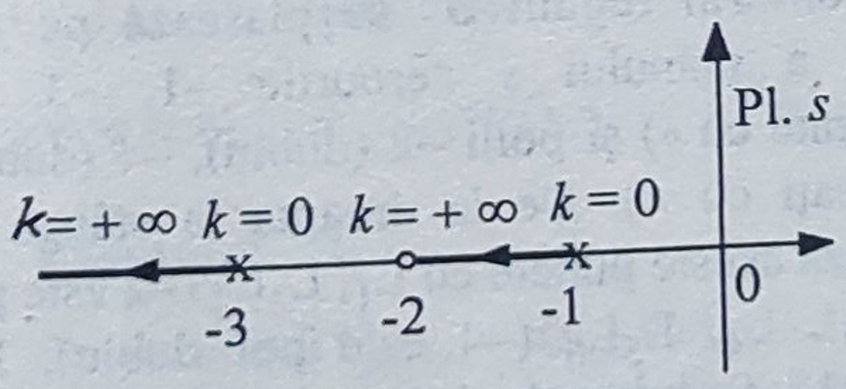


Fig. V.7. Locul rădăcinilor la exemplul 2.1

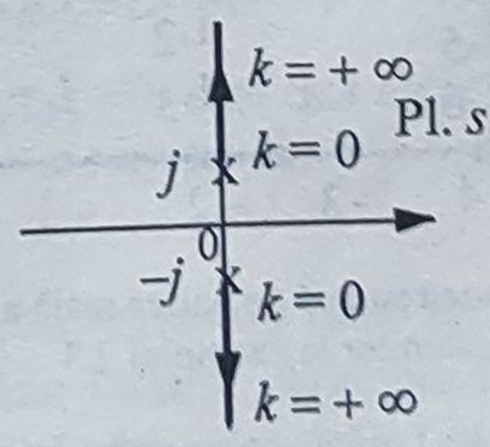


Fig. V.8. Locul rădăcinilor la exemplul 2.2

Utilizând (1.4), după eliminarea numitorului, se obține ecuația polilor sistemului automat: $s^2 + k + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sunt: $s_{1,2} = \pm j\sqrt{k+1}$. Pentru $k = 0$ rezultă $s_{1,2} = \pm j$; pentru $k = +\infty$ se obține: $s_{1,2} = \pm j\infty$. Întrucât $s_{1,2}$ sunt numere imaginare pentru orice $k \geq 0$, rezultă că locul rădăcinilor are imaginea din fig. V.8.■

3° Se plasează pe axa reală a planului s zerourile reale (marcate prin ∘) și polii reali (marcați prin ×) ai lui $G_d(s)$. Se notează punctele corespunzătoare cu L_1, L_2, L_3, ... în succesiunea lor de la $+\infty$ la $-\infty$, contorizându-se și multiplicitățile respective. Segmentele L_1L_2, L_3L_4, L_5L_6... (unele degenerate în puncte) aparțin locului rădăcinilor.■

D. Un punct al axei reale a planului s aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă la dreapta sa, pe axa reală se află un număr impar de zerouri și de poli ai lui $G_d(s)$, fiecare considerat cu ordinul său de multiplicitate.

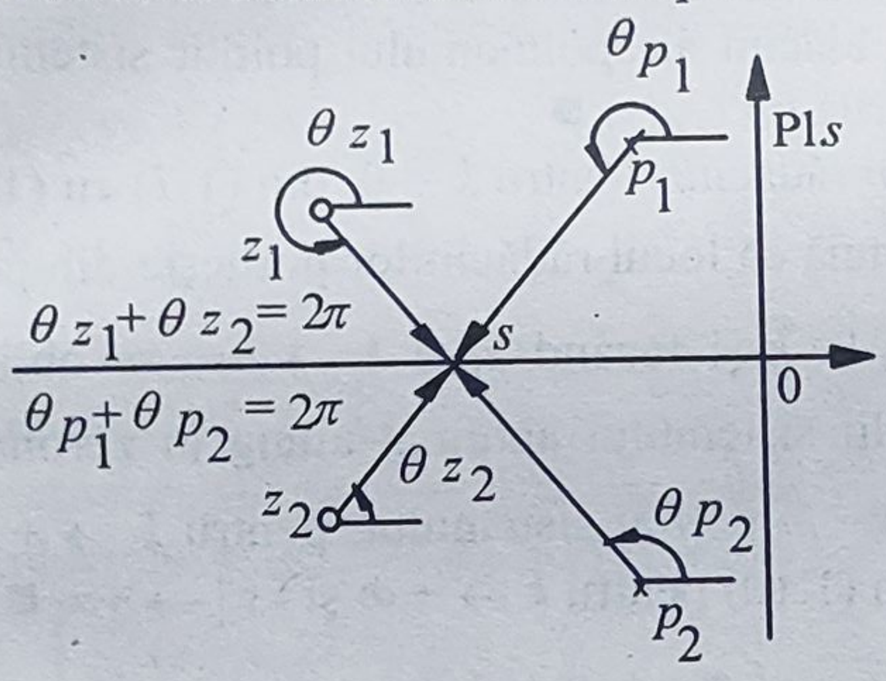


Fig. V.9. Contribuția în ecuația (1.14) în cazul $s \in \mathbf{R}$ și pentru perechi de zerouri sau poli complex conjugați

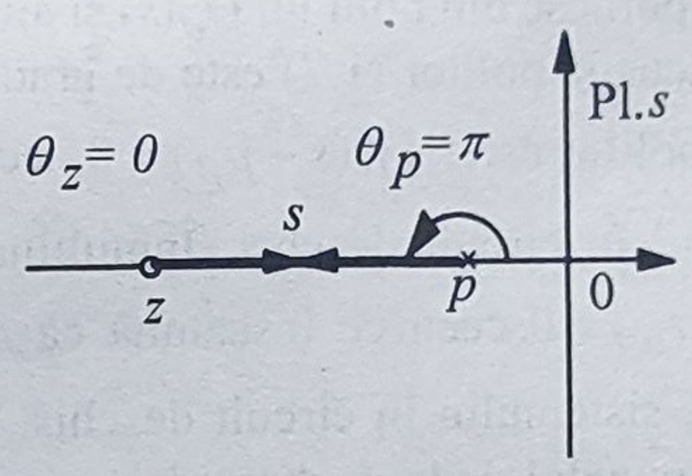


Fig.V.10. Contribuția în ecuația (1.14) în cazul $s \in \mathbf{R}$ și pentru zerouri sau poli reali

Această afirmație este o consecință a ecuației (1.14), particularizată pentru $s \in \mathbf{R}$. Punctul $s \in \mathbf{R}$ aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă contribuția argumentelor fazorilor (1.11) și (1.12) în (1.14) este un număr impar de π. Contribuția unei perechi de zerouri complex conjugate este 2π (fig. V.9).Contribuția unui zero real sau a unui pol real situat la dreapta (stânga) lui s este π (respectiv 0) (fig.V.10). În consecință, $s \in \mathbf{R}$ aparține locului rădăcinilor exact atunci când numărul de zerouri și de poli reali (inclusiv multiplicitățile) ai lui $G_d(s)$ situați la dreapta lui s (pe axa reală) este impar.■

Exemplul 2.3

Se consideră $G_d(s) = k(s+1)(s+3)(s+5)/[(s+2)^2(s+4)^2]$. Se cere să se traseze acea parte a locului rădăcinilor care este situată pe axa reală.

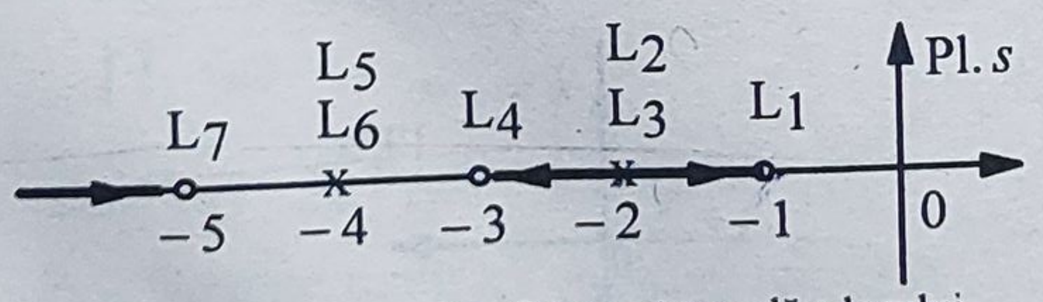


Fig. V.11. Partea situată pe partea reală a locului rădăcinilor la exemplul 2.3

Conform regulii **3°** se plasează pe axa reală a planului s zerourile –1, –3, –5 (marcate cu ∘) și polii –2 (dublu), –4 (dublu) (marcați cu ×). De la dreapta la stânga se notează aceste puncte cu L_1, L_2L_3 (–2 este pol dublu), L_4, L_5L_6 (–4 este pol dublu), L_7, fig.V.11 Segmentele L_1L_4, punctul L_5L_6 și semidreapta de la L_7 la $-\infty$ aparțin locului rădăcinilor.■

4°. Pentru $n - m \geq 1$ locul rădăcinilor are $n - m$ ramuri care ajung în punctul de la ∞ pentru $k \to +\infty$. Dacă $n - m = 1$, este vorba de o singură ramură care coincide cu o parte a axei reale

(de regulă a semiaxei reale negative). Dacă $n-m \geq 2$, este vorba de $n-m$ ramuri care ajung în punctul de la ∞ (pentru $k \to +\infty$) de-a lungul a $n-m$ *asimptote* care trec prin *centroidul*:

$$s_{cg} = \frac{1}{n-m}\left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha\right) \tag{2.1}$$

şi care au direcţiile:

$$\theta_i = \frac{2i-1}{n-m}\pi,\ i = \overline{1, n-m}.\ \blacksquare \tag{2.2}$$

$\mathcal{D}$. Se înmulţeşte ecuaţia (1.10) cu $\prod_1^n(s-p_\beta)/\prod_1^m(s-z_\alpha)$ şi se obţine:

$$\prod_1^n(s-p_\beta)/\prod_1^m(s-z_\alpha)+k=0;\quad n-m\geq 1. \tag{2.3}$$

Pentru $k \to +\infty$ rezultă $|s| \to +\infty$. Efectuând împărţirea specificată în (2.3), pentru k suficient de mare şi $|s|$ suficient de mare, restul acestei împărţiri poate fi neglijat, astfel că din (2.3) se obţine:

$$s^{n-m} + \left(\sum_1^m z_\alpha - \sum_1^n p_\beta\right)s^{n-m-1} + ... + k = 0. \tag{2.4}$$

Aceasta are rădăcinile $s_i(k)$, $i = \overline{1, n-m}$, cu $|s_i(k)| \to +\infty$ pentru $k \to +\infty$. Conform primei formule Viète se poate scrie:

$$\sum_1^{n-m} s_i(k) = -\left(\sum_1^m z_\alpha - \sum_1^n p_\beta\right).$$

Centrul de greutate al acestor rădăcini, respectiv centroidul asimptotelor locului rădăcinilor, este dat de formula (2.1).

Pentru a determina direcţiile asimptotelor se are în vedere că pentru $k \to +\infty$ şi $|s| \to +\infty$ din (2.4) se obţine: $s^{n-m} + k = 0$. Din aceasta rezultă $s_i(k) = k^{1/(n-m)}e^{(2i-1)\pi j/(n-m)}$, $i = \overline{1, n-m}$, ceea ce înseamnă că cele $n-m$ asimptote au direcţiile exprimate prin (2.2).■

5°. Pe segmentele locului rădăcinilor situate pe axa reală între două zerouri reale sau între doi poli reali există în mod necesar puncte de ramificare ale căror abscise se află printre rădăcinile reale ale ecuaţiei :

$$\sum_1^m \frac{1}{x-z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x-p_\beta} = 0,\ x \in \mathbf{R}. \tag{2.5}$$

Pentru k luând valori crescătoare, într-un (dintr-un) punct de ramificare situat între două zerouri reale (doi poli reali) sosesc (pleacă) două ramuri ale locului rădăcinilor.■

$\mathcal{D}$. Această regulă este o consecinţă a regulilor **1°** şi **3°**. Pentru a obţine ecuaţia (2.5) se porneşte de la (1.4) cu $s = x \in \mathbf{R}$, adică de la $1+G_d(x) = 0$. Aceasta trebuie să aibă o rădăcină dublă pentru $x \in \mathbf{R}$, adică $(1+G_d(x))' = 0$, respectiv $G'_d(x) = 0$. Pe de altă parte, utilizând (1.4), (1.8) şi (1.9) se poate scrie: $\ln G_d(x) = \ln k + \sum_1^m \ln(x-z_\alpha) - \sum_1^n \ln(x-p_\beta)$. Derivând această expresie se obţine: $G'_d(s)/G_d(s) = \sum_1^m 1/(x-z_\alpha) - \sum_1^n 1/(x-p_\beta) = 0$, care este chiar ecuaţia (2.5).■

Exemplul 2.4.

Se consideră $G_d(s) = k(s+4)/[(s+1)(s+2)^2]$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

Segmentul corespunzător intervalului $[-4, -1]$ aparţine locului rădăcinilor. Între -2 şi -1 există un punct de ramificare a cărui abscisă se află printre rădăcinile reale ale ecuaţiei: $1/(x+4) - 1/(x+1) - 2/(x+2) = 0$. Eliminând numitorul comun se obţine ecuaţia polinomială:

$2x^2+13x+14=0$ ale cărei rădăcini sunt $x_1=-5,125$ şi $x_2=-1,36$. A doua rădăcină este abscisa punctului de ramificare.

Conform regulii **4°** locul rădăcinilor are două ramuri care ajung în punctul de la ∞. Centroidul celor două asimptote este de abscisă $s_{cg}= (-1-2+4)/2 = -1/2$. Direcţiile celor două asimptote sunt $\theta_1 = \pi/2$ şi $\theta_2 = 3\pi/2$. Locul rădăcinilor este reprezentat în fig. V.12.■

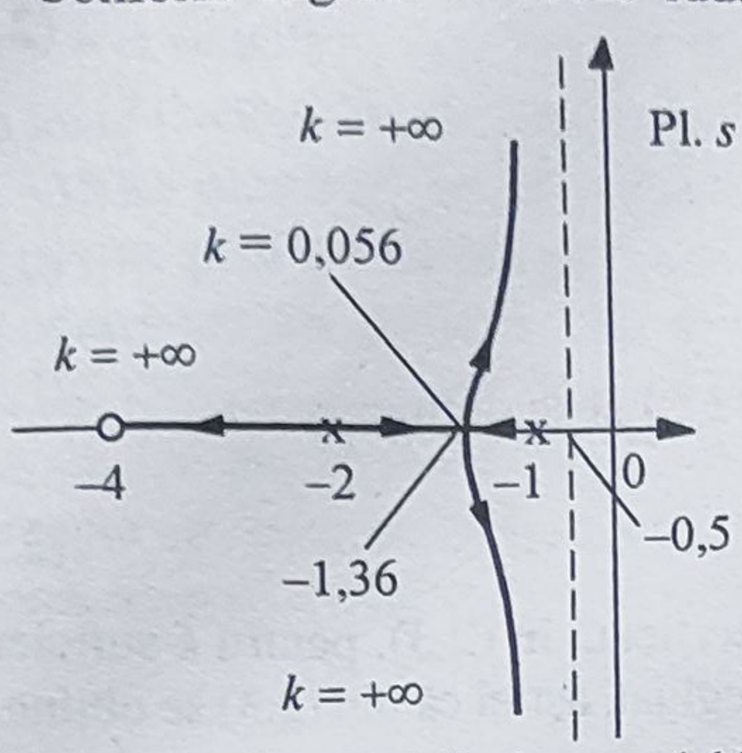


Fig.V.12. Locul rădăcinilor la exemplul 2.4

6°. Din polii reali multipli şi în zerourile reale multiple pleacă şi respectiv sosesc un număr de ramuri egal cu multiplicitatea polului şi respectiv zeroului. Direcţiile tangentelor la respectivele ramuri (în polii sau zerourile corespunzătoare, de multiplicitate q) sunt:

$$\theta_i = 2\pi i/q\,,\ i=\overline{0,q-1}, \tag{2.6}$$

dacă numărul de zerouri şi de poli reali situaţi la dreapta (polului sau zeroului considerat) este impar, sau

$$\theta_i = (2i+1)\pi/q\,,\ i=\overline{0,q-1}, \tag{2.7}$$

dacă numărul de zerouri şi de poli reali situaţi la dreapta (polului sau zeroului considerat) este par.■

Demonstraţie. Această regulă este o consecinţă directă a ecuaţiei (1.14). Demonstraţia este similară cu aceea de la regula **3°**. Pentru obţinerea formulelor (2.6) şi (2.7) cu ajutorul ecuaţiei (1.14) se ţine seama că argumentul corespunzător unui pol sau zero multiplu este $q\theta$ în care q este multiplicitatea corespunzătoare .■

Exemplul 2.5

Se consideră $G_d(s)=k(s+1)/s^2$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

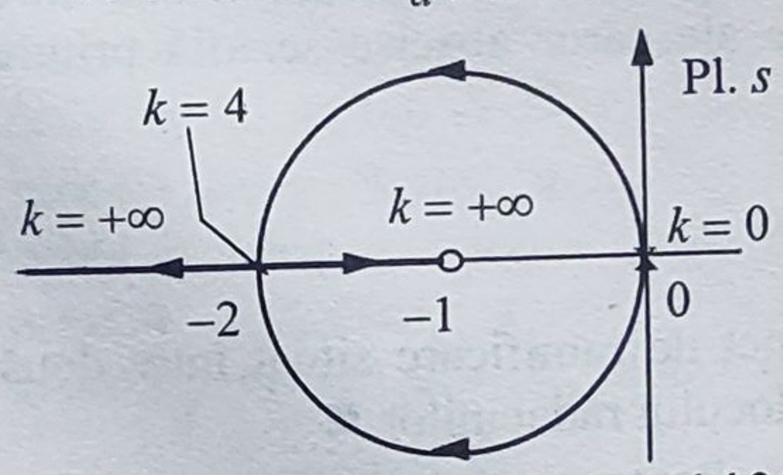


Fig.V.13. Locul rădăcinilor la exemplul 2.5

Semidreapta corespunzătoare intervalului $(-\infty, -1]$ aparţine locului rădăcinilor. Din polul dublu $s = 0$ pornesc două rădăcini ale căror tangente în $s = 0$ au direcţiile $\theta_0 = \pi/2$ şi $\theta_1 = 3\pi/2$. Aceasta înseamnă că locul rădăcinilor este tangent, în origine, la axa imaginară a planului s.

Conform regulii **5°** există un punct de ramificare la stânga punctului –1. Abscisa acestui punct se găseşte printre rădăcinile reale ale ecuaţiei: $1/(x+1)-2/x = 0$. Punctul de ramificare este $x = -2$ şi ramurile care pornesc din $s = 0$ ajung în acest punct pentru $k = 4$. Locul rădăcinilor este reprezentat în fig.V.13.■

7°. Din polii complecşi multipli pleacă şi în zerourile complexe multiple sosesc un număr de ramuri egal cu ordinul de multiplicitate n_b al polului şi respectiv m_a al zeroului. Direcţiile tangentelor la respectivele ramuri sunt:

$$\theta_{bi} = \frac{1}{n_b}\left[\sum_{\alpha=1}^{m}\arg(p_b - z_\alpha) - \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq b}}^{n}\arg(p_b - p_\beta) - (2i+1)\pi\right],\ i=\overline{0,n_b-1}, \tag{2.8}$$

în cazul polului p_b, şi

$$\theta_{ai} = \frac{1}{m_a}\left[\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq a}}^{m} \arg(z_a - z_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{n} \arg(z_a - p_\beta) - (2i+1)\pi\right],\ i = \overline{0, m_a - 1}, \qquad (2.9)$$

în cazul zeroului z_a.■

$\mathcal{D}$. Această regulă este o consecinţă directă a ecuaţiei (1.14). Demonstraţia este similară cu aceea de la regula **3°**. Pentru obţinerea formulelor (2.8) şi (2.9) se ţine seama că argumentul corespunzător unui pol sau zero multiplu este $n_b\theta_b$, respectiv $m_a\theta_a$.■

8°. După determinarea punctelor de ramificare şi a numărului de ramuri care sosesc în şi pleacă din fiecare punct de ramificare (în total $2r$ ramuri), rezultă că unghiurile dintre două ramuri alăturate este π/r.■

$\mathcal{D}$. Această regulă este o consecinţă directă a ecuaţiei (1.14).■

9°. Se determină punctele de intersecţie ale locului rădăcinilor cu axa imaginară a planului s şi valorile corespunzătoare ale lui k. În acest scop se utilizează ecuaţia:

$$N(j\omega) + kM(j\omega) = 0,\ \omega \in \mathbf{R},\ k \geq 0. \blacksquare \qquad (2.10)$$

$\mathcal{D}$. Ecuaţia (2.10) se obţine din (1.7) pentru $s = j\omega$.■

O altă posibilitate de determinare mai întâi a lui k şi apoi a lui ω o oferă schema Routh (a se vedea II.6.5). Anulând elementele penultimei linii din schema lui Routh se obţin valorile lui k pentru care locul rădăcinilor intersectează axa imaginară. Dacă elementele antepenultimei linii sunt notate cu $a(k)$ şi $b(k)$, atunci punctele de intersecţie ale locului rădăcinilor cu axa imaginară se obţin ca rădăcini ale ecuaţiei:

$$a(k)s^2 + b(k) = 0.$$

10°. Parametrizarea după $k \geq 0$ a locului rădăcinilor este posibilă prin măsurarea segmentelor $A_{z\alpha}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $A_{p\beta}$, $\beta = \overline{1,n}$, pentru punctele dorite ale locului rădăcinilor, după care se calculează valoarea lui k utilizând formula (1.15).■

Exemplul 2.6

Se consideră: $G_d(s) = \dfrac{k(s+2)}{s(s+3)(s+8)(s+4-j5)(s+4+j5)}$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

a. (Regula **1°**) Se plasează în planul s: $z_1 = -2$, $p_1 = 0$, $p_2 = -3$, $p_3 = -8$, $p_{4,5} = -4 \pm j5$. Pentru $k = 0$ locul rădăcinilor pleacă din $p_1, \ldots, p_5$ şi pentru $k = +\infty$ o ramură ajunge în z_1 şi alte patru ramuri ajung în punctul de la ∞ (fig.V.14).

b. (Regula **2°**) Locul rădăcinilor este simetric faţă de axa reală a planului s.

c. (Regula **3°**) Se trasează acea parte a locului rădăcinilor care aparţine axei reale a planului s (fig.V.14).

d. (Regula **4°**) Numărul de ramuri care ajung în punctul de la ∞ este $n - m = 5 - 1 = 4$. Centroidul celor patru asimptote are abscisa: $s_{cg} = (0-3-8-4+j5-4-j5+2)/4 = -4{,}25$. Direcţiile asimptotelor sunt: $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$, $\theta_3 = 5\pi/4$, $\theta_4 = 7\pi/4$.

e. (Regula **5°**) Între -8 şi -3 există un punct de ramificare. Abscisa acestui punct se află printre rădăcinile reale ale ecuaţiei :$1/(x+2) - 1/x - 1/(x+3) - 1/(x+8) - 1/(x+4-j5) - 1/(x+4+j5) = 0$. Rădăcina căutată este $x \cong -5{,}2$.

f. (Regula **7°**) Unghiurile tangentelor ramurilor care pleacă din $p_{4,5}$ sunt:

$\theta_{p4} = \theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p5}) - 180° = 112° - (128° + 101° + 51° + 90°) - 180° =$
$= -438° \rightarrow \theta_{p4} = -78°, \theta_{p5} = 78°$ (prin simetrie față de θ_{p4}). Unghiurile $\theta_{z1}, \theta_{p1}, \theta_{p2}, \theta_{p3}$, θ_{p5} au fost măsurate pe baza reprezentării la scară din fig.V.15.

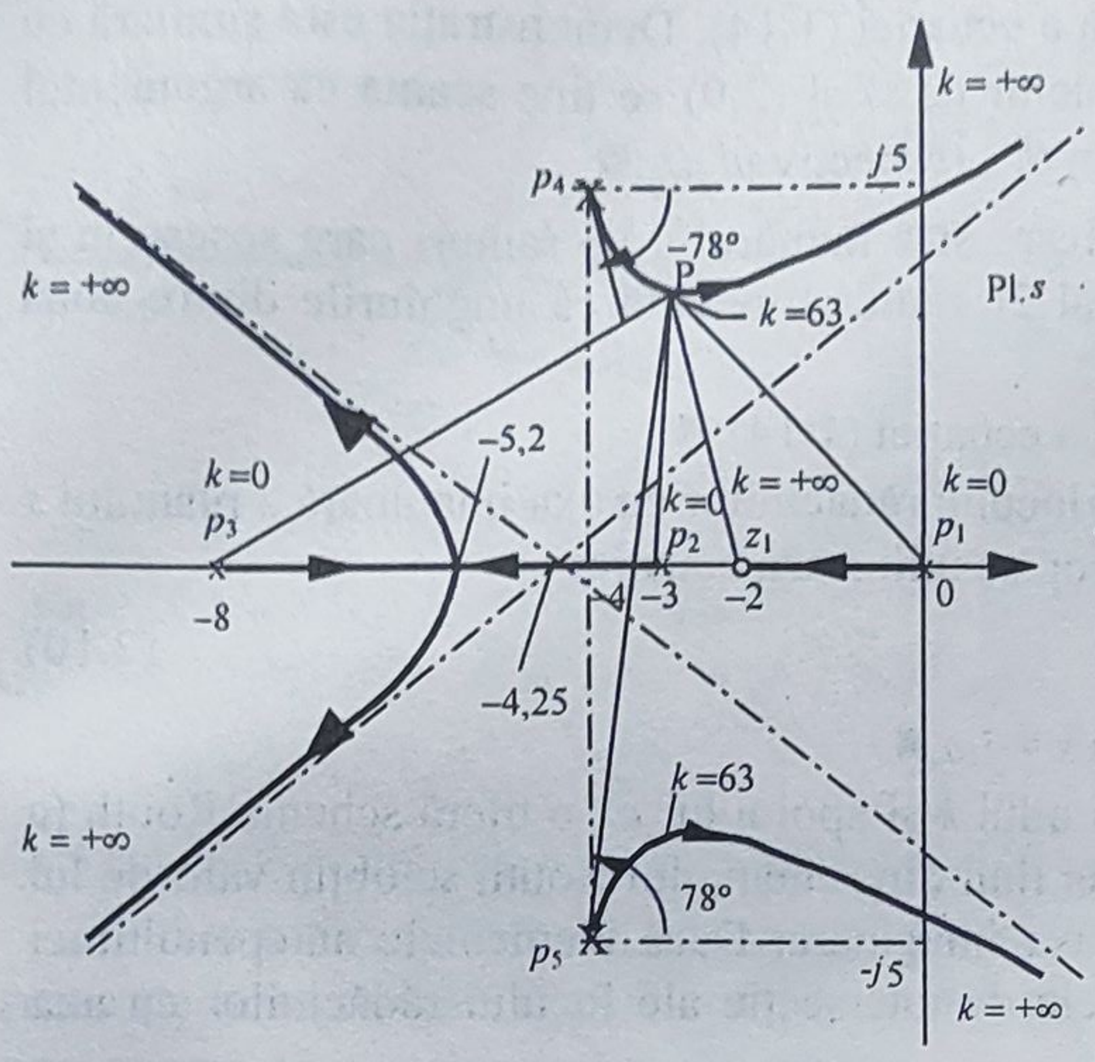


Fig. V.14. Locul rădăcinilor la exemplul 2.6

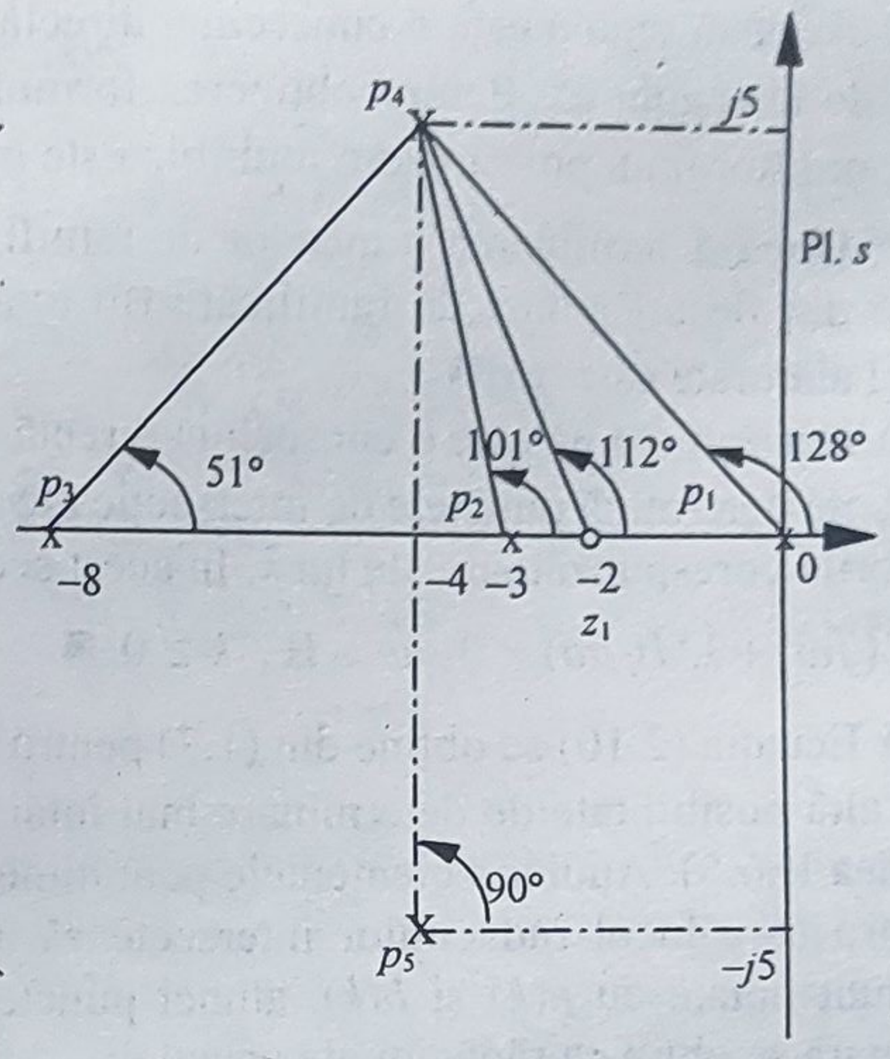


Fig.V.15. Pentru determinarea unghiurilor de plecare din polii complecşi la exemplul 2.6 (punctul f)

g. (Regula **8°**) Unghiurile dintre două ramuri alăturate în punctul de ramificare sunt egale cu $\pi/2$.

h. (Regula **9°**) Ecuația (1.7) are forma: $s^5+19s^4+153s^3+643s^2+(948+k)s+2k=0$. Pentru $s = j\omega$ se obține:

$$\begin{cases} 19\omega^4 - 643\omega^2 + 2k = 0 \\ \omega^5 - 153\omega^4 + (984 + k)\omega = 0 \end{cases},$$

din care rezultă $\omega_0 \cong \pm 4{,}939$ şi $k_0 = 2165$. Punctele de intersecție cu axa imaginară sunt: $s \cong \pm j4{,}939$ şi ele corespund lui $k = 2165$. Se trage concluzia că pentru $k \geq 2165$ sistemul automat este BIBO instabil.

i. (Regula **10°**) Locul rădăcinilor se poate parametriza după valorile lui k. De exemplu, pentru punctul P (fig.V.14) se măsoară $Ap_1 = |Pp_1| = 2{,}4$, $Ap_2 = |Pp_2| = 2{,}02$, $Ap_3 = |Pp_3| = 4{,}87$, $Ap_4 = |Pp_4| = 1{,}2$, $Ap_5 = |Pp_5| = 4{,}42$, $Az_1 = |Pz_1| = 1{,}99$. Utilizând (1.15) rezultă $k \cong 63$.■

3. Efectul unui zero suplimentar

Se consideră funcția de transfer a sistemului în circuit deschis:

$$G_d(s) = k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)} (s - z), \qquad (3.1)$$

în care $s = z$ este un zero real suplimentar (față de situația corespunzătoare funcției de transfer (1.5) cu (1.8) și (1.9)) care poate lua valori de la $-\infty$ la $+\infty$. Evident se admite că $m+1 \le n$, astfel că ipoteza conform căreia $G_d(s)$ este o funcție proprie rămâne valabilă.

Cu referire la regulile **1°** - **10°** prezentate în subcap.2, efectele zeroului real suplimentar sunt următoarele:

1°. Gradul polinomului polilor sistemului automat rămâne același, adică n. În schimb crește cu 1 numărul zerourilor finite, respectiv locul rădăcinilor are o ramură care ajunge în $s = z$ și scade cu 1 numărul ramurilor locului rădăcinilor care ajung în punctul de la ∞.

2°. Rămâne neschimbată.

3°. Se schimbă configurația locului rădăcinilor pe axa reală în funcție de poziția zeroului $s = z$ față de z_α, $\alpha = \overline{1,m}$, și p_β, $\beta = \overline{1,n}$.

4°. Dacă $n - m = 1$, prin prezența unui zero suplimentar, locul rădăcinilor nu mai are ramuri care ajung în punctul de la ∞. Dacă $n - m = 2$, prin prezența zeroului suplimentar, locul rădăcinilor are o singură ramură care ajunge în punctul de la ∞ care coincide cu o parte a axei reale (de regulă a semiaxei reale negative). Dacă $n - m \ge 3$, prin prezența zeroului suplimentar locul rădăcinilor are $n - m - 1$ ramuri care ajung în punctul de la ∞.

Centroidul s_{cg}^{z}, față de vechiul centroid s_{cg} (relația (2.1)), are expresia:

$$s_{cg}^{z} = \frac{1}{n-m-1}\left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha - z\right) = \frac{n-m-1+1}{n-m-1}\frac{1}{n-m}\left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha\right) - \frac{1}{n-m-1}z =$$

$$= s_{cg} + \frac{1}{n-m-1}(s_{cg} - z)$$

din care rezultă:

$$s_{cg}^{z} - s_{cg} = \frac{1}{n-m-1}(s_{cg} - z)\,. \qquad (3.2)$$

Din (3.2) este evident că pentru $z < s_{cg}$ se obține $s_{cg}^{z} > s_{cg}$, pentru $z = s_{cg}$ rezultă $s_{cg}^{z} = s_{cg}$ și pentru $z > s_{cg}$ are loc $s_{cg}^{z} < s_{cg}$. Se trage concluzia că zeroul suplimentar produce o deplasare, de-a lungul axei reale, a locului rădăcinilor: pentru z situat la stânga/dreapta lui s_{cg} locul rădăcinilor se deplasează la dreapta/stânga lui s_{cg}, conform relației (3.2).

În ceea ce privește unghiurile asimptotelor, prin micșorarea cu 1 a numărului de ramuri care ajung în punctul de la ∞, respectivele unghiuri cresc cu $\pi / [(n-m)(n-m-1)]$.

5°. Numărul și poziția punctelor de ramificare se modifică în funcție de poziția zeroului suplimentar $s = z$ față de poziția zerourilor z_α, $\alpha = \overline{1,m}$,, și polilor p_β, $\beta = \overline{1,n}$. Ecuația punctelor de ramificare este:

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_\beta} + \frac{1}{x - z} = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (3.3)$$

6°. Pentru $p_b \in \mathbf{R}$ și $z = p_b$ are loc o compensare a efectului polului p_b prin efectul zeroului suplimentar $s = z$. Dacă p_b este de multiplicitate $n_b \ge 2$, atunci numărul de ramuri care pleacă din p_b este $n_b - 1$, iar unghiul dintre două ramuri alăturate crește cu $2\pi / [n_b(n_b - 1)]$.

Pentru $z_a \in \mathbf{R}$, de multiplicitate m_a și $z = z_a$, numărul de ramuri care sosesc în z_a este $m_a + 1$, iar unghiurile între două ramuri alăturate scade cu $2\pi / [m_a(m_a + 1)]$.

7° – 8°. Rămân neschimbate.

9°. Punctele de intersecţie ale locului rădăcinilor cu axa imaginară (dacă astfel de puncte există) îşi schimbă poziţia în funcţie de poziţia zeroului suplimentar $s = z$ faţă de z_α, $\alpha = \overline{1,m}$, şi p_β, $\beta = \overline{1,n}$.

10°. Parametrizarea după valorile lui $k \geq 0$ a locului rădăcinilor se modifică în funcţie de poziţia zeroului suplimentar $s = z$ faţă de z_α, $\alpha = \overline{1,m}$, şi p_β, $\beta = \overline{1,n}$.

Exemplul 3.1

Se consideră $G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)]$. Prin introducerea unui zero suplimentar (prin intermediul funcţiei de transfer a regulatorului) se obţine $G_d(s) = k(s-z)/[s(s+2)(s+4)]$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor pentru $G_d(s)$ dat iniţial şi pentru $G_d(s)$ având zeroul suplimentar plasat în diferite puncte ale axei reale. În acest sens sunt semnificative următoarele situaţii: $z < -4$, $z = -4$, $-4 < z < -2$, $z = -2$, $-2 < z < 0$, $z = 0$, $z > 0$. Locul rădăcinilor pentru $G_d(s)$ dat iniţial şi pentru z plasat pe axa reală conform situaţiilor de mai sus este reprezentat în fig.V.16.■

4. Efectul unui pol suplimentar

Se consideră funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis:

$$G_d(s) = k\frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)}\frac{1}{s - p} \tag{4.1}$$

în care $s = p$ este un pol real suplimentar (faţă de situaţia corespunzătoare funcţiei de transfer (1.5) cu (1.8) şi (1.9)) care poate lua valori de la $-\infty$ la $+\infty$.

Cu referire la regulile **1° - 10°** prezentate în subcap.2, efectele polului real suplimentar sunt următoarele:

1°. Gradul polinomului polilor sistemului automat creşte cu 1. Locul rădăcinilor are o ramură nouă care porneşte din $s = p$ şi numărul de ramuri care ajung în punctul de la ∞ creşte cu 1.

2°. Rămâne neschimbată.

3°. Se schimbă configuraţia locului rădăcinilor pe axa reală în funcţie de poziţia polului $s = p$ faţă de z_α, $\alpha = \overline{1,m}$, şi p_β, $\beta = \overline{1,n}$.

4°. Dacă $n = m$, prin prezenţa unui pol suplimentar, locul rădăcinilor are o singură ramură care ajunge în punctul de la ∞ care coincide cu o parte a axei reale (de regulă a semiaxei reale negative). Dacă $n - m \geq 1$, prin prezenţa unui pol suplimentar, locul rădăcinilor are $n - m + 1$ ramuri care ajung în punctul de la ∞.

Centroidul s_{cg}^p faţă de vechiul centroid s_{cg} (relaţia(2.1)), are expresia:

$$s_{cg}^p = \frac{1}{n-m+1}\left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha + p\right) = \frac{n-m+1-1}{n-m+1}\frac{1}{n-m}\left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha\right) + \frac{1}{n-m+1}p =$$

$$= s_{cg} + \frac{1}{n-m+1}(p - s_{cg})$$

din care rezultă:

$$s_{cg}^p - s_{cg} = \frac{1}{n-m+1}(p - s_{cg}). \tag{4.2}$$

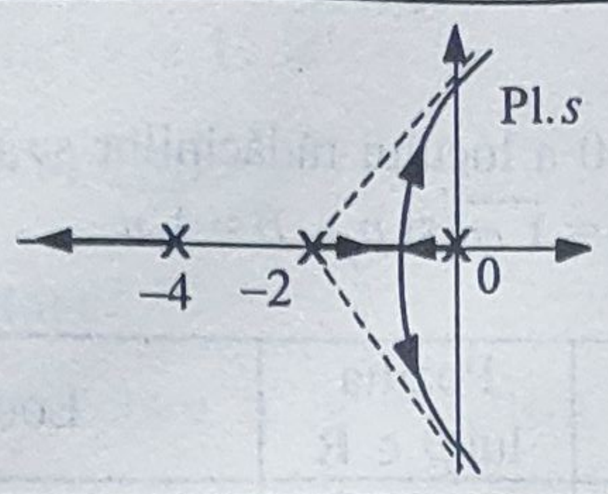
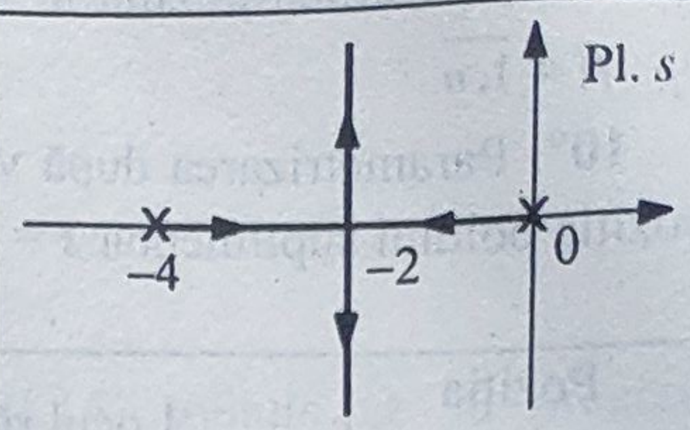
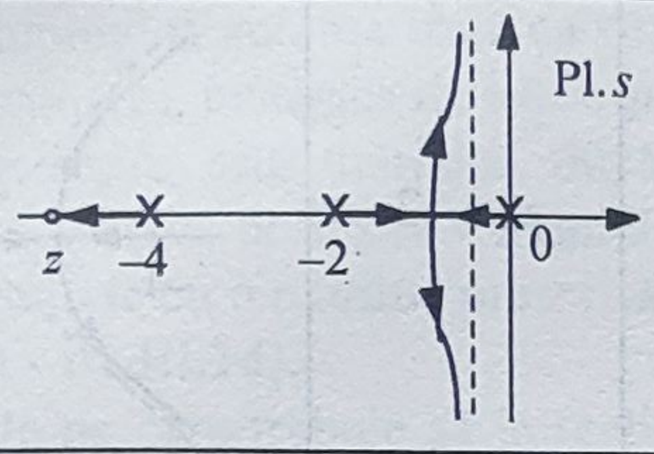
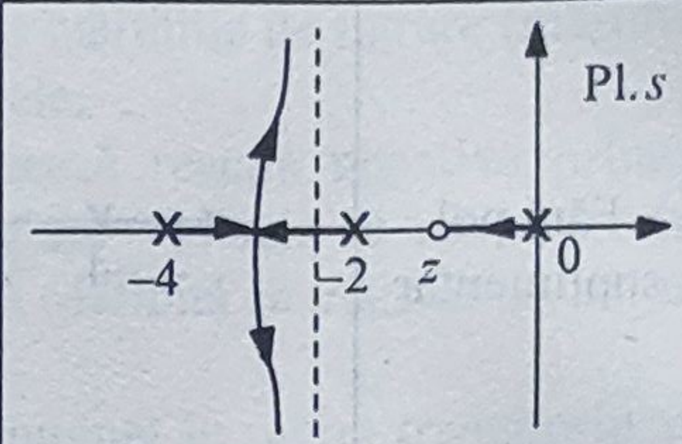
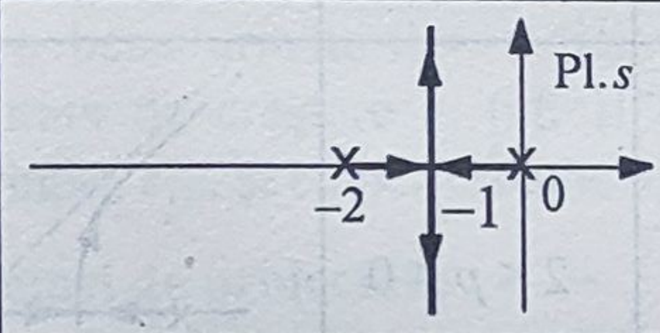
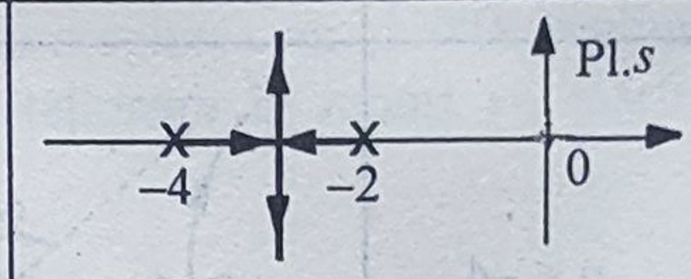
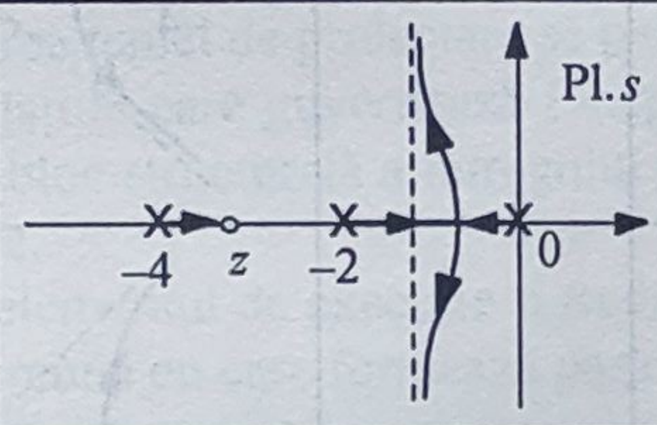
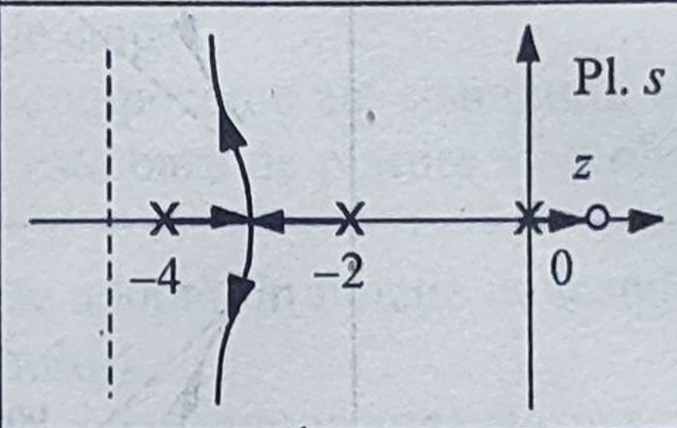
Poziţia lui $z \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor	Poziţia lui $z \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor
Fără zero suplimentar		$z = -2$	
$z < -4$		$-2 < z < 0$	
$z = -4$		$z = 0$	
$-4 < z < -2$		$z > 0$	

Fig.V.16. Locul rădăcinilor la exemplul 3.1

Din (4.2) este evident că pentru $p < s_{cg}$ se obţine $s_{cg}^{p} < s_{cg}$, pentru $p = s_{cg}$ rezultă $s_{cg}^{p} = s_{cg}$ şi pentru $p > s_{cg}$ are loc $s_{cg}^{p} > s_{cg}$. Se trage concluzia că polul suplimentar produce o deplasare, de-a lungul axei reale, a locului rădăcinilor: pentru p situat la stânga/dreapta lui s_{cg} locul rădăcinilor se deplasează la stânga/dreapta lui s_{cg}, conform relaţiei (4.2).

În ceea ce priveşte unghiurile asimptotelor, prin creşterea cu 1 a numărului de ramuri care ajung în punctul de la ∞, respectivele unghiuri se micşorează cu $\pi/[(n-m)(n-m+1)]$.

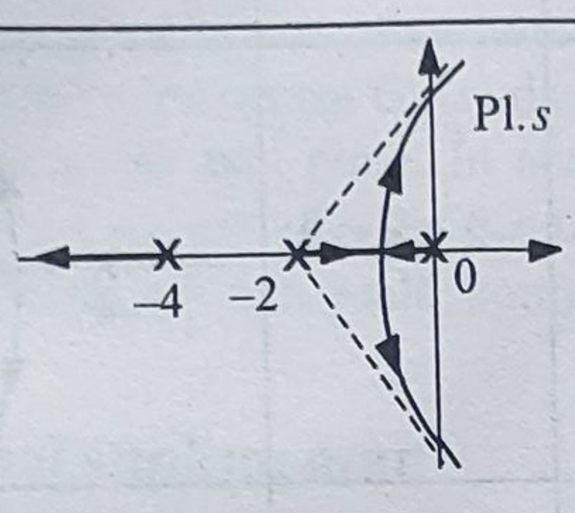
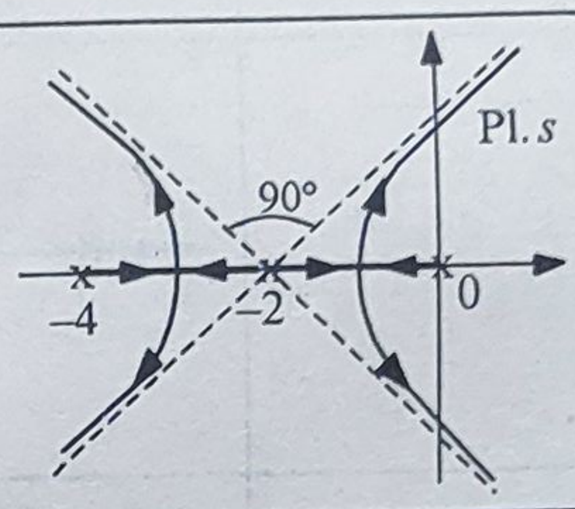
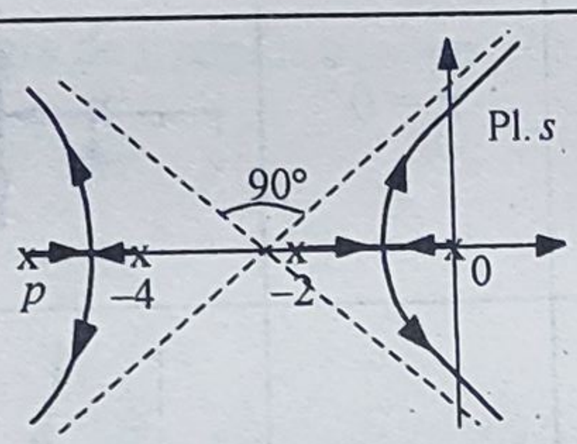
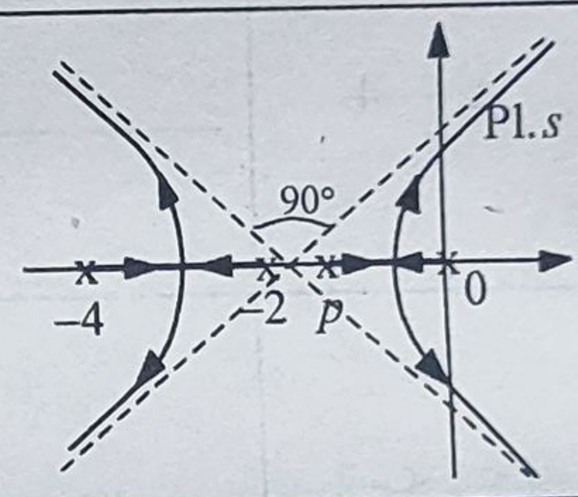
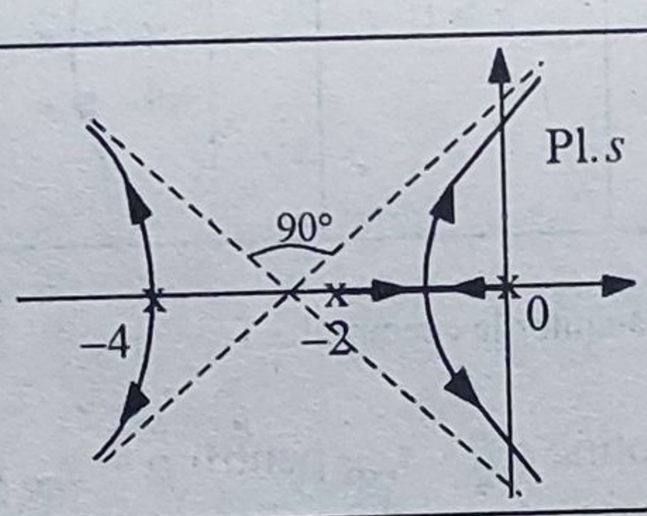
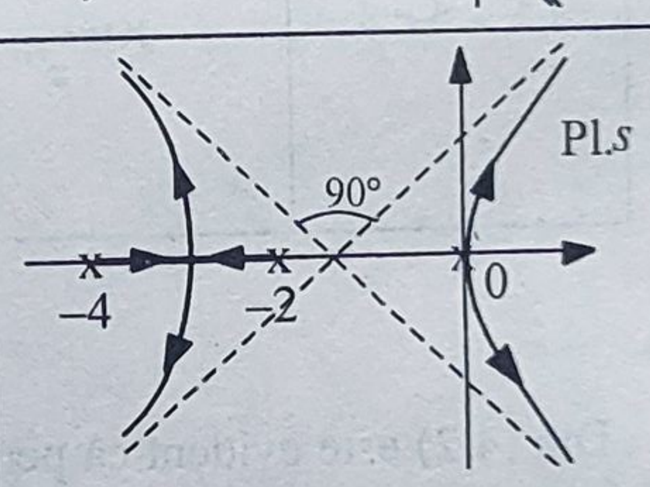
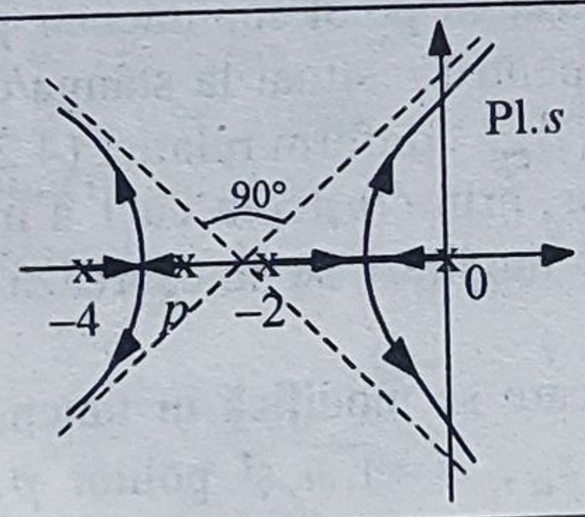
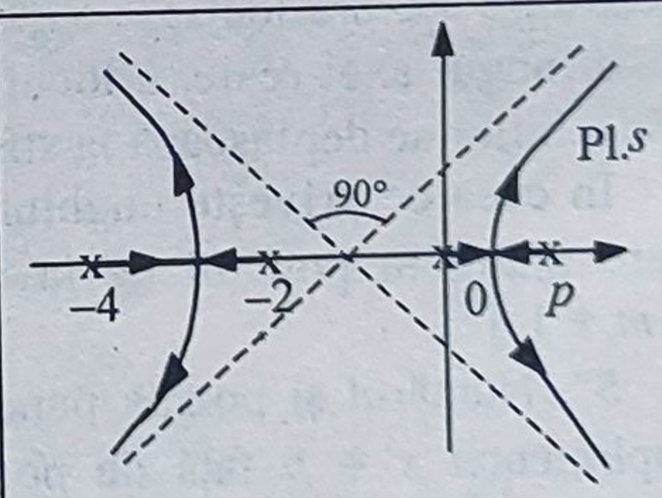
5°. Numărul şi poziţia punctelor de ramificare se modifică în funcţie de poziţia polului suplimentar $s = p$ faţă de poziţia zerourilor z_α, $\alpha = \overline{1,m}$, şi polilor p_β, $\beta = \overline{1,n}$. Ecuaţia punctelor de ramificare este:

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_\beta} - \frac{1}{x - p} = 0, x \in \mathbf{R}. \tag{4.3}$$

7° – 8°. Rămân neschimbate.

9°. Punctele de intersecție ale locului rădăcinilor cu axa imaginară (dacă astfel de puncte există) își schimbă poziția în funcție de poziția polului suplimentar $s = p$ față z_α, $\alpha = \overline{1,m}$, și p_β, $\beta = \overline{1,n}$.

10°. Parametrizarea după valorile lui $k \geq 0$ a locului rădăcinilor se modifică în funcție de poziția polului suplimentar $s = p$ față de z_α, $\alpha = 1,m$, și p_β, $\beta = 1,n$.

Poziția lui $p \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor	Poziția lui $p \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor
Fără pol suplimentar		$p = -2$	
$p < -4$		$-2 < p < 0$	
$p = -4$		$p = 0$	
$-4 < p < -2$		$p > 0$	

Exemplul 4.1

Se consideră $G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)]$. Prin introducerea unui pol suplimentar (prin intermediul funcției de transfer a regulatorului) se obține $G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)(s-p)]$. Se cere să se traseze locul rădăcinilor pentru $G_d(s)$ dat inițial și pentru $G_d(s)$ având polul suplimentar plasat în diferite puncte ale axei reale. În acest sens sunt semnificative

următoarele situaţii: $p < -4$, $p = -4$, $-4 < p < -2$, $p = -2$, $-2 < p < 0$, $p = 0$, $p > 0$. Locul rădăcinilor pentru $G_d(s)$ dat iniţial şi pentru p plasat pe axa reală conform situaţiilor de mai sus este reprezentat în fig.V.17.■

5. Sinteza regulatorului

5.1. Tema de proiectare

Prin tema de proiectare a unui sistem automat (fig.III.14) trebuie să se precizeze următoarele:

a. Instalaţia tehnologică automatizată ca sistem: se definesc mărimile de intrare (mărimi de comandă şi perturbatoare), mărimea de ieşire şi relaţiile dintre ele.

b. Mărimea de ieşire este mărimea după care se realizează reacţia negativă printr-un traductor adecvat. Mărimea de ieşire - numită şi mărimea reglată - trebuie să aibă o evoluţie prescrisă în conformitate cu o mărime prescrisă sau de referinţă (definită ca mărime de intrare a sistemului automat - fig.III.14).

c. Performanţele pe care trebuie să le realizeze sistemul automat în regim tranzitoriu şi în regim staţionar pe baza următorilor indici de calitate: suprareglarea σ, durata regimului tranzitoriu t_s, durata de creştere t_c (cf. II.7.1) şi erorile staţionare în raport cu mărimea prescrisă (de referinţă), e_{ps}, şi cu perturbaţia, e_{ws} (cf. III.5.2).

5.2. Rezolvarea temei de proiectare

Pentru rezolvarea temei de proiectare se parcurg următoarele etape:

a. Se scriu ecuaţiile care guvernează funcţionarea părţilor componente ale sistemului şi se stabileşte schema bloc structurală a întregului sistem. Aceasta este baza de pornire a rezolvării temei de proiectare.

În mod firesc elementul de execuţie şi traductorul se aleg (se adoptă) în funcţie de instalaţia automatizată (împreună cu care formează partea fixată a sistemului).

Se subînţelege că structura şi parametrii părţii fixate sunt cunoscute cu precizie acceptabilă.

b. Se adoptă un tip de regulator pe baza teoremei Aizerman - Gantmaher (teorema 1 de la III.4.2) sau pe baza experienţei existente relativ la automatizările din aceeaşi categorie cu aceea din tema de proiectare.

c. Se analizează stabilitatea BIBO a sistemului automat şi se determină domeniile parametrice de stabilitate BIBO şi de rezervă de stabilitate BIBO impusă, pentru parametrii încă necunoscuţi ai regulatorului.

d. Se realizează stabilizarea sistemului automat prin modificarea adecvată a parametrilor şi/sau structurii regulatorului în scopul realizării valorilor admisibile ale indicilor de calitate.

Spre deosebire de alte metode de sinteză a regulatorului, metoda locului rădăcinilor are avantajul că permite să se ţină seama direct şi efectiv de valorile admisibile ale indicilor de calitate. Acest avantaj derivă din faptul că prin metoda locului rădăcinilor se pot realiza configuraţii cu o pereche de poli dominanţi a căror localizare se corelează direct cu valorile (maxime) admisibile ale indicilor de calitate (a se vedea II.7.5): σ_a - suprareglarea admisibilă, t_{sa} - durata admisibilă a regimului tranzitoriu şi t_{ca} - durata admisibilă de creştere.

Pentru a confirma cele de mai sus, se presupune că se pot alege parametrii regulatorului astfel încât sistemul automat să poată fi caracterizat prin polii dominanţi:

$$p_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right), \qquad 0 < \zeta < 1.$$

Întrucât suprareglarea σ depinde numai de factorul de amortizare ζ şi această dependenţă este strict monoton descrescătoare (fig.II.47), rezultă că $\sigma \le \sigma_a$ dacă şi numai dacă $\zeta \ge \zeta_a$, ζ_a fiind factorul de amortizare (minim) admisibil. Pentru $\zeta = \cos\psi$, cu $0 < \psi < 90°$, condiţia $\sigma \le \sigma_a$ are loc dacă şi numai dacă $\psi \le \psi_a$, unde ψ_a defineşte sectorul unghiular (maxim) admisibil în care se pot localiza polii dominanţi (fig.II.53). Relaţia dintre ψ_a şi σ_a este $\cos\psi_a = 2{,}3\,|\lg\sigma_a| / \sqrt{9{,}86 + (2{,}3\lg\sigma_a)^2}$.

Se alege $\psi_0 \le \psi_a$ (fig. V.18), cu ψ_0 cât mai apropiat de ψ_a, din care rezultă $\zeta_0 = \cos\psi_0$.

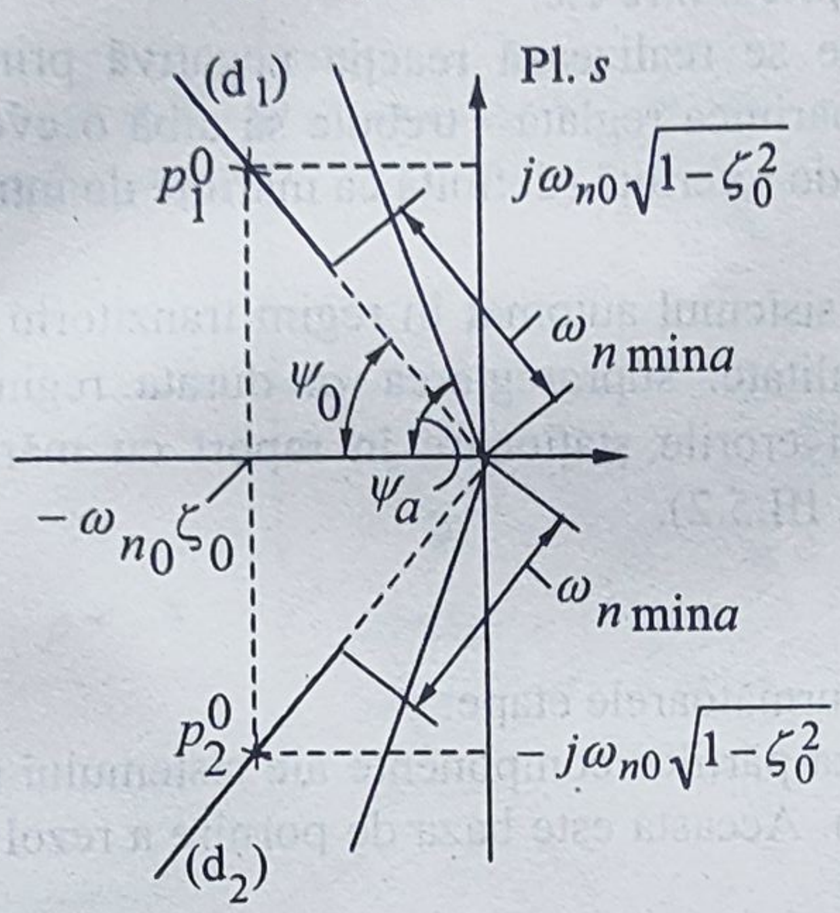


Fig.V.18. Localizarea polilor dominanţi în funcţie de indicii de calitate admisibili

Condiţia $t_s \le t_{sa}$ se ia în considerare cu ajutorul fig.II.47 sau al formulei $\tau_s = \omega_n t_s \cong 3/\zeta$. Pentru ζ_0 deja stabilit se determină τ_{s0} din fig.II.47 sau, pentru $0 < \zeta_0 < 0{,}707$, cu relaţia $\tau_{s0} \cong 3/\zeta_0$. Durata reală a regimului tranzitoriu, t_{s0}, trebuie să satisfacă condiţia: $t_{s0} = \tau_{s0}/\omega_{n0} \le t_{sa}$, în care ω_{n0} este pulsaţia naturală a polilor dominanţi care se determină din chiar această inegalitate, adică: $\omega_{n0} \ge \tau_{s0}/t_{sa}$.

Condiţia $t_c \le t_{ca}$ se ia în considerare cu ajutorul formulei $t_c \cong 1{,}8/\omega_n$, pentru $0{,}3 \le \zeta \le 0{,}8$. Pentru ζ_0 deja adoptat, durata reală de creştere, t_{c0}, trebuie să satisfacă condiţia $t_{c0} \cong 1{,}8/\omega_{n0} \le t_{ca}$, din care rezultă $\omega_{n0} \ge 1{,}8/t_{ca}$.

Din condiţiile $t_{s0} \le t_{sa}$ şi $t_{c0} \le t_{ca}$ rezultă în final condiţia de alegere a pulsaţiei ω_{n0}, respectiv: $\omega_{n0} \ge \omega_{n\,min a} = \max(\tau_{s0}/t_{sa},\ 1{,}8/t_{ca})$, în care $\omega_{n\,min a}$ este valoarea minimă admisibilă a pulsaţiei naturale a celor doi poli dominanţi. Întrucât $|p_{1,2}| = \omega_n$ rezultă că $\omega_{n\,min a}$ poate fi evidenţiat, ca distanţă, direct pe semidreptele (d_1) şi (d_2) - fig.V.18, urmând ca polii $p^0_{1,2} = \omega_{n0}\left(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1-\zeta_0^2}\right)$ să fie plasaţi tot pe semidreptele (d_1) şi (d_2) şi anume în zonele trasate cu linie continuă. Se are în vedere ca ω_{n0} să nu fie prea mare faţă de $\omega_{n\,min a}$, deoarece în caz contrar polii $p^0_{1,2}$ îşi pot pierde caracterul dominant.

Polii dominanţi fiind stabiliţi, se alege funcţia de transfer a regulatorului, $G_R(s)$, astfel încât funcţia de transfer a sistemului automat, $G_0(s)$, să se caracterizeze prin polii dominanţi $p^0_{1,2}$. Utilizând metoda locului rădăcinilor acest lucru se realizează relativ simplu prin introducerea unor zerouri şi/sau poli suplimentari care produc modificări ale locului rădăcinilor şi în final prin alegerea adecvată a parametrului $k > 0$.

Exemplul 5.1.

Se consideră $G_F(s) = 12{,}5/[(s+1)(s+2{,}5)]$ (fig.IV.4) şi $\sigma_a = 0{,}17$, $t_{sa} = 3\,\text{sec}$, $t_{ca} = 1{,}5\,\text{sec}$ şi $e_{ps} = 0$. Se cere să se determine $G_R(s)$.

Pentru a realiza $e_{ps} = 0$ se introduce în regulator o componentă integratoare. Până la stabilirea restului structurii regulatorului se consideră $G_R(s) = k_r/s$, k_r fiind factorul de proporţionalitate.

Pentru $\sigma_a = 0{,}17$, din fig. II.47 rezultă $\zeta_a \cong 0{,}5$ şi apoi $\psi_a \cong 60^o$.Se adoptă $\zeta_0 = 0{,}5$ şi $\psi_0 = 60°$. Din fig .II.47 rezultă $\tau_{s0} = 6{,}25$. Mai departe, $\omega_{nmina} = \max(\tau_{s0}/t_{sa}, 1{,}8/t_a) = \max(6{,}25/3, 1{,}8/1{,}5) \cong 2{,}1$ [sec]$^{-1}$. Se adoptă $\omega_{no} = 2{,}2$ [sec]$^{-1}$. Aşadar polii dominanţi care asigură realizarea indicilor de calitate admisibili sunt $p^0_{1,2} = 2{,}2(-0{,}5 \pm j0{,}87)$.

Funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis (rel. (III.2.4)) este: $G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = k/[s(s+1)(s+2{,}5)]$ în care $k = 12{,}5k_r$. Locul rădăcinilor este reprezentat în fig. V.19. Se observă că oricare ar fi $k \geq 0$ sistemul automat nu poate avea polii dominanţi pe semidreptele AB şi A'B' (pe care se află şi polii dominanţi impuşi, $p^0_{1,2}$).

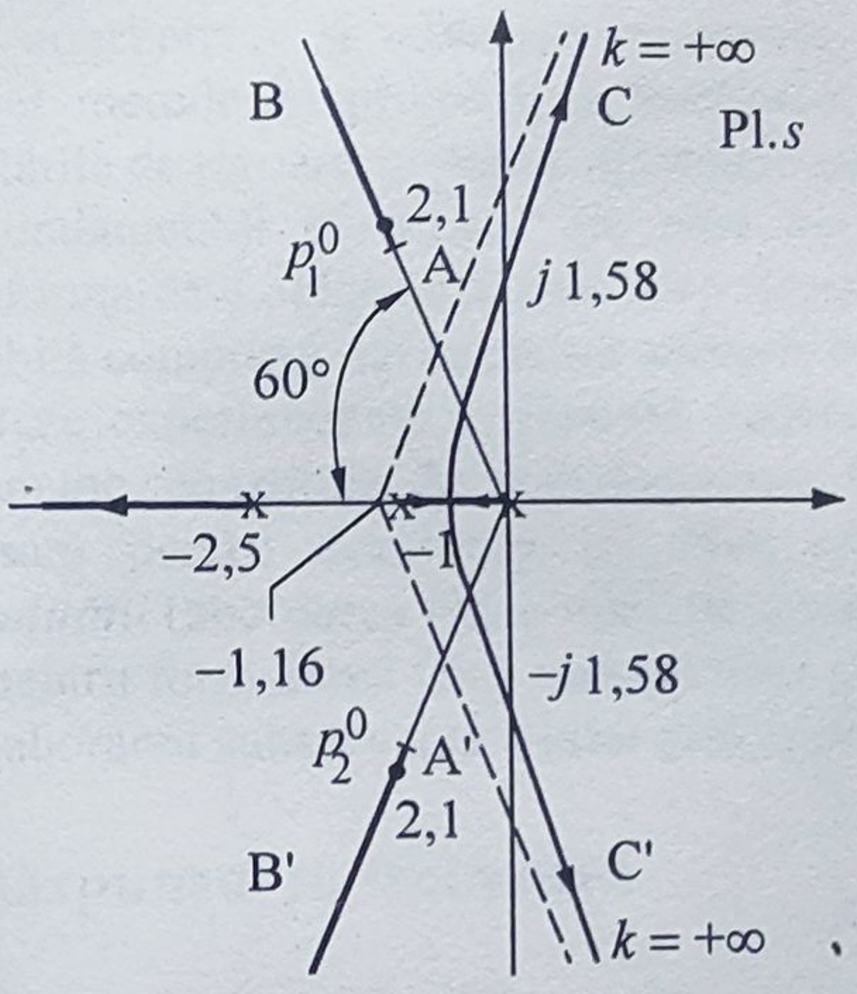


Fig. V.19.Locul rădăcinilor pentru $G_R(s)=k_r/s$ la exemplul 5.1

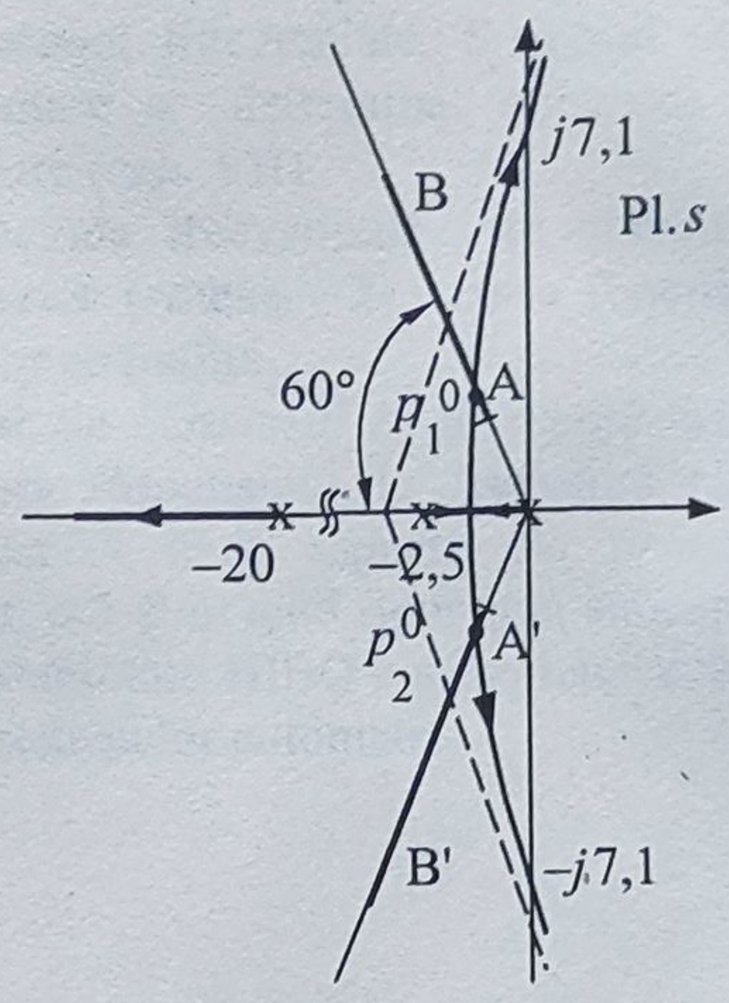


Fig. V.20. Locul rădăcinilor pentru $G_R(s) = k_r(s+1)/[s(s+20)]$ la exemplul 5.1

Se ştie că prin introducerea în $G_d(s)$ a unor zerouri şi/sau polii suplimentari locul rădăcinilor se modifică. În cazul de faţă este necesară o deplasare a locului rădăcinilor spre stânga, fără modificarea numărului de ramuri care ajung în punctul de la ∞, dar cu reparametrizarea după valorile lui k, astfel încât ramurile C şi C' să intersecteze semidreptele AB şi A'B' (fig.V.19). Pentru aceasta este suficient să se introducă un zero suplimentar în −1 (care compensează polul cel mai lent al părţii fixate situat în −1) şi un pol suplimentar îndepărtat, de exemplu în −20, care să deplaseze locul rădăcinilor spre stânga. În aceste circumstanţe $G_R(s) = k_r(s+1)/[s(s+20)]$ şi $G_d(s) = k/[s(s+2{,}5)(s+20)]$. Locul rădăcinilor este reprezentat în fig.V.20. Pentru confirmarea faptului că locul rădăcinilor intersectează semidreptele AB şi A'B' se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} G_d(s)+1=0 \\ \operatorname{Im} s = -(\operatorname{tg} 60°)\operatorname{Re} s. \end{cases}$$

Rezultă $\operatorname{Re} s = -10/9$ şi $\operatorname{Im} s = 10\sqrt{3}/9$, respectiv $|s| \cong 2{,}2$, ceea ce înseamnă că locul rădăcinilor se intersectează cu semidreptele AB şi A'B' foarte aproape de polii dominanţi impuşi

$p^0_{1,2}$. Valoarea lui k pentru care are loc această intersecție se calculează din $|G_d(-10/9+j10\sqrt{3}/9)|=1$.

Rezultă $k=|-10/9+j10\sqrt{3}/9|\cdot|-10/9+2,5+j10\sqrt{3}/9|\cdot|-10/9+20+j10\sqrt{3}/9|\cong 100$. Întrucât $k = 12,5k_r$, rezultă $k_r = 8$. În consecință funcția de transfer a regulatorului este: $G_R(s) = 8(s+1)/[s(s+20)]$.

Funcția de transfer a sistemului automat este:

$$G_0(s)=100/(s^3+22,5s^2+50s+100)=$$

$$=100/[(s+10/9-j10\sqrt{3}/9)(s+10/9+j10\sqrt{3}/9)(s+20,25)],$$

din care rezultă în mod evident că polii $p^0_{1,2}=-10/9\pm j10\sqrt{3}/9$ sunt dominanți.■

Capitolul VI

METODA FRECVENȚIALĂ

Metoda frecvenţială este prima metodă de analiză şi de sinteză a sistemelor automate care s-a dezvoltat coerent şi unitar şi care s-a aplicat consecvent în perioada clasică a automaticii (anii 1930-1960). Se poate afirma cu certitudine că marea majoritate a sistemelor automate de tip clasic existente astăzi în industrie sau în alte domenii au fost şi sunt proiectate şi realizate pe baza conceptelor şi tehnicilor elaborate în cadrul metodei frecvenţiale. Succesul aplicării acestei metode în proiectarea sistemelor automate liniare a determinat utilizarea ei, cu adaptările de rigoare, şi pentru sistemele automate neliniare (cap. VII).

Fundamentul matematic pe care s-a dezvoltat metoda frecvenţială este constituit de transformarea Laplace (Anexa A1), transformarea Fourier (Anexa A2), teoria funcţiilor de variabilă complexă, iar în cadrul acesteia de principiul argumentului.

Baza experimentală a metodei frecvenţiale o constituie *răspunsul la frecvenţă.* Suportul matematic constituit de transformarea Fourier conferă răspunsului la frecvenţă rigoarea necesară pentru dezvoltări teoretice eficiente în analiza unor aspecte ale *principiului cauzalităţii* (abordarea într-o manieră intuitivă în subcap. II.1 şi în mod riguros în subcap VI.3) sau pentru formularea unor caracterizări pertinente ale stabilităţii BIBO a sistemelor automate, cu elaborarea subsecventă a unor procedee de sinteză a sistemelor automate.

1. Răspunsul la frecvenţă

1.1. Semnificaţia funcţiei $G(j\omega)$

Se consideră sistemul dinamic neted, cu parametri concentraţi, liniar şi invariant în timp, cu o singură mărime de intrare şi o singură mărime de ieşire, ambele funcţii scalare de timp, descris de ecuaţia (1.4) de la II.1.3. S-a arătat la II.1.4. că transferul intrare-ieşire este descris de ecuaţia:

$$Y(s) = G(s)U(s), \tag{1.1}$$

în care funcţia de transfer, $G(s)$, are expresia (1.11) de la II.1.4.

Mărimea de intrare este funcţia sinusoidală:

$$u(t) = \sin \omega_0 t, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{1.2}$$

în care $\omega_0 \in \mathbf{R}$ este un parametru (în sensul că ω_0 poate lua orice valoare reală fixată). Se ştie că între pulsaţia ω [rad·s^{-1}] şi frecvenţa f [s^{-1}] există relaţia $\omega = 2\pi f$, ceea ce înseamnă că din punct de vedere dimensional ω şi f sunt de acelaşi tip. Din acest motiv, în sens generic şi calitativ, nu se face o distincţie specială între pulsaţie şi frecvenţă, exceptând situaţiile când trebuie să se ţină seama efectiv de relaţia cantitativă dintre ω şi f. În acest context se vorbeşte de <<metoda frecvenţială>>, <<răspunsul la frecvenţă>> etc., deşi variabila "frecvenţială" avută în vedere este pulsaţia ω.

Se doreşte să se determine componenta de regim permanent, $y_P(t)$, a mărimii de ieşire $y(t)$. Se ştie că: $U(s) = \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$, ceea ce, după înlocuirea în (1.1), conduce la:

$$Y(s) = G(s)\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \tag{1.3}$$

Pentru simplificarea calculelor se presupune că $s = \pm j\omega_0$ nu sunt nici zerouri şi nici poli ai funcției $G(s)$.

Componenta de regim permanent, $Y_P(s)$, se separă foarte uşor din $Y(s)$ deoarece, după cum s-a arătat şi la II.5.1., aceasta este formată din fracțiile simple corespunzătoare polilor lui $U(s)$. Aceştia sunt $s_{1,2} = \pm j\omega_0$. Aşadar:

$$Y_P(s) = \frac{A_1}{s - j\omega_0} + \frac{A_2}{s + j\omega_0}, \tag{1.4}$$

pentru care, din (1.3), conform teoremei dezvoltării (Anexa A1), rezultă:

$$A_{1,2} = \left[(s \mp j\omega_0)G(s)\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\right]s = \pm j\omega_0 = \pm\frac{1}{2j}G(\pm j\omega_0). \tag{1.5}$$

Întrucât:

$$G(\pm j\omega_0) = R(\omega_0) \pm jI(\omega_0), \tag{1.6}$$

în care $R(\omega_0)$ şi $I(\omega_0)$ sunt partea reală şi respectiv imaginară ale lui $G(j\omega_0)$, prin înlocuirea rezultatului (1.6) în (1.5) şi apoi în (1.4), după calcule elementare, din (1.4) se obține:

$$Y_P(s) = R(\omega_0)\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + I(\omega_0)\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Funcția original corespunzătoare este:

$$y_P(t) = |G(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \arg G(j\omega_0)),\ \ t \in \mathbf{R}_+, \tag{1.7}$$

în care:

$$|G(j\omega_0)| = \sqrt{R^2(\omega_0) + I^2(\omega_0)},\quad \arg G(j\omega_0) = \text{arctg}[I(\omega_0)/R(\omega_0)].$$

Rezultatul (1.7) pune în evidență faptul că în regim permanent sinusoidal mărimea de ieşire a sistemului descris de ecuația intrare - ieşire (1.1) este o funcție sinusoidală de amplitudine egală cu modulului lui $G(j\omega_0)$ şi de fază egală cu argumentul lui $G(j\omega_0)$. Formal, $G(j\omega_0)$ se obține din funcția de transfer $G(s)$ înlocuind $s = j\omega_0$.

1.2. Definiții

Definiția 1

Funcția $G(j\omega)$ care defineşte complet regimul permanent sinusoidal pentru $\omega \in \mathbf{R}$ se numeşte *răspunsul la frecvență* al sistemului descris de funcția de transfer $G(s)$.■

Răspunsul la frecvență se obține prin calcul (când se cunoaşte expresia funcției de transfer) sau pe cale experimentală (când este necesară o validare a unui rezultat obținut prin calcul sau când $G(s)$ nu este cunoscută cu precizie adecvată).

Ținând seama de faptul că:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt,$$

în care $g(t)$ este răspunsul la impulsul Dirac, şi înlocuind $s = j\omega$ se obține:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{1.8}$$

Rezultă că răspunsul la frecvență, $G(j\omega)$, este transformata Fourier a răspunsului la impulsul Dirac. Transformata Fourier din (1.8) este *unilaterală* deoarece $g(t) \equiv 0$ pentru $t < 0$.

Acest rezultat prilejuieşte şi o interpretare frecvenţială a transformatei $G(j\omega)$ (şi în general a transformării Fourier), în sensul că $G(j\omega)$ este o imagine a spectrului de frecvenţe conţinute de originalul $g(t)$.

Transformata inversă:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (1.9)$$

pune în evidenţă faptul că $g(t)$ reprezintă o superpoziţie, în formă integrală, a unor oscilaţii complexe de forma: $e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$ de amplitudine $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$.

Interpretarea frecvenţială a transformării Fourier se extinde în mod natural şi în cazul semnalelor $u(t)$ şi $y(t)$ (în fond $g(t)$ este un semnal).

Definiţia 2.

În cazul în care originalul $f(t)$ este un semnal, imaginea $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ se numeşte *densitate spectrală* şi modulul $|F(j\omega)|$ se numeşte *densitate spectrală de amplitudine.*■

În cazul transferului intrare - ieşire (1.1), pentru $s = j\omega$ se obţine:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega), \qquad (1.10)$$

care exprimă modul în care se transformă densitatea spectrală a mărimii de intrare, $U(j\omega)$, în densitatea spectrală a mărimii de ieşire, $Y(j\omega)$, prin transferul prin sistemul caracterizat de răspunsul la frecvenţă $G(j\omega)$.

Ecuaţia (1.10) evidenţiază faptul că sistemul descris de ecuaţia (1.1) se comportă în domeniul frecvenţelor ca un filtru. De exemplu, pentru $u(t) = \delta(t)$, care se caracterizează printr-o densitate spectrală uniformă şi unitară: $U(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, din (1.10) rezultă: $Y(j\omega) = G(j\omega)$. Aşadar, în general, mărimea de ieşire are o densitate spectrală neuniformă şi neunitară, diferită de aceea a mărimii de intrare, dependentă de $G(j\omega)$ (în acest caz chiar egală cu $G(j\omega)$).

Ecuaţia (1.10) poate fi utilizată pentru obţinerea, pe altă cale, a rezultatului (1.7). Într-adevăr, având în vedere că pentru (1.2) se poate scrie:

$$U(j\omega) = \mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]/j, \qquad (1.11)$$

din (1.10), după ce se înlocuieşte (1.11), se obţine: $Y(j\omega)=\pi[G(j\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)-$ $-G(-j\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)]/j$. Utilizând (1.6), se scrie: $Y(j\omega) = R(\omega_0)\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+$ $+\omega_0)]/j+I(\omega_0)\pi[\delta(\omega-\omega_0)+(\omega+\omega_0)]$ din care, trecând la domeniul timpului, rezultă (1.7).

2. Reprezentări grafice ale răspunsului la frecvenţă

Răspunsul la frecvenţă se utilizează practic şi sub forma unor reprezentări grafice. Cele mai utilizate sunt *locul de transfer* şi *diagrama Bode.*

2.1. Locul de transfer

Locul de transfer este hodograful funcţiei $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$. Întrucât $G(j\omega)$ se obţine din $G(s)$ pentru $s = j\omega$, iar $s = j\omega$ este ecuaţia axei imaginare a planului s, rezultă că hodograful $G(j\omega)$ este imaginea axei imaginare $s = j\omega$ prin transformarea conformă $z = G(s)$. Axa imaginară, $s = j\omega$, a planului s fiind o curbă închisă (prin punctul de la ∞), numită *conturul Nyquist* - fig. VI.1, rezultă că locul de transfer $G(j\omega)$ este de asemenea o curbă închisă (eventual prin punctul de la ∞ din planul z). Locul de transfer se parametrizează după valorile lui ω

Funcţia de transfer $G(s)$ este raportul a două polinoame cu coeficienţi reali. În aceste condiţii are loc:

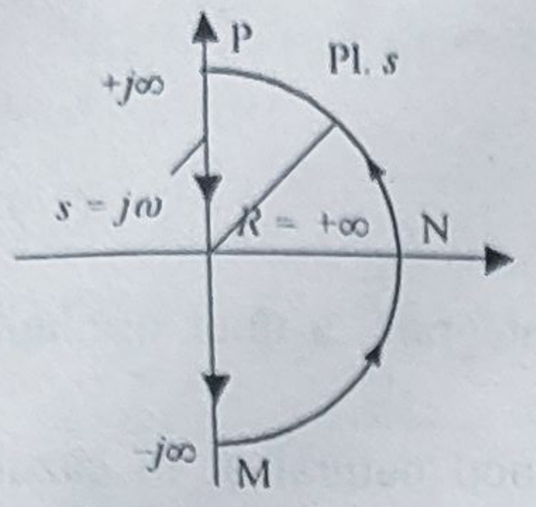


Fig. VI.1. Conturul Nyquist (axa imaginară a planului s - curbă închisă prin punctul de la ∞)

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}, \tag{2.1}$$

în care bara superioară simbolizează operaţia de conjugare a numerelor complexe. Conform relaţiei (2.1) rezultă că locul de transfer $G(j\omega)$ este simetric faţă de axa reală a planului z. În consecinţă este suficientă reprezentarea locului de transfer numai pentru $\omega \in \mathbf{R}_+$, urmând ca restul locului să se obţină prin simetrie faţă de axa reală.

a. Forma locului de transfer la frecvenţe înalte

Pentru a determina forma locului de transfer la frecvenţe înalte se consideră funcţia de transfer (1.11) de la II.1.4. Se înlocuieşte $s = j\omega$ şi se obţine:

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0}. \tag{2.2}$$

Pentru $\omega \to +\infty$ se obţine:

$$G(+j\infty) = \lim_{\omega\to+\infty} G(j\omega) = \frac{b_m}{a_n} \lim_{\omega\to+\infty} (j\omega)^{m-n} = \frac{b_m}{a_n} e^{j(m-n)\pi/2} \lim_{\omega\to+\infty} \omega^{m-n}.$$

Valoarea limitei depinde de $m - n$. În ipoteza că $b_m / a_n > 0$, se poate scrie:

$$m-n=1, G(+j\infty) = +\infty e^{j\pi/2} = +\infty j$$
$$m-n=2, G(+j\infty) = +\infty e^{j\pi} = -\infty$$
$$m-n=3, G(+j\infty) = +\infty e^{j3\pi/2} = -j\infty$$
$$m-n=4, G(+j\infty) = +\infty e^{j2\pi} = +\infty$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

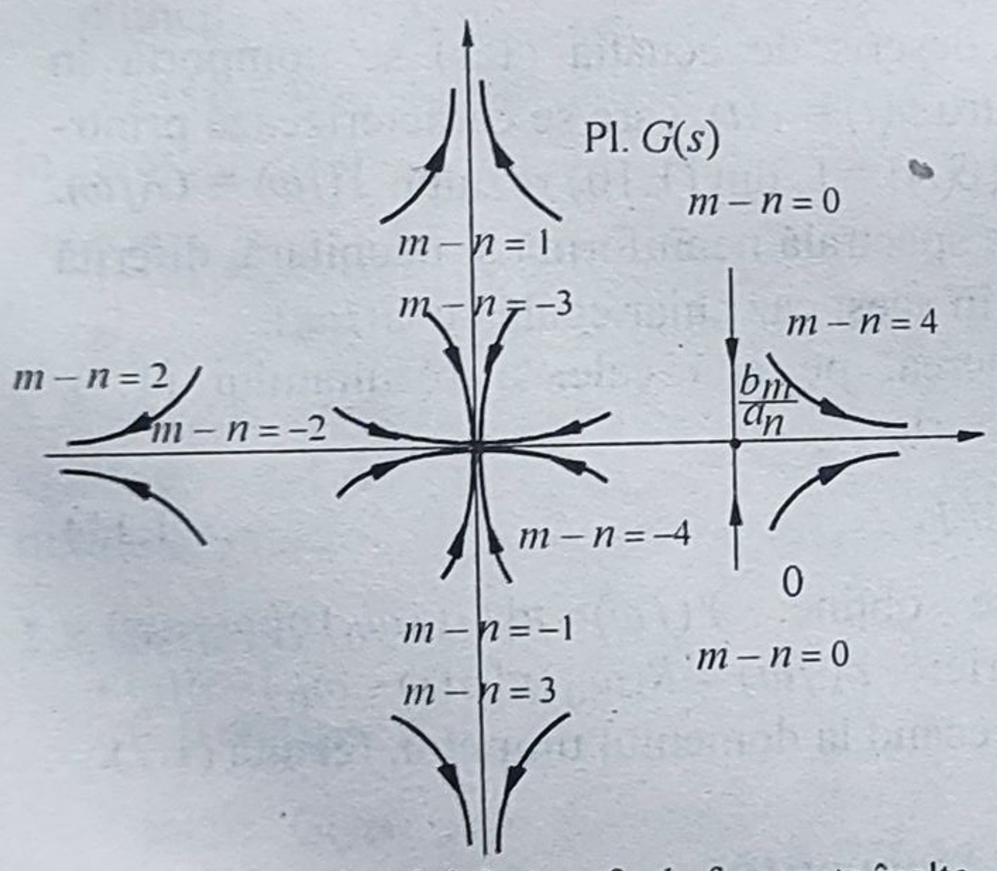


Fig. VI.2. Forma locului de transfer la frecvenţe înalte ($\omega \to +\infty$)

fiind evidentă o periodicitate a valorii limitei, perioada fiind egală cu 4. În continuare:

$$m-n=0, G(+j\infty) = b_m/a_n > 0$$
$$m-n\le -1, G(+j\infty) = 0\cdot e^{j(m-n)\pi/2} = 0\cdot j^{m-n},$$

fiind evidentă şi în acest ultim caz o periodicitate a valorii limitei, perioada fiind aceeaşi.

Pentru $-4 \le m - n \le 4$ toate situaţiile posibile ale formei locului de transfer la frecvenţe înalte sunt reprezentate în fig. VI.2.

b. Forma locului de transfer la frecvenţe joase

Forma locului de transfer pentru $\omega \downarrow 0$ depinde de numărul de zerouri şi de poli în $s = 0$ ai lui $G(s)$. În aceste circumstanţe, pe baza expresiei (2.2), se porneşte de la:

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_z(j\omega)^z}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_p(j\omega)^p}, \tag{2.3}$$

în care z şi p reprezintă numărul de zerouri şi respectiv de poli în $s = 0$, cu $0 \le z \le m$ şi $0 \le p \le n$.

Pentru $\omega \downarrow 0$, din (2.3), se obține:

$$G(+0) = \lim_{\omega \downarrow 0} G(j\omega) = \frac{b_z}{a_p} \lim_{\omega \downarrow 0} (j\omega)^{z-p} = \frac{b_z}{a_p} e^{j(z-p)\pi/2} \lim_{\omega \downarrow 0} \omega^{z-p}.$$

Valoarea limitei depinde de $z - p$. În ipoteza că $b_z / a_p > 0$, se poate scrie:

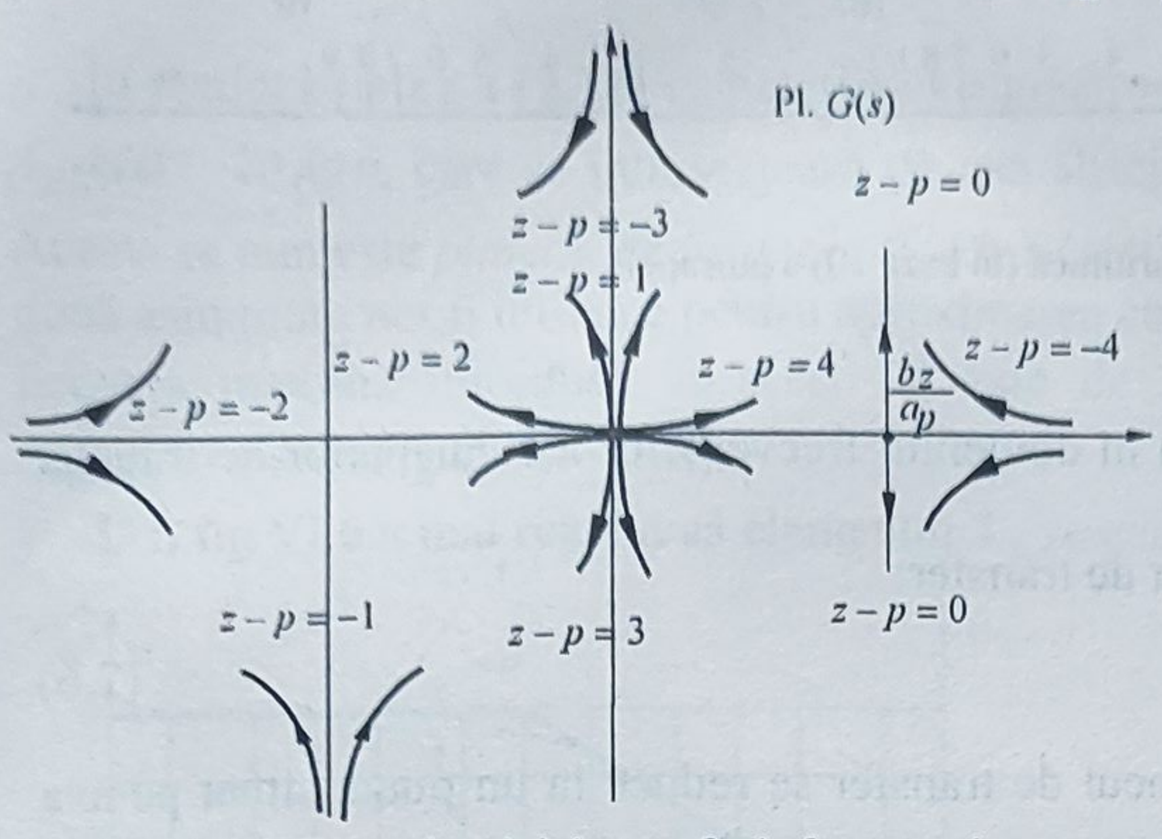


Fig. VI.3. Forma locului de transfer la frecvențe joase ($\omega \searrow 0$)

$z - p = -1, G(+0) = +\infty e^{-j\pi/2} = -j\infty$

$z - p = -2, G(+0) = +\infty e^{-j\pi} = -\infty$

$z - p = -3, G(+0) = +\infty e^{-j3\pi/2} = +j\infty$

$z - p = -4, G(+0) = +\infty e^{-j2\pi} = +\infty$

.....

fiind evidentă o periodicitate a valorii limitei, perioada fiind egală cu 4. În continuare:

$z - p = 0, G(+0) = b_z / a_p > 0$

$z - p \geq 1, G(+0) = 0 \cdot e^{-j(z-p)\pi/2} = 0 \cdot j^{z-p}$,

fiind evidentă şi în acest ultim caz o periodicitate a valorii limitei, perioada fiind aceeaşi.

O analiză specială a cazului $z-p = -1$ arată că $|\mathrm{Re}G(+0)| < +\infty$ în timp ce $j\mathrm{Im}G(+0) = -j\infty$. Pentru a susține această afirmație se consideră $G(j\omega)$ factorizată sub forma:

$$G(j\omega)) = (1/j\omega)(b_z/a_p)\left(\prod_{k=1}^{m-z}(d_k j\omega + 1) \Big/ \prod_{i=1}^{n-p}(c_i j\omega + 1)\right),$$

în care, pentru simplificarea calculelor, se consideră : $c_i, d_k \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n-p}$, $k = \overline{1, m-z}$.

Se amplifică fracția cu conjugata numitorului. După calcule elementare se obține:

$$G(j\omega) = -\frac{b_z}{a_p}\frac{1}{\omega}\frac{j - \omega\left(\sum_{k=1}^{m-z} d_k - \sum_{i=1}^{n-p} c_i\right) - j\omega^2(.....) + ...}{1 + \omega^2 \sum_{i=1}^{n-p} c_i^2 + ...}.$$

Pentru $\omega \downarrow 0$ rezultă:

$$\mathrm{Re}G(+0) = \lim_{\omega \downarrow 0} \mathrm{Re}G(j\omega) = \frac{b_z}{a_p}\left(\sum_{k=1}^{m-z} d_k - \sum_{i=1}^{n-p} c_i\right), \; j\,\mathrm{Im}G(+0) = \lim_{\omega \downarrow 0} j\,\mathrm{Im}G(j\omega) = -j\infty.$$

Pentru $-4 \leq z - p \leq 4$ toate situațiile posibile ale formei locului de transfer la frecvențe joase sunt reprezentate în fig. VI.3. Săgeţile indică sensul de creştere a lui ω.

2.2. Diagrama Bode

Diagrama Bode este o reprezentare în coordonate carteziene a funcțiilor:

$$A_{dB}(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|, \quad \omega \in \mathbf{R}_+, \tag{2.4}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}_+, \tag{2.5}$$

de regulă pentru o scară logaritmică (în baza 10) a pulsației - fig.VI.4. $A_{dB}(\omega)$ se numeşte *atenuarea* răspunsului la frecvență şi se măsoară în deciBell (dB) şi $\varphi(\omega)$ se numeşte faza răspunsului la frecvență şi se măsoară în grade (mai rar în radiani).

Diagrama Bode este utilizată mai ales în aplicaţii, deoarece, adeseori, *caracteristica atenuare-frecvenţă* (2.4) şi, uneori, *caracteristica fază - frecvenţă* (2.5) pot fi aproximate prin linii frânte. Totodată, diagrama Bode permite evidenţierea şi utilizarea mai simplă a corelaţiilor care există sau se doreşte să existe, pe anumite benzi de frecvenţe, între atenuarea şi faza răspunsului la frecvenţă.

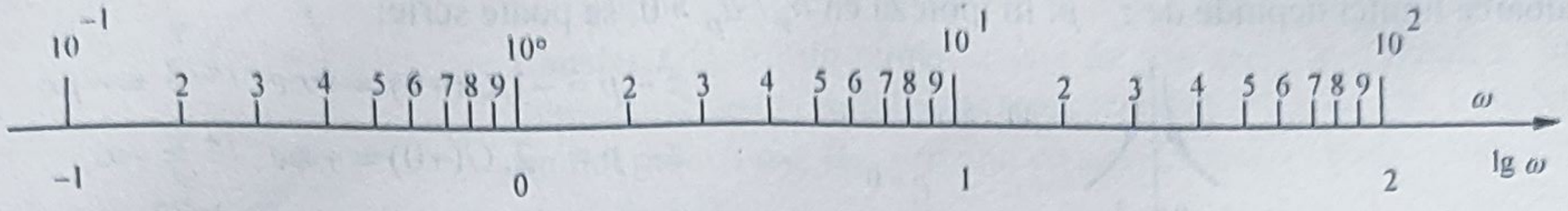


Fig. VI.4. Scara logaritmică (în baza 10) a pulsaţiei

2.3. Elemente de transfer tipice

În continuare se va analiza comportarea în domeniul frecvenţelor a elementelor de transfer tipice prezentate la II.7.2.

a) Elementul proporţional (P) are funcţia de transfer:

$$G_P(s) = K. \tag{2.6}$$

Răspunsul la frecvenţă este $G_P(j\omega) = K$. Locul de transfer se reduce la un punct situat pe axa reală şi diagrama Bode se reprezintă utilizând $A_{dB}(\omega) = 20 \lg K$ şi $\varphi(\omega) = 0$.

S-a arătat la II.7.2 că funcţia de transfer (2.6), în cazul unor sisteme dinamice reale, este o aproximare bazată pe idealizări şi/sau simplificări ale modelului matematic. Aproximări similare se pot face pe baze experimentale, şi anume atunci când $A_{dB}(\omega) \approx$ constant şi $\varphi(\omega) \approx 0$ pe domenii relativ largi de frecvenţe (începând cu frecvenţa nulă).

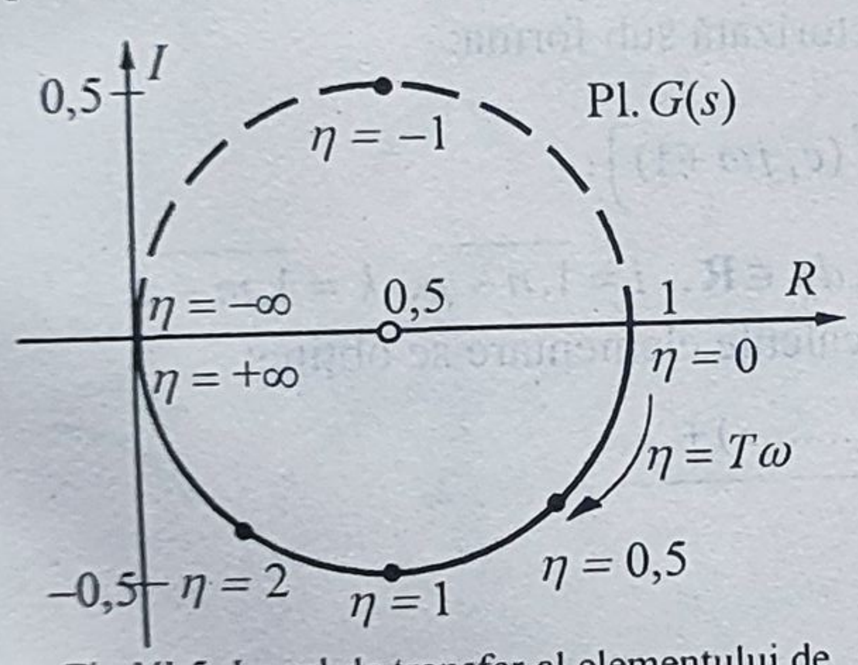


Fig. VI.5. Locul de transfer al elementului de întârziere de ordinul 1 (T_1).

b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T_1) are funcţia de transfer:

$$G_{T_1}(s) = \frac{1}{Ts+1}. \tag{2.7}$$

Răspunsul la frecvenţă are expresia:

$$G_{T_1}(j\omega) = \frac{1}{jT\omega+1} = \frac{1}{1+j\eta}, \quad \eta = T\omega, \tag{2.8}$$

în care η este pulsaţia normată (adimensională). Din (2.8) rezultă:

$$R(\omega) = \frac{1}{T^2\omega^2+1} = \frac{1}{\eta^2+1}, \; I(\omega) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1} = -\frac{\eta}{\eta^2+1}, \tag{2.9}$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\lg\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} = 20\lg\frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}}, \; \varphi(\omega) = -\text{arctg}T\omega = -\text{arctg}\eta. \tag{2.10}$$

Ecuaţia locului de transfer se obţine imediat din (2.9) prin eliminarea lui η între $R(\omega)$ şi $I(\omega)$. Rezultă $\eta = -I(\omega)/R(\omega)$, care se înlocuieşte în $R(\omega)$, după care se obţine: $R^2+I^2-R=0$. Aceasta este ecuaţia unui cerc (fig.VI.5) cu centrul în (1/2,0) şi de rază 1/2, care trece prin originea planului z (peste care se suprapune planul de coordonate R, I).

Pentru a trasa diagrama Bode se are în vedere că din (2.10) rezultă:

$$A_{dB}(\omega) = -20\lg\sqrt{\eta^2+1} \cong \begin{cases} 0, & 0 \le \eta << 1 \\ -20\lg\eta, & 1 << \eta < +\infty \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\varphi(\omega) = -arctg10^{\lg\eta} \cong \begin{cases} 0, & 0 \le \eta << 0{,}1 \\ -45°(\lg\eta+1), & 0{,}1 < \eta < 10 \\ -90°, & 10 << \eta < +\infty. \end{cases} \tag{2.12}$$

În conformitate cu (2.11) caracteristica atenuare-frecvență are două asimptote: $A_{dB}(\omega)=0$ și $A_{dB}(\omega)=-20\ \lg\eta$, care se intersectează pe axa absciselor în punctul $\eta = 1$, respectiv $\lg\eta = 0$. Acesta se numește *punctul de frângere* și $\eta = 1$ ($\omega = 1/T$) se numește *pulsația de frângere*. Cele două asimptote pot fi utilizate pentru aproximarea caracteristicii atenuare-frecvență - fig.VI.6.a. Eroarea maximă introdusă în acest fel este de 3dB pentru $\eta = 1$ (aceasta rezultă din $A_{dB}(1/T) = -20\ \lg\sqrt{2} \cong -3dB$).

Din fig.VI.6.a mai rezultă că elementul T_1 se comportă ca un filtru <<trece-jos>>, cu pantă de –20dB/decadă pentru pulsații mai mari ca $\eta = 1$ ($\omega = 1/T$). În mod convențional $\eta = 1$ ($\omega = 1/T$) se numește *pulsația de tăiere* (în acest caz coincide cu pulsația de frângere), iar intervalul de pulsații [0,1] (respectiv [0,1/T]) reprezintă banda de trecere a filtrului <<trece-jos>>.

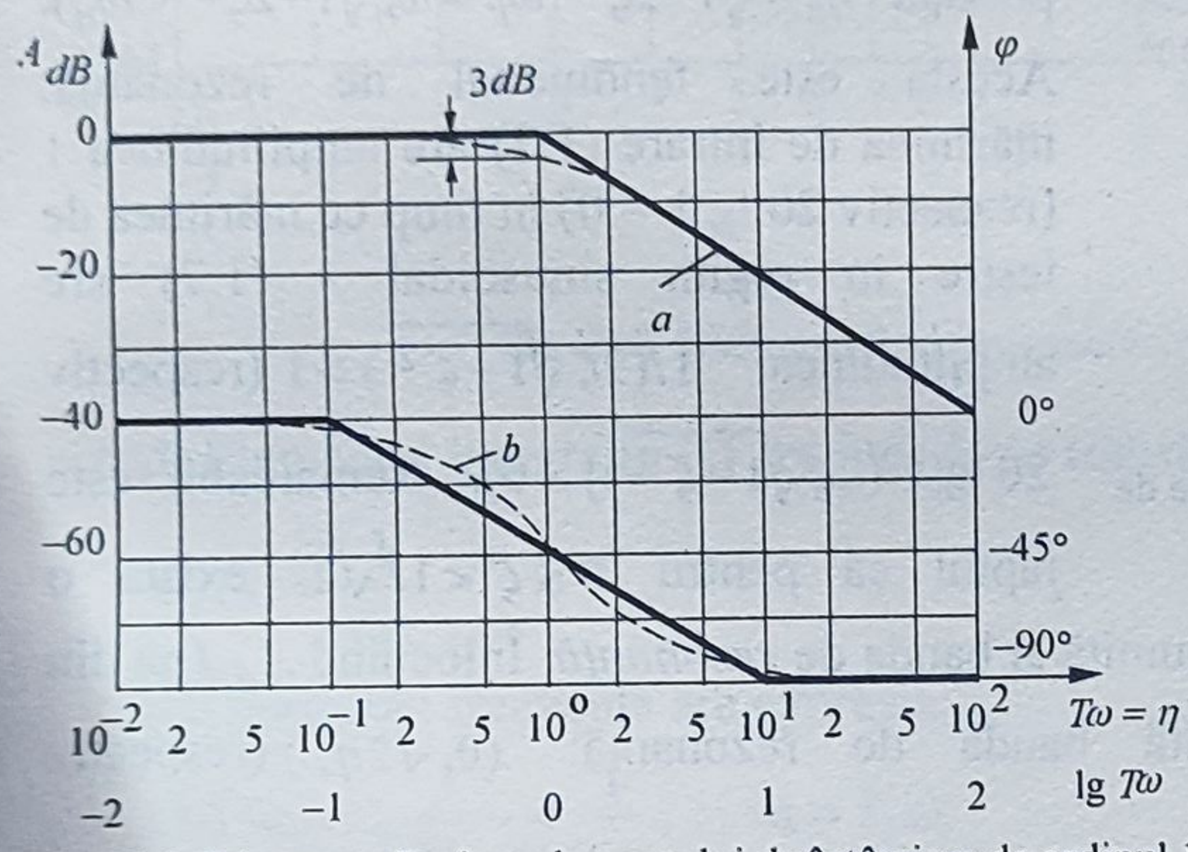


Fig.VI.6. Diagrama Bode a elementului de întârziere de ordinul 1 (T_1); a - caracteristica atenuare-frecvență; b - caracteristica fază-frecvență.

În mod similar, ținând seama de (2.12), caracteristica fază - frecvență poate fi aproximată prin trei segmente de dreaptă, așa cum se arată în fig.VI.6.b. Semnificativ este faptul că $\varphi(1/T) = -45°$.

Caracteristicile $A_{dB}(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ conform cu (2.10) sunt trasate în fig.VI.6 cu linie întreruptă.

c) Elementul de întârziere de ordinul 2 (T_2) are funcția de transfer:

$$G_{T_2}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{2.13}$$

Răspunsul la frecvență are expresia:

$$G_{T_2}(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} = \frac{1}{1-\eta^2 + j2\zeta\eta}, \qquad \eta = \frac{\omega}{\omega_n}, \tag{2.14}$$

în care η este pulsația normată. Din (2.14) rezultă:

$$\begin{cases} R(\omega) = \dfrac{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} = \dfrac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} \\ I(\omega) = \dfrac{-2\zeta\omega_n^3\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} = \dfrac{-2\zeta\eta}{(1-\eta^2) + 4\zeta^2\eta^2} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega) = 20\lg\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} = 20\lg\dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \\ \varphi(\omega) = -\text{arctg}\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2} = -\text{arctg}\dfrac{2\zeta\eta}{1-\eta^2}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Spre deosebire de elementul T_1, ecuaţiile (2.15) nu mai oferă posibilitatea obţinerii pe cale analitică a ecuaţiei locului de transfer (ca funcţie implicită de R şi I). Ecuaţiile (2.15) pot fi utilizate pentru trasarea prin puncte a locului de transfer - fig.VI.7, pentru diferite valori η.

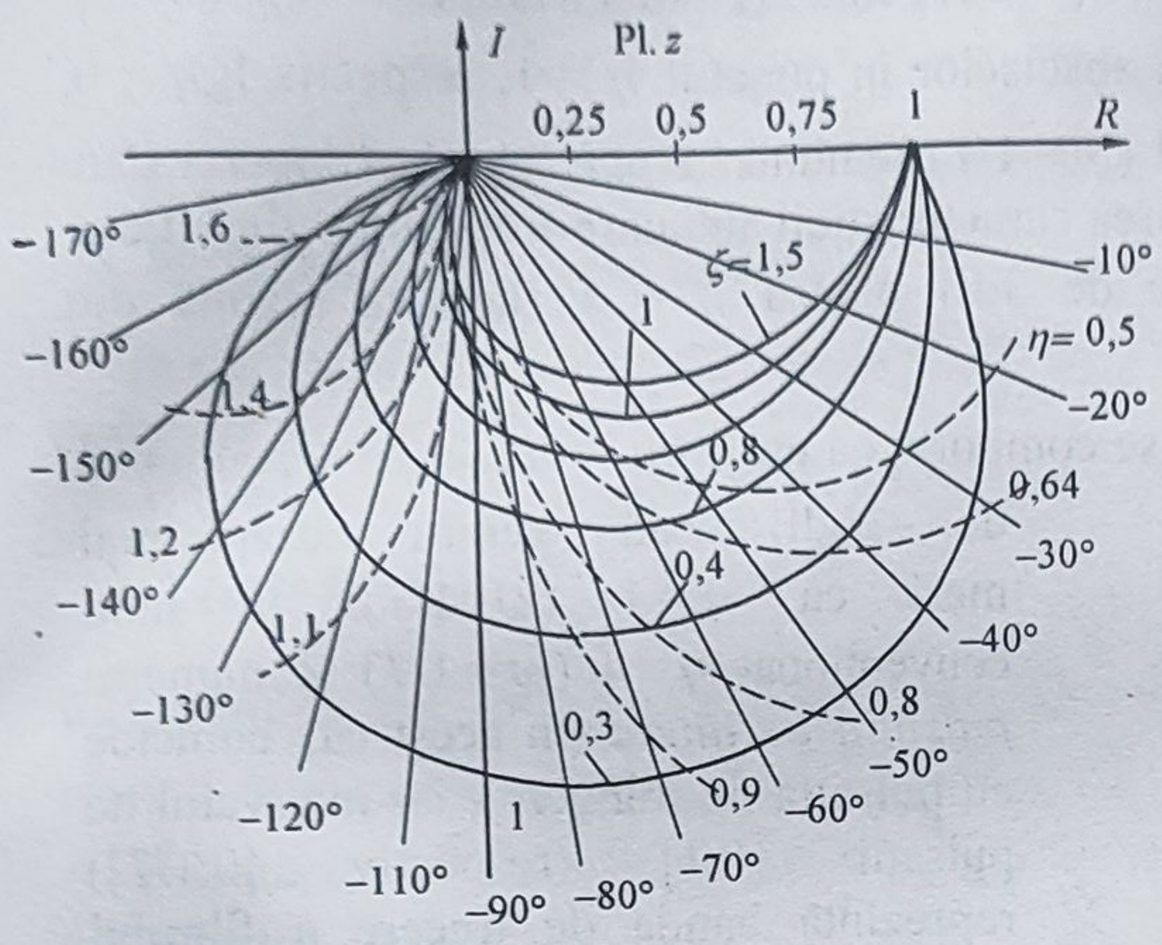


Fig.VI.7. Locul de transfer al elementului de intârziere de ordinul 2 (T_2)

Diagrama Bode, în conformitate cu (2.16), este reprezentată în fig.VI.8. Se constată că $A_{dB}(\omega)$, pentru $0<\zeta<1/\sqrt{2}$, are un maxim $A_{dB\max} = 20\lg[1/2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}]$ la pulsaţia $\eta_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$ ($\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} < \omega_n$). Acesta este fenomenul de rezonanţă: mărimea de intrare (1.2) are amplitudinea 1 (respectiv 20 lg 1 = 0) în timp ce mărimea de ieşire în regim sinusoidal - (1.7) are amplitudinea $1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})>1$ (respectiv $20\lg[1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})]>0$). Remarcabil este faptul că pentru $0\le\zeta<1/\sqrt{2}$ există o bandă de pulsaţii pentru care $A_{dB}(\omega)>0$, numită şi banda de *rezonanţă*. Înlocuind $A_{dB}(\omega)$ din (2.16) în inegalitatea precedentă rezultă banda de rezonanţă: $(0, \sqrt{2}\eta_r)$ (respectiv $(0, \omega_n\sqrt{2(1-2\zeta^2)})$).

Şi în cazul elementului T_2 se pot pune în evidenţă două asimptote ale caracteristicii atenuare - frecvenţă. Din prima relaţie din (2.16) rezultă:

$$A_{dB}(\omega) \cong \begin{cases} 0, & 0\le\eta<<1 \\ -40\lg\eta, & 1<<\eta<+\infty. \end{cases}$$

Aceste asimptote se intersectează pe axa absciselor în punctul $\eta = 1$, respectiv $\lg\eta = 0$. Acesta este punctul de frângere şi $\eta = 1\,(\omega=\omega_n)$ este pulsaţia de frângere.

Din fig.VI.8 rezultă că utilizarea asimptotelor pentru aproximarea caracteristicii atenuare-frecvenţă nu este adecvată decât în cazul $\zeta\in[0{,}4\ ,\ 0{,}6]$, datorită erorilor inacceptabile care se introduc pe această cale.

Caracteristica atenuare-frecvenţă din fig.VI.8 arată că elementul T_2 se comportă ca un filtru «trece-jos», cu o pantă de –40dB/decadă pentru pulsaţii mai mari ca $\eta = 1\,(\omega=\omega_n)$. În mod convenţional $\eta = 1\,(\omega=\omega_n)$ este pulsaţia de tăiere (coincide cu pulsaţie de frângere), iar banda de trecere a filtrului <<trece-jos>> este $\eta\in[0,1]$ (respectiv $\omega\in[0,\omega_n]$).

Semnificativ este faptul că pentru $\eta = 1$ ($\omega = \omega_n$, care este pulsaţia naturală) se obţine: $A_{dB}(\omega_n) = -20\lg 2\zeta$ şi $\varphi(\omega_n) = -90°$.

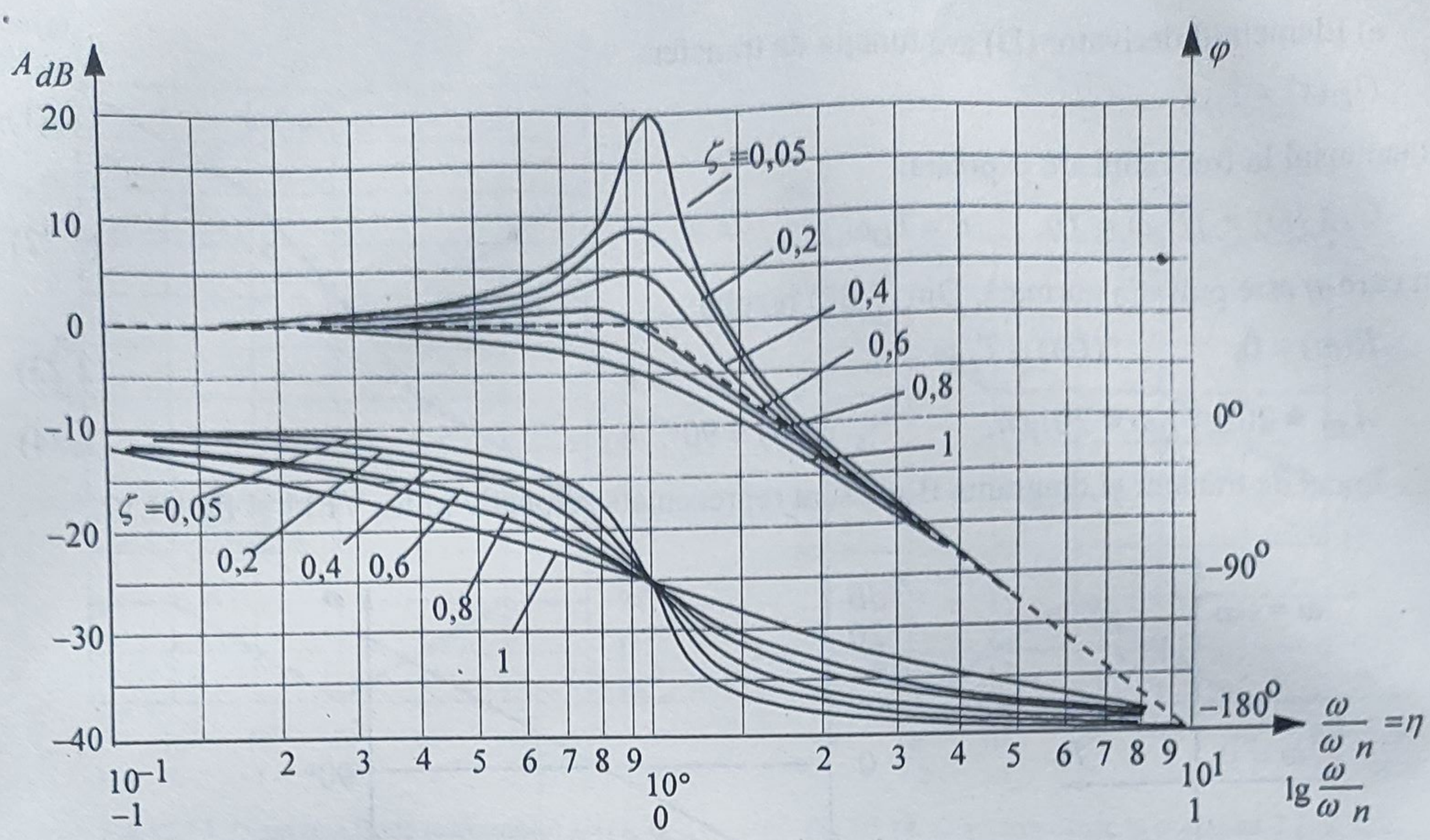


Fig. VI.8. Diagrama Bode a elementului de întârziere de ordinul 2 (T_2)

d) Elementul integrator (I) are funcţia de transfer:

$$G_I(s) = \frac{1}{T_I s}. \tag{2.17}$$

Răspunsul la frecvenţă are expresia:

$$G_I(j\omega) = \frac{1}{jT_I\omega} = \frac{1}{j\eta}, \qquad \eta = T_I\omega, \tag{2.18}$$

în care η este pulsaţia normată. Din (2.18) rezultă:

$$R(\omega) = 0, \qquad I(\omega) = -1/T_I\omega = -1/\eta, \tag{2.19}$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\lg(1/\eta), \qquad \varphi(\omega) = -90^0. \tag{2.20}$$

Locul de transfer şi diagrama Bode sunt reprezentate respectiv în fig. VI.9 şi fig. VI.10.

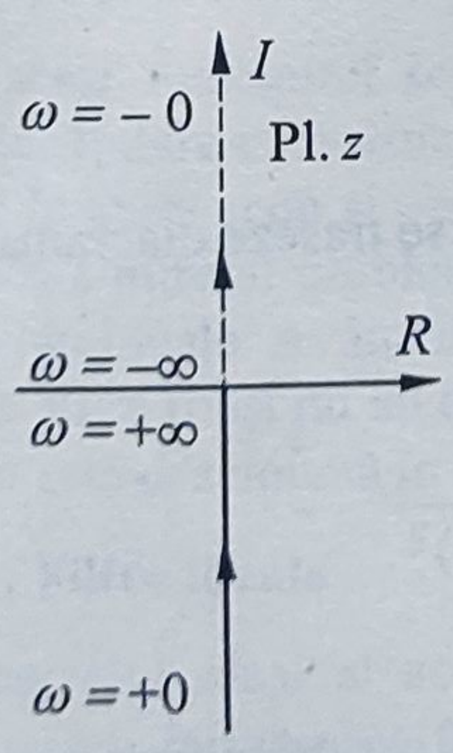


Fig. VI.9. Locul de transfer al elementului integrator (I)

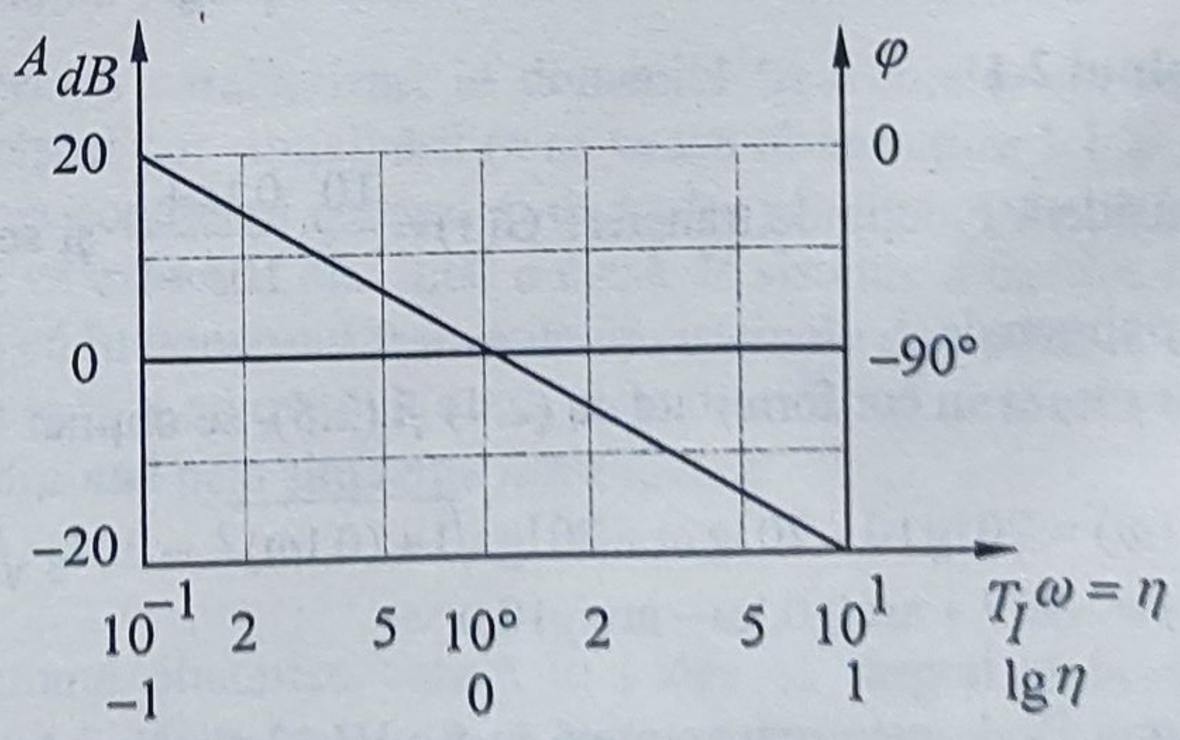


Fig. VI.10. Diagrama Bode a elementului integrator (I)

e) Elementul derivator (D) are funcţia de transfer:

$$G_D(s) = T_D s. \tag{2.21}$$

Răspunsul la frecvenţă are expresia:

$$G_D(j\omega) = jT_D\omega = j\eta, \qquad \eta = T_D\omega, \tag{2.22}$$

în care η este pulsaţia normată. Din (2.22) rezultă:

$$R(\omega) = 0, \qquad I(\omega) = T_D\omega = \eta, \tag{2.23}$$

$$A_{dB} = 20\lg T_D\omega = 20\lg\eta, \qquad \varphi(\omega) = 90°. \tag{2.24}$$

Locul de transfer şi diagrama Bode sunt reprezentate respectiv în fig.VI.11 şi fig.VI.12.

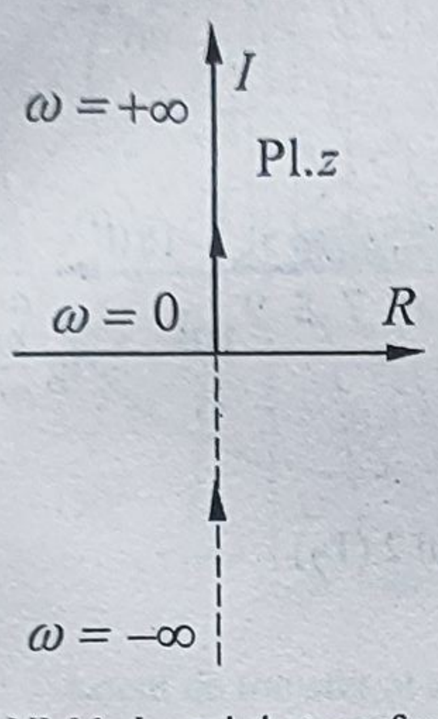


Fig.VI.11. Locul de transfer al elementului derivator (D)

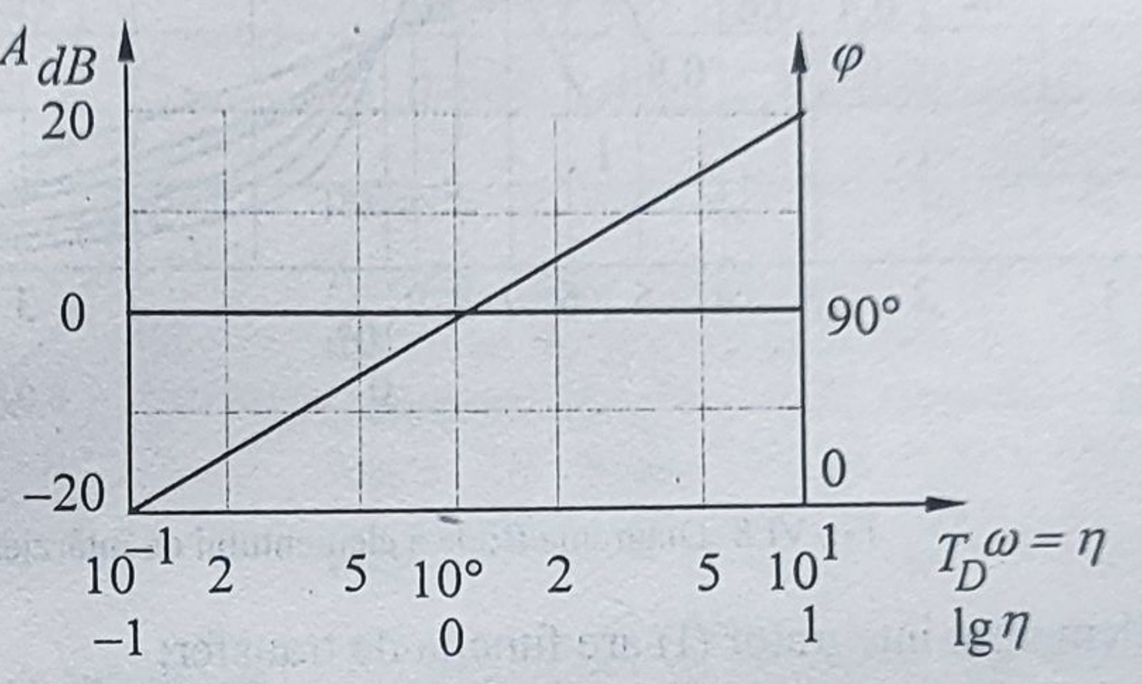


Fig.VI.12. Diagrama Bode a elementului derivator (D)

2.4. Trasarea diagramei Bode prin linii poligonale aproximante

Principalul avantaj al definiţiei (2.4) a caracteristicii atenuare - frecvenţă constă în faptul că, dacă $|G(j\omega)|$ este în formă factorizată, atunci $\lg|G(j\omega)|$ se exprimă sub forma unei sume. De regulă termenii acestei sume admit aproximări grafice sub formă de linii frânte (aşa cum s-a arătat la elementul T_1-fig.VI.6.a.). Prin sumarea grafică a respectivilor termeni se obţine relativ uşor caracteristica atenuare - frecvenţă sub forma unei linii poligonale aproximante. În mod similar se poate obţine şi caracteristica fază - frecvenţă. În acest caz se are în vedere, ca posibilitate, aproximarea utilizată la elementul T_1-fig.VI.6.b.

Exemlpul 2.1

Se consideră funcţia de transfer: $G(s) = \dfrac{10}{s} \cdot \dfrac{0{,}1s+1}{10s+1}$ şi se cere să se traseze diagrama Bode prin linii poligonale.

Pentru $s = j\omega$, în conformitate cu (2.4) şi (2.5), se obţine:

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg\omega + 20\lg\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2} - 20\lg\sqrt{1+(10\omega)^2} \\ \varphi(\omega) = -90^0 + \operatorname{arctg} 0{,}1\omega - \operatorname{arctg} 10\omega. \end{cases}$$

Diagrama Bode este reprezentată în fig.VI.13.Cu linii întrerupte s-au trasat caracteristicile parţiale, corespunzătoare respectiv termenilor din expresiile funcţiilor $A_{dB}(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$.■

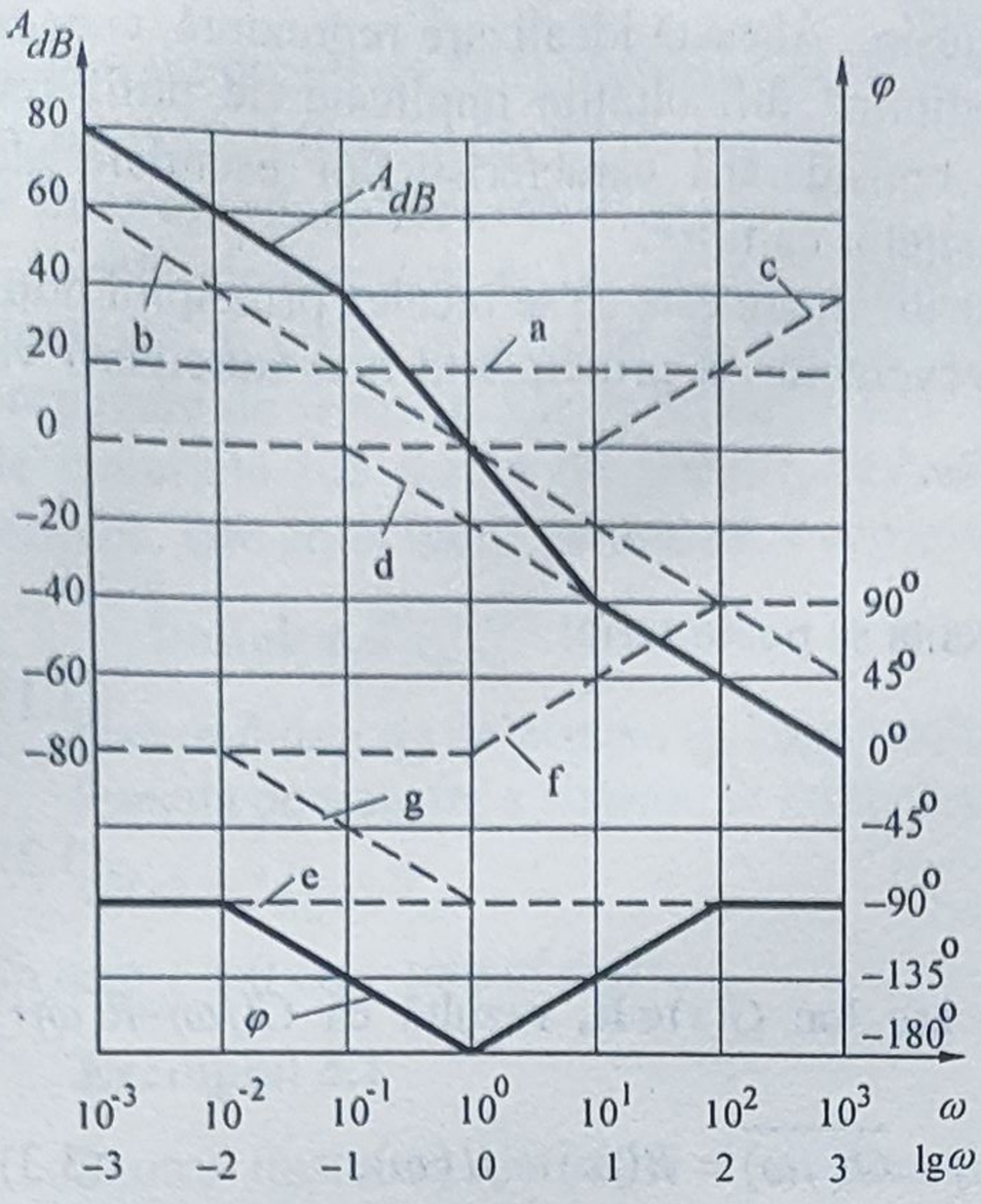


Fig. VI.13. Diagrama Bode la exemplul 2.1; a, b, c, d corespund respectiv termenilor din $A_{dB}(\omega)$; e, f, g corespund respectiv termenilor din $\varphi(\omega.)$

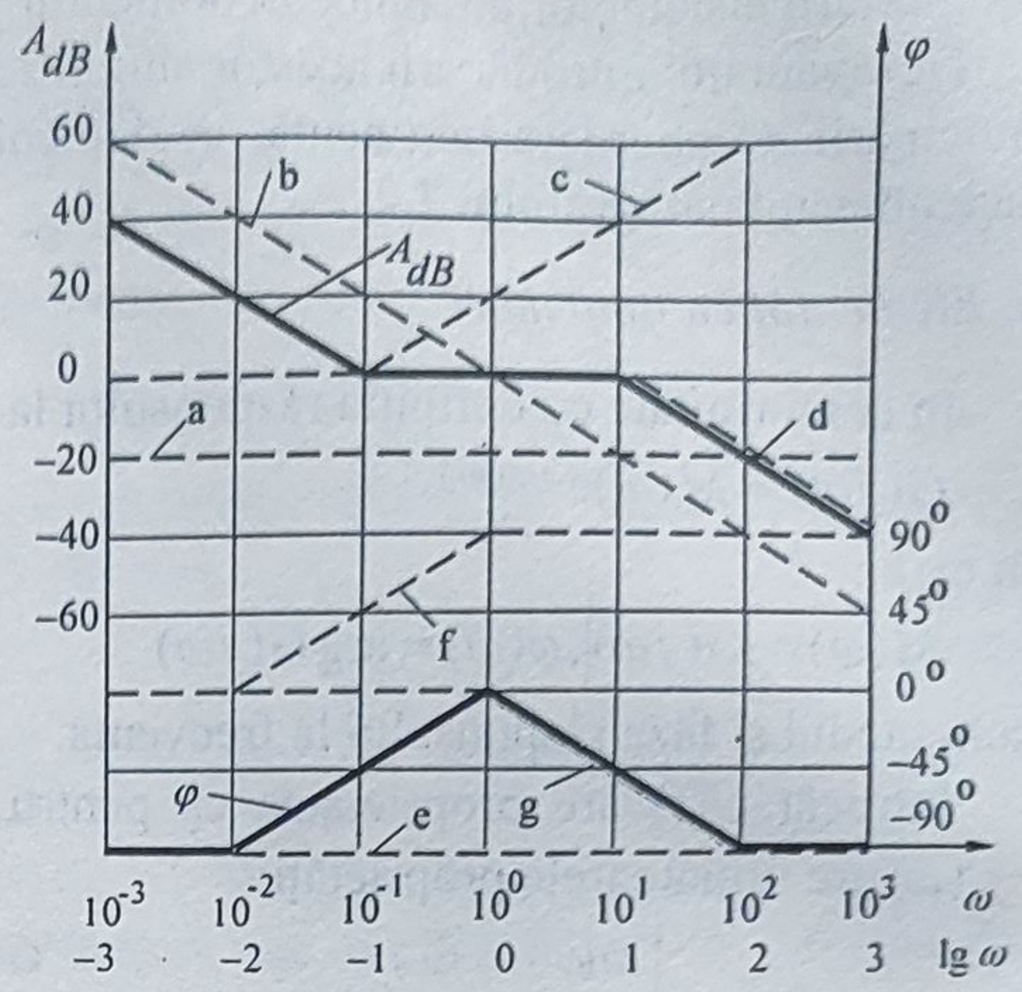


Fig. VI.14. Diagrama Bode la exemplul 2.2; a, b, c, d corespund respectiv termenilor din $A_{dB}(\omega)$; e, f, g corespund respectiv termenilor din $\varphi(\omega)$

Exemplul 2.2

Se consideră funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{0,1}{s} \cdot \dfrac{10s+1}{0,1s+1}$ şi se cere să se traseze diagrama Bode prin linii poligonale.

Pentru $s = j\omega$, în conformitate cu (2.4) şi (2.5), se obține:

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega) = 20\lg 0,1 - 20\lg\omega + 20\lg\sqrt{1+(10\omega)^2} - 20\lg\sqrt{1+(0,1\omega)^2} \\ \varphi(\omega) = -90^0 + \operatorname{arctg}10\omega - \operatorname{arctg}0,1\omega. \end{cases}$$

Diagrama Bode este reprezentată în fig.VI.14. Cu linii întrerupte s-au trasat caracteristicile parțiale, corespunzătoare respectiv termenilor din expresiile funcțiilor $A_{dB}(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$.■

3. Principiul non-anticipării

În acest subcapitol se vor prezenta caracterizări în domeniul frecvențelor ale sistemelor dinamice liniare care satisfac principiul non-anticipării (a se vedea observațiile 1.1 şi 1.3 de la II.1.4). În acest scop şi pentru a crea contrastul necesar şi un cadru propice pentru o înțelegere profundă a întregii problematici se va examina mai întâi o clasă de sisteme dinamice liniare cu proprietăți ideale. Având în vedere că în domeniul frecvențelor sistemele dinamice se comportă ca nişte filtre (deşi nu au de regulă şi în mod explicit o astfel de destinație), respectiva clasă de sisteme este desemnată în mod tradițional prin sintagma *filtre ideale*.

3.1. Filtre ideale

Caracterul ideal al acestor sisteme dinamice constă în aceea că răspunsul la frecvență, $G(j\omega)$, are o formă care face abstracție de principiul non-anticipării: de exemplu, pe anumite intervale de frecvență $G(j\omega) = 0$, ceea ce înseamnă că frecvențele respective, deşi sunt prezente

în mărimea de intrare, sunt absente în mărimea de ieşire. Această idealizare reprezintă, cum se întâmplă de regulă, o simplificare prin care se elimină dificultăţile implicate de utilizarea formei exacte a lui $G(j\omega)$ şi prezintă avantajul considerării caracteristicilor esenţiale ale comportării sistemelor dinamice în domeniul frecvenţelor ca filtre.

Dezavantajul introducerii acestor simplificări idealizatoare este că se încalcă principiul non-anticipării. O abordare pertinentă, în domeniul frecvenţelor, a principiului non-anticipării va face obiectul paragrafului 3.2.

a. Elementul cu timp mort

În conformitate cu definiţia răspunsului la frecvenţă se poate scrie:

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \tag{3.1}$$

în care :

$$M(\omega) = |G(j\omega)|, \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) \tag{3.2}$$

sunt modul şi faza răspunsului la frecvenţă.

Întrucât $G(s)$ are proprietatea că pentru $s \in \mathbf{R}$ are loc $G(s) \in \mathbf{R}$, rezultă că $G(j\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$ are următoarele proprietăţi:

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)} = R(\omega) - jI(\omega), \tag{3.3}$$

$$R(-\omega) = R(\omega),\ I(-\omega) = -I(\omega), \tag{3.4}$$

$$M(-\omega) = M(\omega),\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega). \tag{3.5}$$

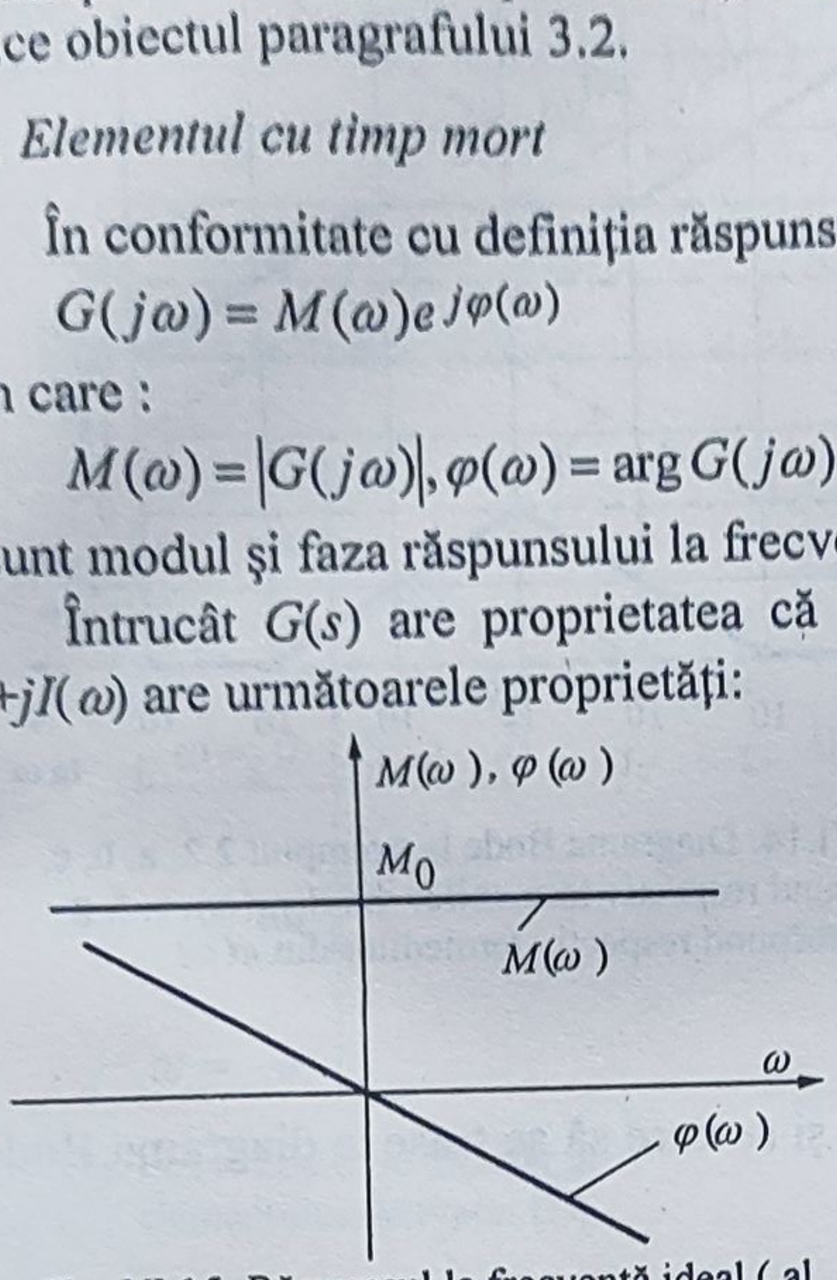


Fig. VI.15. Răspunsul la frecvenţă ideal (al elementului cu timp mort; ecuaţiile (3.6), (3.7) şi definiţia 1)

Definiţia 1

Se spune că un sistem dinamic caracterizat prin răspunsul la frecvenţă (3.1) are o *comportare ideală* în domeniul frecvenţelor dacă:

$$M(\omega) = M_0 = \text{constant} > 0 \tag{3.6}$$

$$\varphi(\omega) = -T\omega,\ T = \text{constant} \geq 0, \tag{3.7}$$

adică modulul este independent de frecvenţă şi faza este o funcţie liniar descrescătoare de frecvenţă, fig.VI.15.

Orice abateri faţă de (3.6) şi/sau (3.7) reprezintă *distorsiuni* (de amplificare şi/sau de fază).■

Din (3.1) şi (3.6), (3.7) rezultă:

$$G(j\omega) = M_0 e^{-jT\omega}, \tag{3.8}$$

ceea ce înseamnă că transferul intrare-ieşire în domeniul frecvenţelor are forma:

$$Y(j\omega) = M_0 e^{-jT\omega} U(j\omega). \tag{3.9}$$

Trecând la domeniul timpului (prin aplicarea teoremei translaţiei originalului - Anexa A2) se obţine:

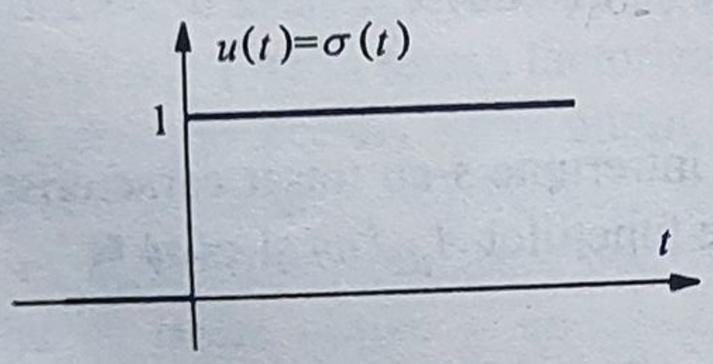
$$y(t) = M_0 u(t - T). \tag{3.10}$$

Pentru $u(t) = \delta(t)$, răspunsul la impuls are expresia:

$$g(t) = M_0 \delta(t - T). \tag{3.11}$$

Pentru $u(t) = \sigma(t)$, răspunsul indicial are expresia:

$$h(t) = M_0 \sigma(t - T) \tag{3.12}$$



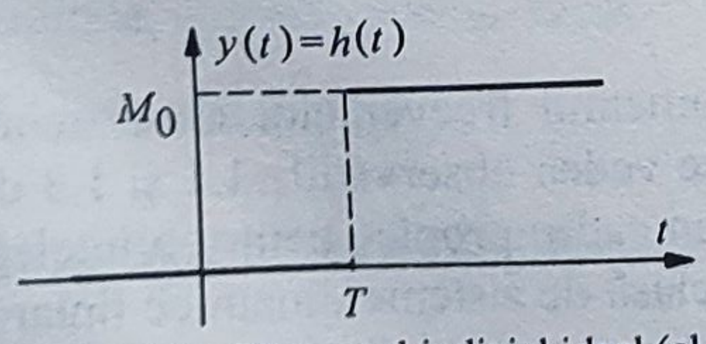


Fig. VI.16.Răspunsul indicial ideal (al elementului cu timp mort; ecuaţia (3.10) şi definiţia 2)

şi este reprezentat în fig.VI.16. Semnificaţia relaţiei (3.10) este aceea că mărimea de ieşire este translata (în timp), amplificată, a mărimii de intrare. Acest tip de comportare ideală reprezintă

de fapt un deziderat (mai ales în tehnica transmisiunii informaţiilor) în sensul că ar fi de dorit ca, exceptând întârzierea $T \geq 0$, necesară propagării lui $u(t)$ prin sistem, mărimea de ieşire, $y(t)$, să fie proporţională cu mărimea de intrare, $u(t)$.

Astfel de elemente se identifică într-o formă apropiată de cea ideală şi în combinaţii cu alte elemente în cazul proceselor de transport de substanţă, de transfer spaţial de energie şi de propagare de semnale. Ele se întâlnesc în automatică mai ales în cazul instalaţiilor de transport de materiale sub formă de granule, pulberi sau de fluide, şi cu transfer spaţial de energie termică. Din acest motiv se enunţă şi următoarea definiţie.

Definiţia 2

Sistemul descris de ecuaţia (3.10) se numeşte *sistem (element) cu timp mort.*■

Funcţia de transfer a sistemului cu timp mort (3.10) este:

$$G(s) = M_0 e^{-Ts}, \tag{3.13}$$

în care $T \geq 0$ este *timpul mort.*

Exemplul 3.1

Pentru ilustrarea definiţiei 2 se consideră un transportor cu bandă pentru granule (de exemplu cărbune pentru alimentarea unui cazan de abur) - fig. VI.17.

Având în vedere numai fenomenele de transport este uşor de constatat ca este vorba de un sistem cu timp mort cu $T = L/v$ şi $M_0 = 1$.■

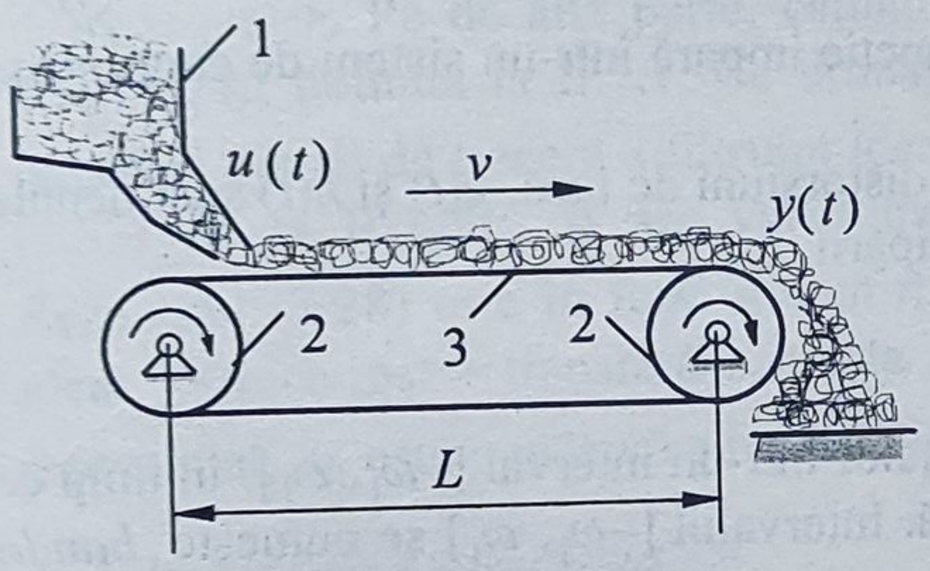


Fig.VI.17.Schema tehnologică a unui transportor cu bandă; 1 - buncăr, 2 - tamburi (unul din ei este acţionat de un motor), 3 - banda transportatoare; u - debitul de intrare, y - debitul de ieşire; L - lungimea benzii, v - viteza de deplasare.

b. Filtre ideale fără distorsiuni de fază

Definiţia 3

În situaţia în care:

$$\begin{cases} M(\omega) \neq \text{constant} \\ \varphi(\omega) = -T\omega \end{cases} \tag{3.14}$$

şi

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{-jT\omega} \tag{3.15}$$

sistemul dinamic se numeşte *filtru ideal fără distorsiuni de fază.*■

Dacă $M(\omega)$ este funcţie absolut integrabilă, atunci există o funcţie original $m(t)=\mathrm{F}^{-1}\{M(\omega)\}$.

Întrucât $M(\omega)$ este reală şi pară, rezultă că şi $m(t)$ este pară, adică:

$$m(-t) = m(t). \tag{3.16}$$

Ca urmare:

$$m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} M(\omega)\cos\omega t d\omega,\ t \in \mathbf{R}. \tag{3.17}$$

Din (3.15), conform teoremei translaţiei originalului (Anexa A2), se obţine:

$$g(t) = m(t-T). \tag{3.18}$$

Pentru $t - T = \tau$, din (3.16) şi (3.18) rezultă:

$$g(T+\tau) = g(T-\tau), \tag{3.19}$$

ceea ce înseamnă că graficul răspunsului la impuls, $g(t)$, este simetric faţă de dreapta $t = T$ (paralelă cu axa ordonatelor).

În continuare, din (3.17) - (3.19) rezultă:

$$g(t) = m(t-T) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} M(\omega)\cos\omega(t-T)d\omega,\ t \in \mathbf{R}, \tag{3.20}$$

din care se mai obține:

$$|g(t)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} M(\omega)d\omega = g(T),\ t \in \mathbf{R}, \tag{3.21}$$

adică $g(t)$ își atinge maximul în $t = T$.

Răspunsul indicial se poate determina cu ajutorul produsului de convoluție:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau,\ t \in \mathbf{R}. \tag{3.22}$$

Întrucât $\mathcal{F}\{\sigma(t)\} = \pi\delta(\omega) + 1/j\omega$, din (3.20) se obține:

$$H(j\omega) = G(j\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \pi G(0)\delta(\omega) + G(j\omega)\frac{1}{j\omega} = \pi M(0)\delta(\omega) + M(\omega)\frac{1}{j\omega}e^{-jT\omega}.$$

Revenind la domeniul timpului se poate scrie:

$$h(t) = \frac{1}{2}M(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} M(\omega)\frac{\sin\omega(t-T)}{\omega}d\omega, t \in \mathbf{R}. \tag{3.23}$$

Din (3.23), pe baza substituției $t - T = \tau$, se obține:

$$h(T-\tau) - M(0)/2 = M(0)/2 - h(T-\tau), \tag{3.24}$$

ceea ce înseamnă că răspunsul indicial, $h(t)$, este o funcție impară într-un sistem de coordonate cu originea translată în punctul $(T, M(0)/2)$.

Se remarcă faptul că, în cazul filtrelor ideale fără distorsiuni de fază, $g(t)$ şi $h(t)$ sunt nenule pentru $t < 0$, ceea ce contravine principiului non-anticipării.

b_1. Filtre ideale <<trece-jos>>

Un filtru <<trece-jos>> permite transferul frecvențelor într-un interval $[-\omega_1, \omega_1]$, în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Intervalul $[-\omega_1, \omega_1]$ se numeşte *banda de trecere* a filtrului <<trece-jos>>.

Definiția 4

Răspunsul la frecvență (3.15) al unui filtru ideal <<trece-jos>> se caracterizează prin (fig.VI.18):

$$M(\omega) = \begin{cases} M_0, & \omega \in [-\omega_1, \omega_1] \\ 0, & \omega \in (-\infty, -\omega_1) \cup (\omega_1, +\infty) \end{cases}. \blacksquare \tag{3.25}$$

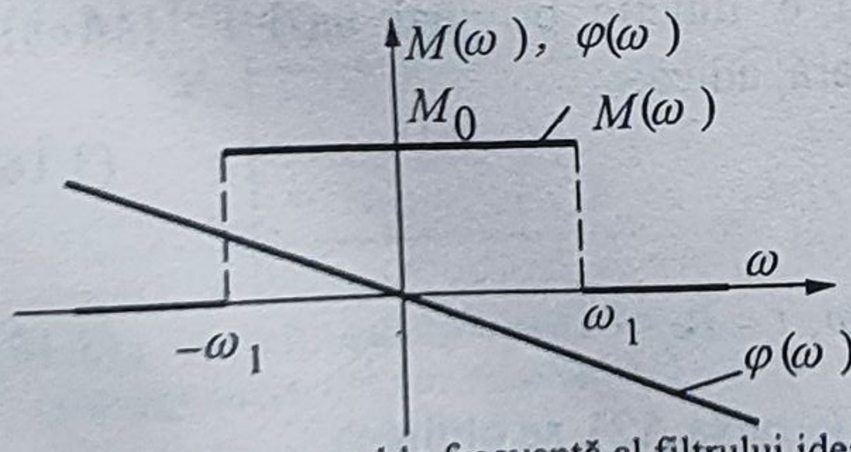


Fig.VI.18.Răspunsul la frecvență al filtrului ideal <<trece-jos>>.

Răspunsul la impuls se obține înlocuind (3.25) în (3.20). După calcule elementare se obține:

$$g(t) = \frac{1}{\pi}M_0\frac{\sin\omega_1(t-T)}{t-T},\ t \in \mathbf{R}, \tag{3.26}$$

al cărei grafic este reprezentat în fig.VI.19.

Răspunsul indicial se obține înlocuind (3.25) în (3.23). Rezultă:

$$h(t) = M_0\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\,\omega_1(t-T)\right],\ t \in \mathbf{R}, \tag{3.27}$$

în care $\mathrm{Si}ax = \int_0^x \frac{\sin ax}{x}\,dx$ este funcţia *sinus integral*.

Graficul răspunsului indicial este reprezentat în fig.VI.20.

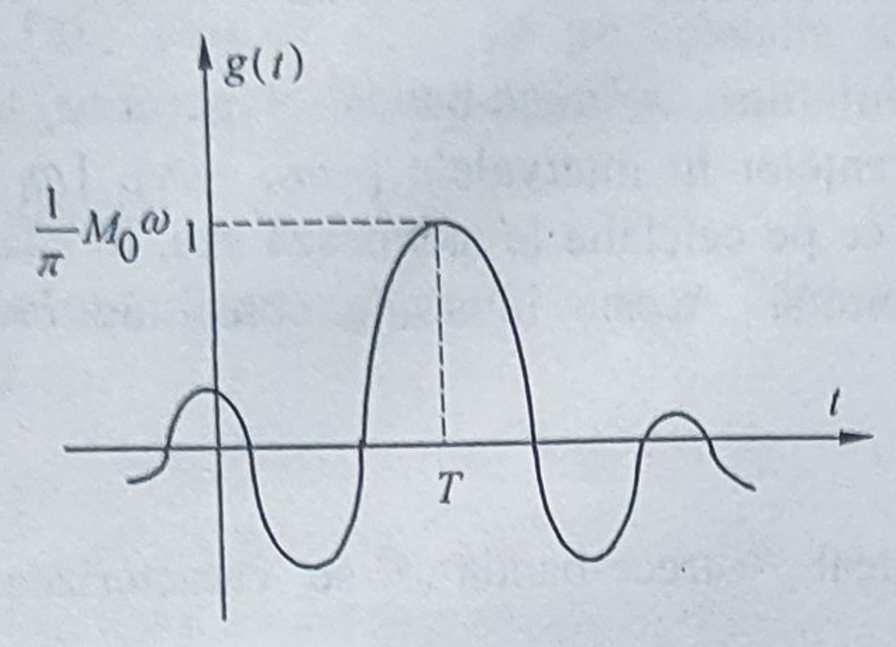


Fig.VI.19.Răspunsul la impuls al filtrului ideal <<trece-jos>>

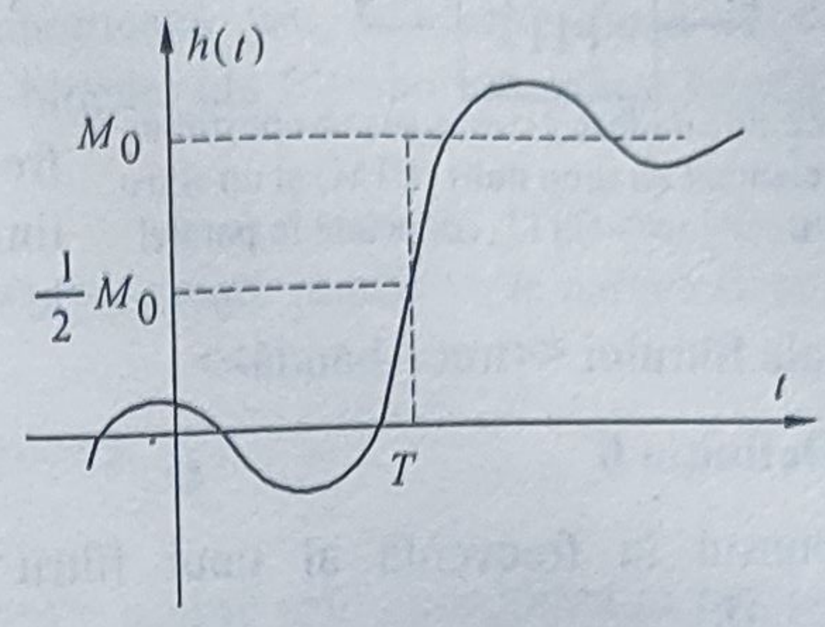


Fig.VI.20.Răspunsul indicial al filtrului ideal <<trece-jos>>

Adoptând ca măsură a rapidităţii răspunsului indicial panta sa maximă normată (prin împărţirea la M_0), care se obţine pentru $t = T$, se constată că:

$$h'_{\max}/M_0 = h'(T)/M_0 = g(T)/M_0 = \omega_1/\pi. \qquad (3.28)$$

Rapiditatea astfel definită este proporţională cu lărgimea benzii de trecere a filtrului ideal <<trece-jos>>. Pe de altă parte, calitativ, rapiditatea este invers proporţională cu durata de creştere, t_c, definită la II.7.1. Ca urmare, se poate afirma că t_c este invers proporţională cu lărgimea benzii de trecere a filtrului ideal <<trece - jos>>. Acest fapt este confirmat de relaţia (7.33) de la II.7.2.c_3 şi are valabilitate calitativă generală pentru filtrele <<trece-jos>>. Rezultatul (3.28) este în fond o confirmare a definiţiei (3.25), care exprimă faptul că filtrul ideal <<trece-jos>> transferă semnale sinusoidale de pulsaţie maximă ω_1 şi că, în context frecvenţial, ω_1 este o măsură a rapidităţii.

b_2.Filtre ideale <<trece-sus>>

Un filtru <<trece-sus>> permite transferul frecvenţelor în intervalele $(-\infty, -\omega_1]$, $[\omega_1, +\infty)$, în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Intervalul $(-\omega_1, \omega_1)$ se numeşte *banda de blocare* a filtrului <<trece-sus>>.

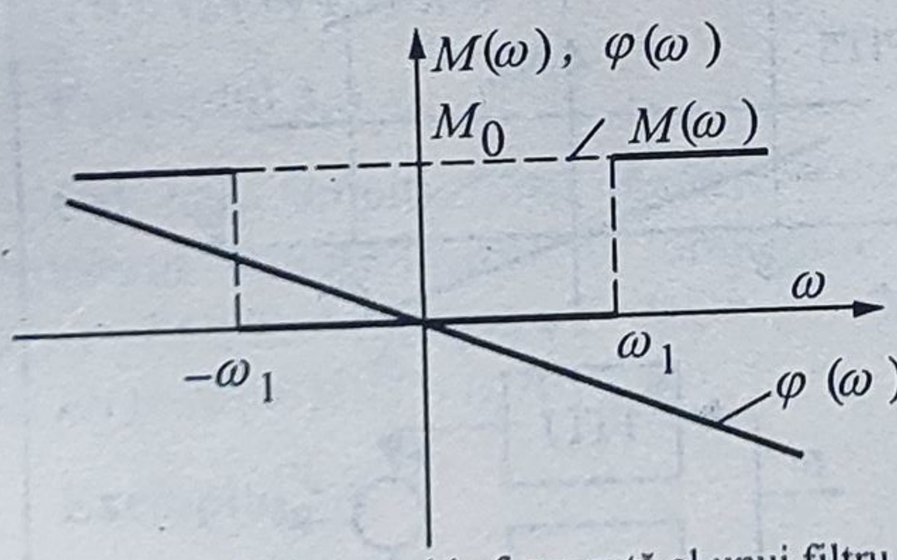


Fig.VI.21.Răspunsul la frecvenţă al unui filtru ideal <<trece-sus>>

Definiţia 5

Răspunsul la frecvenţă (3.15) al unui filtru ideal <<trece-sus>> se caracterizează prin (fig.VI.21):

$$M(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in (-\omega_1, \omega_1) \\ M_0, & \omega \in (-\infty, -\omega_1] \cup [\omega_1, +\infty) \end{cases}. \blacksquare \qquad (3.29)$$

Este uşor de constatat că un filtru ideal <<trece-sus>> (FITS) se poate obţine prin conectarea unui element cu timp mort (ETM) şi a unui filtru ideal <<trece-jos>> (FITJ) ca în fig.VI.22, în care se au în vedere definiţiile 1, 2, 4, şi 5, respectiv fig.VI.15, fig.VI.18, fig.VI.21. Pe această bază

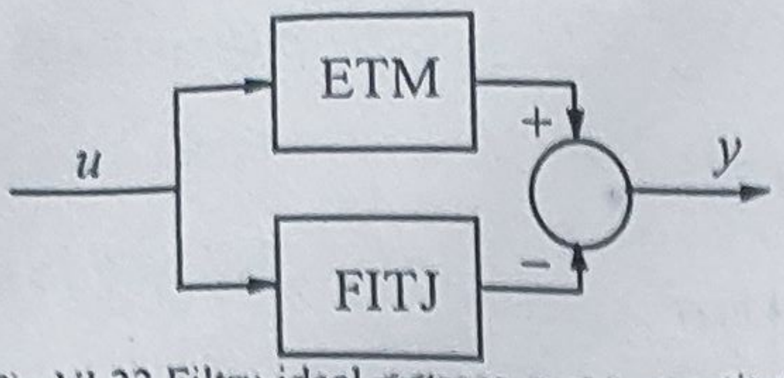


Fig. VI.22. Filtru ideal <<trece-sus>> constituit dintr-un element cu timp mort (ETM) şi un filtru ideal <<trece-jos>> (FITJ) conectate în paralel

se pot scrie expresiile răspunsurilor la impuls şi indicial, în conformitate cu (3.11), (3.26) şi respectiv (3.12), (3.27).

b_3. Filtre ideale <<trece-bandă>>

Un filtru <<trece-bandă>> permite transferul frecvenţelor în intervalele $[-\omega_2, -\omega_1]$, $[\omega_1, \omega_2]$, în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Aceste intervale constituie *benzile de trecere* ale filtrului <<trece-bandă>>.

Definiţia 6

Răspunsul la frecvenţă al unui filtru ideal <<trece-bandă>> se caracterizează prin (fig.VI.23.a):

$$M(\omega)=\begin{cases} M_0, \omega \in [-\omega_2,-\omega_1]\cup[\omega_1,\omega_2] \\ 0\ , \omega \in (-\infty,-\omega_2)\cup(-\omega_1,\omega_1)\cup(\omega_2,+\infty) \end{cases}. \blacksquare \qquad (3.30)$$

Un filtru ideal <<trece-bandă>> (FITB) se poate obţine prin conectarea în serie, ca în fig.VI.23.b, a unui filtru ideal <<trece-jos>> (FITJ), cu banda de trecere $[-\omega_2, \omega_2]$, şi a unui filtru ideal <<trece-sus>> (FITS) cu banda de blocare $(-\omega_1, \omega_1)$, $\omega_2 > \omega_1$, în care se au în vedere definiţiile 4, 5 şi 6, respectiv fig.VI.18, fig.VI.21 şi fig.VI.23.a. În conformitate cu schema din fig.VI.23.b. şi cu rezultatele de la b_1 şi b_2 se pot determina răspunsurile la impuls şi indicial.

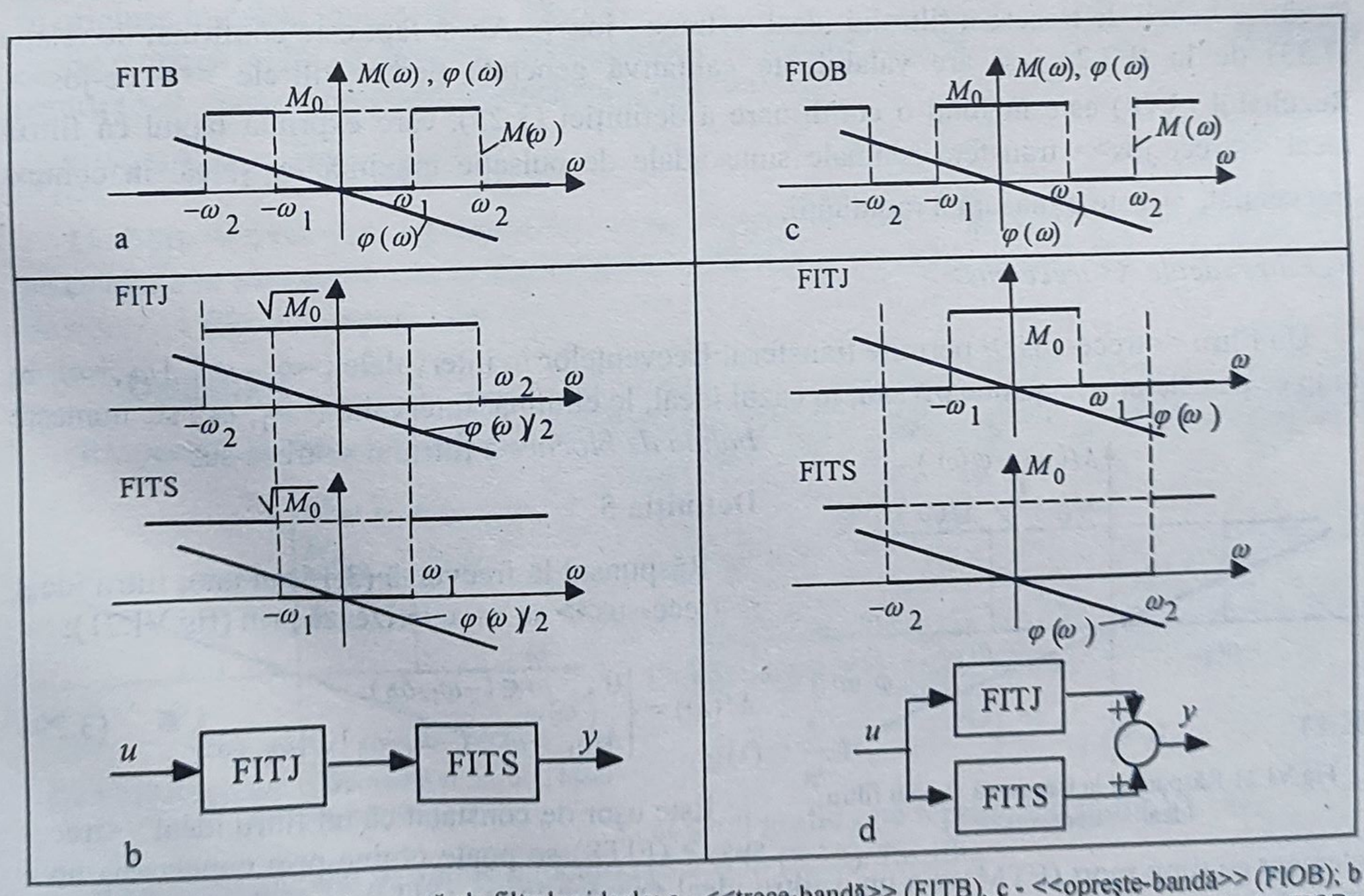


Fig. VI.23. Răspunsurile la frecvenţă ale filtrelor ideale: a - <<trece-bandă>> (FITB), c - <<opreşte-bandă>> (FIOB); b - FITB obţinut prin conectarea în serie a două filtre ideale: <<trece-jos>> (FITJ) şi <<trece-sus>> (FITS); d - FIOB obţinut prin conectarea în paralel a două filtre ideale: FITJ şi FITS.

b_4. Filtre ideale <<opreşte bandă>>

Un filtru <<opreşte bandă>> permite transferul frecvenţelor în intervalele $(-\infty, -\omega_2]$, $[-\omega_1,\omega_1]$, $[\omega_2, +\infty)$, în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Intervalele $(-\omega_2, -\omega_1)$, (ω_1,ω_2) constituie benzile de blocare ale filtrului <<opreşte bandă>>.

Definiţia 7

Răspunsul la frecvenţă (3.15) al unui filtru ideal <<opreşte bandă>> se caracterizează prin (fig.VI.23.c):

$$M(\omega)=\begin{cases} M_0, \omega \in (-\infty,-\omega_2]\cup[-\omega_1,\omega_1]\cup[\omega_2,+\infty) \\ 0\ , \omega \in (-\omega_2,-\omega_1)\cup(\omega_1,\omega_2) \end{cases} . \blacksquare \qquad (3.31)$$

Un filtru ideal <<opreşte bandă>> (FIOB) se poate obţine prin conectarea în paralel, ca în fig.VI.23.d, a unui filtru ideal <<trece -jos>> (FITJ), cu banda de trecere $[-\omega_1,\omega_1]$, şi a unui filtru ideal <<trece-sus>> cu banda de blocare $(-\omega_2,\omega_2)$, $\omega_2 > \omega_1$, în care se au în vedere definiţiile 4, 5 şi 7 şi respectiv fig.VI.18, fig.VI.21 şi fig.VI.23.c. În conformitate cu schema bloc din fig.VI.23.d şi cu rezultatele de la b_1 şi b_2 se pot determina răspunsurile la impuls şi indicial.

3.2. Sisteme dinamice realiste

Răspunsul la frecvenţă al filtrelor reale, comparativ cu comportarea ideală statuată prin definiţia 1, prezintă atât distorsiuni de amplitudine cât şi distorsiuni de fază.

Pentru exemplificare şi pentru a trece în revistă posibilităţile efective de realizare a unor filtre reale corespunzătoare filtrelor ideale introduse prin definiţiile 4 - 7 se vor prezenta în continuare patru filtre electrice RC pasive sau active, de tip cuadripol. Se are în vedere ipoteza conform căreia rezistenţa de sarcină este infinită, respectiv curentul de ieşire al cuadripolului este nul.

Exemplul 3.2

Cel mai simplu filtru electric <<trece-jos>> este cuadripolul RC din fig.VI.24.a. Pentru transferul intrare-ieşire în domeniul tensiunilor, funcţia de transfer a filtrului este $G(s)=1/(Ts+1)$, cu $T=RC$ şi, în mod convenţional, $\omega_1=1/T$ (pentru $\omega=\omega_1$, $M(\omega_1)= = M(0)/\sqrt{2}=0,707$). ■

Exemplul 3.3

Cel mai simplu filtru electric <<trece-sus>> este cuadripolul din fig.VI.24.b. Pentru transferul intrare-ieşire în domeniul tensiunilor, funcţia de transfer a filtrului este $G(s)=Ts/(Ts+1)$, cu $T=RC$ şi, în mod convenţional, $\omega_2=1/T$ (pentru $\omega=\omega_2$, $M(\omega_2)=M(\infty)/\sqrt{2}=0,707$). ■

Exemplul 3.4

În conformitate cu schema din fig.VI.23.b un filtru electric <<trece-bandă>> se poate realiza prin conectarea în cascadă (serie) a două filtre: unul <<trece-jos>> şi unul <<trece-sus>>, ca în fig.VI.24.c (A este un amplificator de decuplare, cu rezistenţe de intrare şi de ieşire, respectiv foarte mare şi foarte mică). Funcţia de transfer a filtrului este $G(s)=T_1 s/[(T_1 s+1)(T_2 s+1)]$, cu $T_1=R_1C_1$, $T_2=R_2C_2$ şi $\omega_1=1/T_1$, $\omega_2=1/T_2$, $\omega_2>\omega_1$. ■

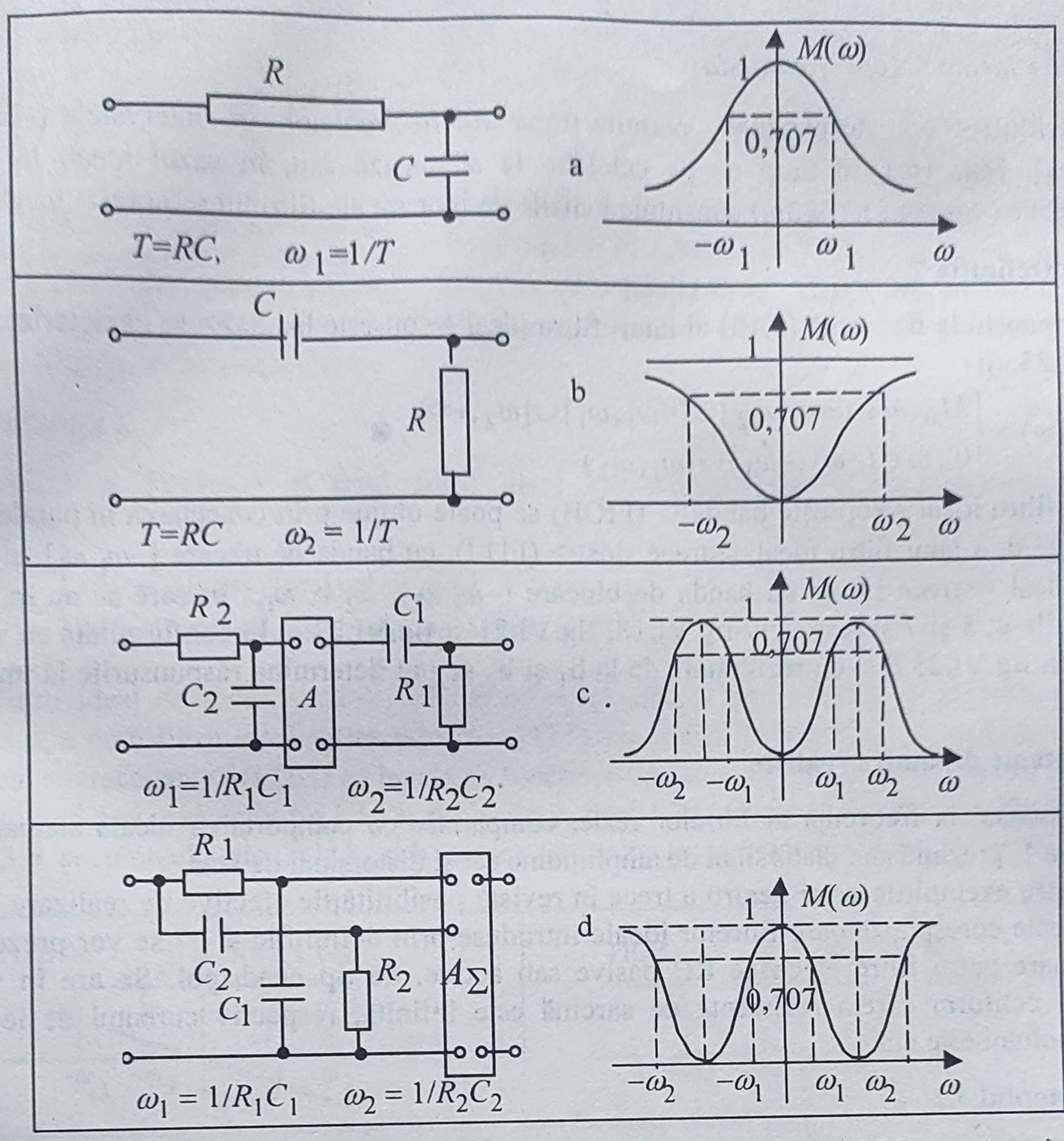


Fig.VI.24. Filtre electrice: a - <<trece-jos>> (exemplul 3.2); b - <<trece-sus>> (exemplul 3.3); c - <<trece bandă>> (exemplul 3.4), A - amplificator ; d - <<opreşte-bandă>> (exemplul 3.5), A_Σ - amplificator sumator

Exemplul 3.5

În conformitate cu schema din fig.VI.23.d un filtru electric <<opreşte bandă>> se poate realiza prin conectarea în paralel a două filtre: unul <<trece-jos>> şi unul <<trece-sus>>, ca în fig.VI.24.d (A_Σ este un amplificator sumator, de decuplare, cu rezistenţe de intrare şi de ieşire, respectiv foarte mari şi foarte mică. Funcţia de transfer a filtrului este:

$G(s) = [T_1T_2s^2 + 2T_2s + 1]/[(T_1s + 1)(T_2s + 1)]$, cu $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_2C_2$ şi $\omega_1 = 1/T_1$, $\omega_2 = 1/T_2$, $\omega_2 > \omega_1$. ■

Observaţia 3.1

Filtrele prezentate la exemplele 3.2-3.5 (fig.VI.24) sunt constituite cu elemente de circuit (R şi C) ideale. Elementele de circuit reale nu sunt "pure", ci se caracterizează prin parametri suplimentari. Astfel, un rezistor, pe lângă rezistenţa R, se caracterizează şi prin inductanţa L_R şi un condensator, pe lângă capacitatea C, se caracterizează prin rezistenţa de pierderi R_C. În aceste condiţii, de exemplu schema efectivă a unui filtru real <<trece-jos>> nu este cea din

fig.VI.24.a, ci aceea din fig.VI.25. Evident, dacă L_R şi $1/R_C$ au valori foarte mici ele pot fi neglijate, pe benzi de frecvenţe precizabile, ceea ce justifică utilizarea în multe situaţii a schemei din fig.VI.24.a.■

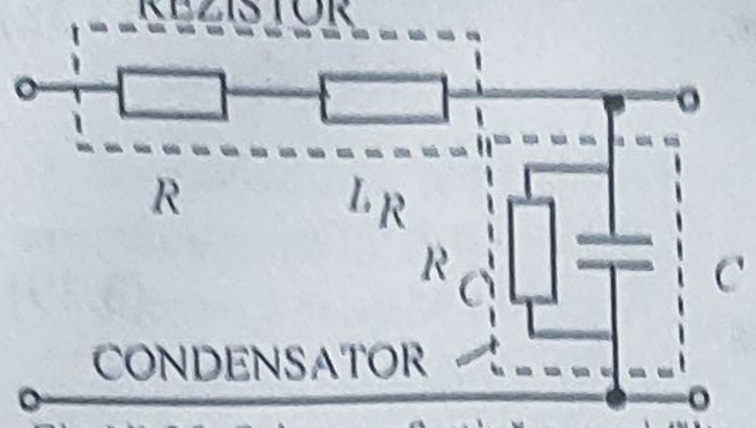


Fig.VI.25. Schema efectivă a unui filtru RC real <<trece-jos>> (observaţia 3.1).

Definiţia 8

Un sistem dinamic se numeşte *realist* dacă satisface principiul non-anticipării, adică răspunsul sistemului (mărimea de ieşire) nu precede în timp excitaţia (mărimea de intrare).■

Pentru sistemele dinamice liniare această proprietate se poate exprima cu ajutorul răspunsului la impuls, $g(t)$, sub forma:

$$g(t) \equiv 0, t < 0, \tag{3.32}$$

aşa cum s-a arătat la II.3.2.a.

Observaţia 3.2

În unele lucrări se utilizează denumirea de sistem dinamic fizic realizabil (în loc de sistem dinamic realist), adică fizic concretizabil, ceea ce depăşeşte limitele definiţiei 8. Modelele matematice sunt ele însele sisteme dinamice. Atributul <<fizic realizabil>> se utilizează de regulă în legătură cu modelele matematice. În aceste circumstanţe nu toate modelele matematice care sunt realiste sunt şi fizic realizabile (se are în vedere observaţia 3.1).■

Teorema 1

Un sistem dinamic liniar realist este complet caracterizabil fie de partea pară, fie de partea impară a răspunsului său la impuls.■

D. Fie $g_p(t)$ şi $g_i(t)$ partea pară şi respectiv impară ale răspunsului la impuls $g(t)$. Se scrie:

$$g(t) = g_p(t) + g_i(t),\ t \in \mathbf{R}. \tag{3.33}$$

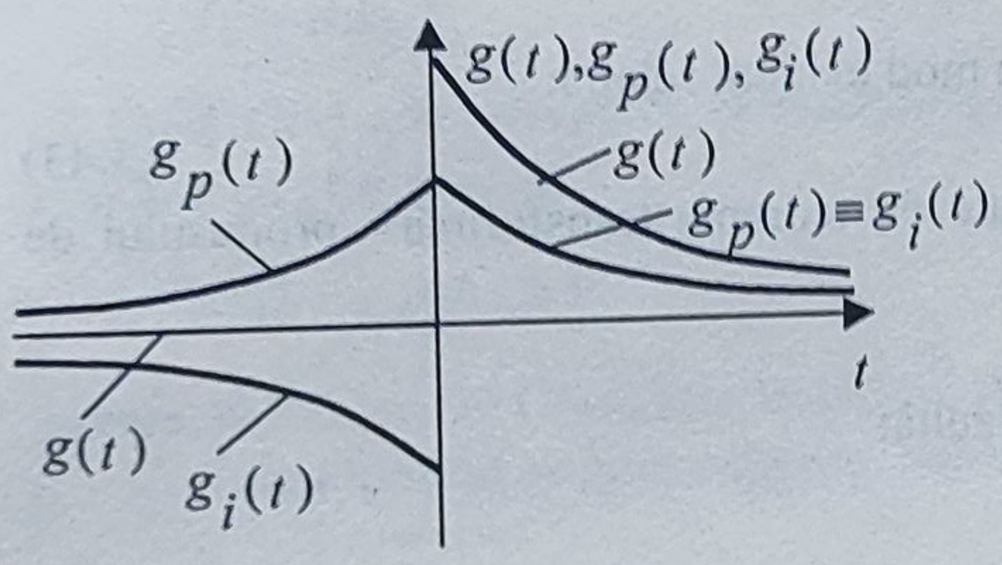


Fig.VI.26. Exemplificare la demonstraţia Teoremei 1

Din (3.32) şi (3.33) rezultă:

$$g_p(t) + g_i(t) \equiv 0,\ t < 0, \tag{3.34}$$

respectiv:

$$g_p(-t) + g_i(-t) \equiv 0,\ t > 0. \tag{3.35}$$

Din (3.33)-(3.35) se obţine:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2g_p(t) \equiv 2g_i(t), & t > 0. \end{cases} \blacksquare \tag{3.36}$$

În conformitate cu (3.33) şi (3.36), cu titlu de exemplu, reprezentarea grafică a răspunsului la impuls se prezintă în fig.VI.26.

Teorema 2

Răspunsul la impuls al unui sistem dinamic linear realist este complet determinat fie de partea reală, fie de partea imaginară a răspunsului la frecvenţă. ■

D. Pentru $g(t) = g_p(t) + g_i(t)$ şi $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, conform unei proprietăţi a transformatei Fourier (Anexa A2) se pot scrie relaţiile:

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_p(t)e^{-j\omega t}dt,\ jI(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g_i(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{3.37}$$

$$g_p(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R(\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ g_i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}jI(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{3.38}$$

Ţinând seama de (3.36) se obţine:

$$g(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(\omega)e^{j\omega t}d\omega\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}jI(\omega)e^{j\omega t}d\omega, & t>0.\ \blacksquare\end{cases} \tag{3.39}$$

Rezultatul (3.39) sugerează existenţa unei legături între $R(\omega)$ şi $jI(\omega)$ în cazul sistemelor liniare realiste. Într-adevăr, înlocuind (3.38) în (3.34) şi (3.35), după calcule elementare se obţine:

$$\int_0^{+\infty}[R(\omega)\cos\omega t+I(\omega)\sin\omega t]d\omega=0, t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}. \tag{3.40}$$

Rezultatul (3.40) este o relaţie implicită între $R(\omega)$ şi $I(\omega)$ în cazul sistemelor dinamice liniare realiste. Explicitarea lui $R(\omega)$ în funcţie de $I(\omega)$ sau a lui $I(\omega)$ în funcţie de $R(\omega)$ face obiectul rezultatului următor. Acest rezultat este fundamental pentru caracterizarea răspunsului la frecvenţă al unui sistem dinamic liniar realist.

Teorema 3 (transformarea Hilbert)

O condiţie necesară şi suficientă ca $G(j\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$, funcţie de pătrat integrabil, să fie răspunsul la frecvenţă al unui sistem dinamic liniar realist este ca să aibă loc:

$$I(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(\eta)}{\omega-\eta}d\eta, \tag{3.41}$$

$$R(\omega)=+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I(\eta)}{\omega-\eta}d\eta.\ \blacksquare \tag{3.42}$$

Demonstraţia. Necesitatea. Răspunsul la impuls satisface în mod evident relaţia:

$$g(t)=g(t)\sigma(t). \tag{3.43}$$

Trecând la transformate Fourier, în conformitate cu teorema transformării produsului de originale (Anexa A2), din (3.43) se obţine:

$$G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}G(j\omega)*\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right) \text{ din care rezultă:}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\pi}G(j\omega)*\frac{1}{\omega}. \tag{3.44}$$

În mod explicit, din (3.44) se obţine: $R(\omega)+jI(\omega)=\dfrac{1}{j\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(\eta)+jI(\eta)}{\omega-\eta}d\eta$, din care, prin identificarea părţilor reală şi imaginară, rezultă (3.41) şi (3.42).

Suficienţa. Se poate porni de la (3.41) sau (3.42). Utilizând de exemplu (3.42) se poate scrie:

$$R(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}jI(\eta)\frac{2}{j(\omega-\eta)}d\eta=jI(\omega)*\frac{2}{j\omega}. \tag{3.45}$$

Întrucât $2/j\omega = \mathcal{F}\{\text{sgn}t\}$, trecând la domeniul timpului, din (3.45) se obţine: $g_p(t)=g_i(t)\text{sgn}\,t$ din care, pentru $t<0$, rezultă $g_p(t)\equiv -g_i(t)$ şi pentru $t>0$ rezultă $g_p(t)\equiv g_i(t)$. În aceste condiţii $g(t)$ are forma (3.36), adică reprezintă un sistem dinamic liniar realist. ■

Exemplul 3.6

Se consideră $G(s) = 1/(s+1)$. Se cere să se arate că răspunsul la frecvenţă corespunzător satisface condiţiile teoremei 3.

Pentru $s = j\omega$ se obţine $R(\omega) = 1/(\omega^2+1)$ şi $I(\omega) = -\omega/(\omega^2+1)$.

Conform relaţiei (3.41) se scrie:

$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\eta^2+1)(\omega-\eta)}d\eta = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+1}\left(\frac{\eta+\omega}{\eta^2+1}+\frac{1}{\omega-\eta}\right)d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\eta+\omega}{\eta^2+1}d\eta+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\alpha}^{\omega-\varepsilon}\frac{1}{\omega-\eta}d\eta+\int_{\omega+\varepsilon}^{+\alpha}\frac{1}{\omega-\eta}d\eta\right)\right]=$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(\eta^2+1)\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}+\omega\text{arctg}\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|\omega-\eta\|_{-\alpha}^{+\omega-\varepsilon}+\ln|\omega-\eta\|_{\omega+\varepsilon}^{\alpha}\right)\right]=$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)+\omega\text{arctg}\alpha+\omega\text{arctg}\alpha-\right.$$

$$\left.-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon-\ln|\omega+\alpha|+\ln|\omega-\alpha|-\ln\varepsilon\right)\right]=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}\lim_{\alpha\to+\infty}\left(2\omega\text{arctg}\alpha+\ln\left|\frac{\omega+\alpha}{\omega-\alpha}\right|\right)=$$

$$=-\frac{\omega}{\omega^2+1}.\blacksquare$$

Deoarece teorema 3 este mai puţin utilizată în aplicaţii datorită dificultăţilor de calcul pe care le prezintă relaţiile (3.41), (3.42), s-au elaborat şi alte rezultate mai uşor de aplicat practic.

Teorema 4

Dacă $G(s)$ este olomorfă în semiplanul $\{\text{Re}\ s \geq 0\}$, $G(j\omega)$ este absolut integrabilă pentru $\omega \in \mathbf{R}$ şi în plus are loc:

$$|G(s)| \leq \frac{M}{|s|}, \text{Re}\, s \geq 0, \tag{3.46}$$

în care $M>0$, atunci $G(j\omega)$ este răspunsul la frecvenţă al unui sistem dinamic liniar realist.■

$\mathcal{D}$. Prima ipoteză asigură existenţa transformatei inverse:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{3.47}$$

În continuare demonstraţia se sprijină pe teorema reziduurilor. Întrucât $G(s)$ este olomorfă pentru $\{\text{Re}\ s \geq 0\}$, pentru conturul închis din fig.VI.1 (conturul Nyquist) se poate scrie:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{M\tilde{N}P}G(s)e^{st}ds+\frac{1}{2\pi j}\int_{R}^{-R}G(j\omega)e^{j\omega t}d(j\omega)=0,\ t<0. \tag{3.48}$$

Pe semicercul $M\tilde{N}P$, pe baza ipotezei (3.46), are loc evaluarea $|G(s)|\leq M/R$. Conform primei leme a lui Jordan, integrala pe $M\tilde{N}P$ tinde la 0 pentru $R\to+\infty$. În aceste condiţii din (3.47) şi (3.48), pentru $R\to+\infty$, se obţine: $g(t)=0$, $t<0$. ■

Rezultatul precedent este o condiţie suficientă astfel încât $G(j\omega)$ să fie răspunsul la frecvenţă al unui sistem dinamic realist. Ea constituie suportul riguros al observaţiei 1.3 de la II.1.4.

Teorema 5 (Paley-Wiener)

O condiţie necesară şi suficientă ca o funcţie $M(\omega) > 0$, $\omega \in \mathbf{R}$, de pătrat integrabil, să fie modulul răspunsului la frecvenţă al unui sistem dinamic liniar realist este ca să aibă loc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln M(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < +\infty. \blacksquare \tag{3.49}$$

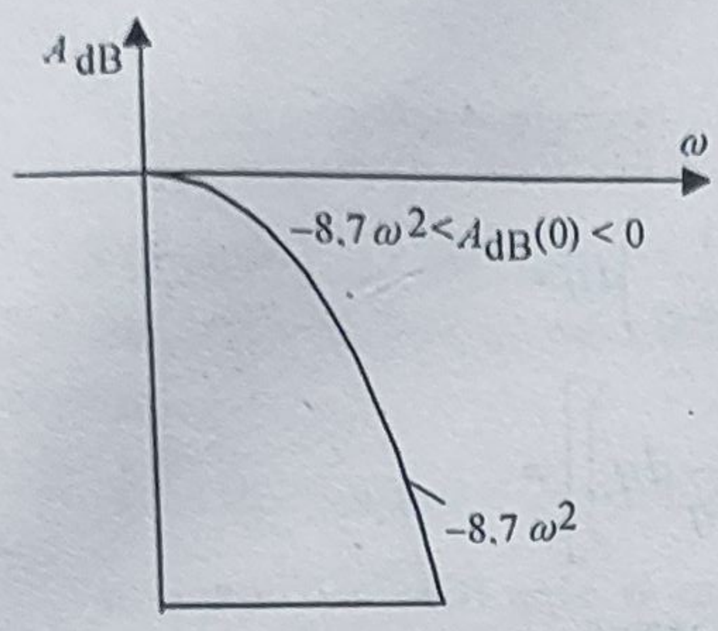


Fig.VI.27. Domeniul admisibil (nehaşurat) pentru caracteristica atenuare-frecvenţă a unui filtru <<trece-jos>> realist (exemplul 3.7).

Exemplul 3.7.

Se consideră un filtru <<trece-jos>> descris de $M(\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, cu $M(0) = 1$, $0 < M(\omega) < 1$, $\omega \neq 0$, şi $\lim_{\omega \to \pm\infty} M(\omega) = 0$ Se cere să se determine mulţimea de funcţii $M(\omega)$ pentru care are loc (3.49).

Situaţia limită care trebuie avută în vedere, în context, este filtrul <<trece-jos>> de tipul "clopotul lui Gauss", descris de $M(\omega) = e^{-\omega^2}$. În acest caz integrala din (3.49) are forma: $\int_{-\infty}^{+\infty}[\omega^2/(1+\omega^2)]d\omega$, care în mod evident este divergentă. Urmează că: $|\ln M(\omega)| < \omega^2$. Întrucât $M(0) = 1$ şi $0 < M(\omega) < 1$, $\omega \neq 0$, pentru $A_{dB}(\omega) = 20 \lg M(\omega)$ din inegalitatea precedentă rezultă: $-8{,}7\omega^2 < A_{dB}(\omega) < 0$, $A_{dB}(0) = 0$. Domeniul admisibil în care se poate afla caracteristica atenuare - frecvenţă este reprezentat în fig.VI.27 (zona nehaşurată). Este de domeniul evidenţei că filtrul ideal <<trece-jos>> (fig.VI.18) nu satisface condiţia (3.49). ■

3.3. Sisteme de defazaj minim

Teorema 5 nu afirmă că orice $G(j\omega)$ al cărui modul $M(\omega)$ satisface (3.49) este răspunsul la frecvenţă al unui sistem dinamic liniar realist. Acest fapt depinde evident şi de $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$, care nu poate fi total arbitrară, aşa cum, în mod implicit, rezultă din teorema 3. Pe de altă parte, în general, principiul non-anticipării nu implică existenţa unei relaţii bine determinate între $M(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$, de tipul aceleia dintre $R(\omega)$ şi $I(\omega)$ - relaţiile (3.41), (3.42).

În mod firesc se pune următoarea întrebare: în ce situaţie există o relaţie bine determinată între $M(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$?

Pentru formularea unui răspuns se consideră un sistem dinamic al cărui răspuns la frecvenţă este:

$$G_l(j\omega) = \ln G(j\omega) = \ln M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \ln M(\omega) + j\varphi(\omega). \tag{3.50}$$

În condiţiile teoremei 3 pentru acest sistem se pot scrie relaţiile:

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\eta)}{\omega - \eta} d\eta, \tag{3.51}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - \eta} d\eta, \tag{3.52}$$

în care $A(\omega) = \ln M(\omega)$ este *atenuarea* răspunsului la frecvenţă $G(j\omega)$.

Relaţiile (3.51), (3.52) sunt cunoscute sub numele de *condiţiile Bode*. Ele stabilesc o legătură între $M(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ pentru o anumită clasă de sisteme dinamice liniare realiste definită de transformarea (3.50).

Pentru $G(s) = Q(s)/P(s)$, în care $Q(s)$ şi $P(s)$ sunt două polinoame relativ prime între ele, în conformitate cu (3.50), se poate scrie: $G_l(s) = \ln Q(s) - \ln P(s)$. Rezultă că (3.51), (3.52) au loc numai dacă $Q(s)$ şi $P(s)$ au, ambele, toate zerourile în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$, deoarece respectivele zerouri constituie singularităţi pentru funcţiile $\ln Q(s)$ şi $\ln P(s)$.

Definiţia 9

Sistemele dinamice liniare ale căror funcţii de transfer au toţi polii şi toate zerourile în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$ se numesc sisteme de *defazaj minim*.

Sistemele dinamice liniare ale căror funcţii de transfer au toţi polii şi numai o parte din zerouri în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$ se numesc sisteme de *defazaj neminim*.■

Denumirile (introduse deja la II.7.1) sunt justificate de faptul că ambele tipuri de sisteme satisfac teorema 5 şi sistemele de defazaj minim se disting prin aceea că dintre toate sistemele dinamice liniare realiste care au acelaşi modul al răspunsului la frecvenţă, numai acestea au defazajul (definit ca diferenţa între faza mărimii de intrare şi faza mărimii de ieşire, ceea ce înseamnă $-\varphi(\omega)$) cel mai mic. Sistemele de defazaj minim satisfac condiţiile Bode (relaţiile (3.51), (3.52)).

Exemplul 3.8

Se consideră sistemul de defazaj minim $G_m(s)=(bs+1)/[(a_1s+1)(a_2+1)]$, cu $a_1, a_2, b > 0$, şi sistemul de defazaj neminim $G_{nm}(s)=(bs-1)/[(a_1s+1)(a_2+1)]$. Se cere să se compare defazajele introduse de cele două sisteme.

Se remarcă mai întâi că cele două sisteme au acelaşi modul al răspunsului la frecvenţă. Într-adevăr:

$$M_m(\omega) = M_{nm}(\omega) = \sqrt{b^2\omega^2 + 1} \Big/ \sqrt{(a_1^2\omega^2 + 1)(a_2^2\omega^2 + 1)}\,.$$

Defazajele introduse de cele două sisteme sunt: $-\varphi_m(\omega) = \mathrm{arctg}\, a_1\omega + \mathrm{arctg}\, a_2\omega - \mathrm{arctg}\, b\omega$, $-\varphi_{nm}(\omega) = \mathrm{arctg}\, a_1\omega + \mathrm{arctg}\, a_2\omega + \mathrm{arctg}\, b\omega$. Este de domeniul evidenţei că: $-\varphi_m(\omega) < -\varphi_{nm}(\omega)$. ■

Exemplul 3.9

Se consideră termometrul de la II.7.2.b, exemplul 7.1. Se cere să se determine relaţia dintre variaţia Δx_m a lungimii coloanei de mercur şi variaţia $\Delta\theta_i$ a temperaturii de măsurat.

Ca urmare a variaţiei $\Delta\theta_m$ a temperaturii mercurului, se produce o variaţie a volumului mercurului: $\Delta V_m = k_m\Delta\theta_m$, *în* care k_m este o constantă.

Într-o primă aproximaţie şi din punct de vedere geometric variaţia ΔV_m are expresia: $\Delta V_m = A_{s0}\Delta x_m + x_{m0}\Delta A_s$, în care A_{s0} este aria iniţială a secţiunii tubului capilar, x_{m0} este lungimea iniţială a coloanei de mercur şi ΔA_s este variaţia ariei secţiunii tubului capilar.

Variaţia ΔA_s este cauzată de variaţia $\Delta\theta_i$ a temperaturii de măsurat, conform relaţiei: $\Delta A_s = k_s\theta_i$, şi se datorează dilatării tubului capilar.

Eliminând ΔV_m, ΔA_s şi $\Delta\theta_m$ între relaţiile de mai sus şi $T(d\Delta\theta_m/dt)+\Delta\theta_m = \Delta\theta_i$ (obţinută la exemplul 7.1) rezultă: $Td\Delta x_m/dt+\Delta x_m=k(\Delta\theta_i-T_1 d\Delta\theta_i/dt)$, în care: $k=(k_m - x_{m0}k_s)/A_{s0}$, $T_1 = Tx_{m0}k_s/(k_m - x_{m0}k_s)$.

Funcţia de transfer corespunzătoare are forma: $G(s) = k(1 - T_1 s)/(1 + Ts)$, ceea ce înseamnă că termometrul este un sistem dinamic liniar de defazaj neminim.

Caracteristica esenţială a unui astfel de element se evidenţiază cu ajutorul răspunsului indicial (fig.VI.28) şi ea constă în faptul că în primele momente mărimea de ieşire este de semn opus faţă de mărimea de intrare.

Utilizând rezultatul de la II.7.2.c, exemplul 7.3, se poate ţine seama şi de rezistenţa termică şi capacitatea termică a tubului capilar.■

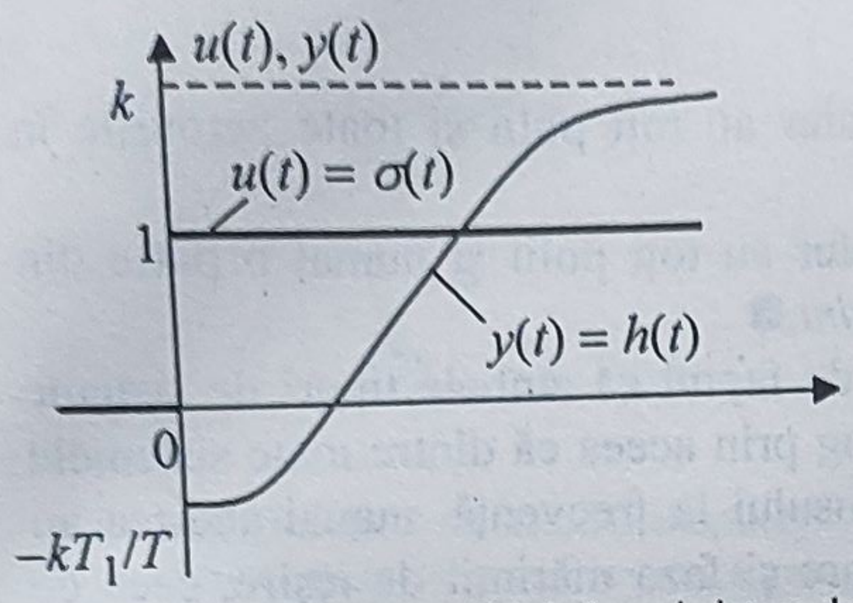


Fig.VI.28. Răspunsul indicial al unui sistem de defazaj neminim (exemplul 3.8)

Funcţia de transfer a unui sistem de defazaj neminim se poate scrie sub următoarea formă factorizată:

$$G(s) = \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P(s)} \tag{3.53}$$

în care $P(s)$ şi $Q_1(s)$ sunt polinoame ale căror zerouri sunt toate în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$ şi $Q_2(s)$ este un polinom ale cărui zerouri sunt toate în $\{\mathrm{Re}s > 0\}$.

Întrucât polinomul $Q_2(-s)$ are toate zerourile în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$, prin înmulţirea membrului drept din (3.53) cu $Q_2(-s)/Q_2(-s)$ se obţine:

$$G(s) = G_m(s)G_t(s), \tag{3.54}$$

în care:

$$G_m(s) = Q_1(s)Q_2(-s)/P(s), \tag{3.55}$$

este funcţia de transfer a unui sistem de defazaj minim şi

$$G_t(s) = Q_2(s)/Q_2(-s) \tag{3.56}$$

este funcţia de transfer a unui sistem de defazaj neminim, având proprietatea:

$$|G_t(j\omega)| = |Q_2(j\omega)|/|Q_2(-j\omega)| = 1. \tag{3.57}$$

Conform proprietăţii (3.57) sistemul descris de funcţia de transfer (3.56) se numeşte *filtru ideal* <<*trece-tot*>> cu distorsiuni de fază.

Ca urmare a proprietăţii (3.57), din (3.54) se obţine:

$$|G(j\omega)| = |G_m(j\omega)|,$$

ceea ce înseamnă că sistemele dinamice liniare caracterizate prin acelaşi modul al răspunsului la frecvenţă se deosebesc între ele numai prin filtrele ideale <<trece-tot>> de forma (3.56) conform factorizării (3.54).

4. Stabilitatea şi stabilizarea sistemelor automate

4.1. Principiul argumentului

a. Integrala pe contur a derivatei logaritmice

Fie,

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad s \in \mathbf{C}, \tag{4.1}$$

funcţia de transfer a unui sistem dinamic liniar în care $P(s)$ şi $Q(s)$ sunt două polinoame cu coeficienţi reali, relativ prime între ele şi cu grad $Q(s) = m$, grad $P(s) = n$.

*Ipoteza 1.*Fie γ un contur închis, situat în planul complex **C**, în interiorul căruia $G(s)$ are m_γ zerouri şi n_γ poli (incluzându-se şi multiplicităţile corespunzătoare).■

Principiul argumentului, care permite evaluarea variaţiei totale a argumentului funcţiei $G(s)$ pentru $s\in\gamma$, se deduce din următorul rezultat clasic din teoria funcţiilor de o variabilă complexă.

Teorema 1 (Cauchy)

Funcţia $G(s)$, conform ipotezei 1, satisface relaţia:

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)}ds = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma).\blacksquare \tag{4.2}$$

Demonstraţie. Fie z_i, de multiplicitate m_i, $i=\overline{1,\mu}$, zerourile lui $G(s)$ situate în interiorul conturului γ, şi p_k,, de multiplicitate n_k, $k=\overline{1,\nu}$, polii lui $G(s)$ situaţi în interiorul conturului γ. Evident au loc: $\sum_1^\mu m_i = m_\gamma$, şi $\sum_1^\nu n_k = n_\gamma$.

Pentru $G'(s)/G(s) = d[\ln G(s)]/ds$, numită şi derivata logaritmică a lui $G(s)$, atât z_i cât şi p_k sunt, după cum se va arăta imediat, singularităţi de tip pol simplu. Ca urmare, pentru evaluarea integralei pe contur din (4.2), se aplică teorema reziduurilor şi se obţine:

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)}ds = 2\pi j\left[\sum_1^\mu \mathrm{Rez}_\gamma(z_i) + \sum_1^\nu \mathrm{Rez}_\gamma(p_k)\right]. \tag{4.3}$$

Pe de altă parte, pentru z_i se poate scrie : $G(s) = (s-z_i)^{m_i} G_i(s)$, unde $G_i(s)$ este o funcţie care nu-l are pe z_i ca zero. În aceste condiţii se obţine: $G'(s)/G(s) = m_i/(s-z_i) + G'_i(s)/G_i(s)$, ceea ce înseamnă că: $\mathrm{Rez}_\gamma(z_i) = m_i$. Ca urmare:

$$\sum_1^\mu \mathrm{Rez}_\gamma(z_i) = \sum_1^\mu m_i = m_\gamma. \tag{4.4}$$

În mod similar pentru p_k se poate scrie: $G(s) = (s-p_k)^{-n_k} G_k(s)$, unde $G_k(s)$ este o funcţie care nu-l are pe p_k ca pol. Acesta conduce la: $G'(s)/G(s) = -n_k/(s-p_k) + G'_k(s)/G(s)$, ceea ce înseamnă că: $\mathrm{Rez}_\gamma(p_k) = -n_k$. Ca urmare:

$$\sum_1^\nu \mathrm{Rez}_\gamma(p_k) = -\sum_1^\nu n_k = -n_\gamma. \tag{4.5}$$

Înlocuind (4.4)şi (4.5) în (4.3) se obţine (4.2).■

*Ipoteza 2.*Se presupune în plus că $G(s)$ are $\tilde{m}_\gamma$ zerouri şi $\tilde{n}_\gamma$ poli (incluzându-se şi multiplicităţile corespunzătoare) pe conturul γ (cu tangenta continuă).■

Se prezintă în continuare, fără demonstraţie, un rezultat care ţine seama şi de ipoteza 2.

Teorema 2 (Cauchy)

Funcţia $G(s)$, conform ipotezelor 1 şi 2, satisface relaţia:

$$\int_\gamma \frac{G'(s)}{G(s)}ds = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma) + \pi j(\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma).\blacksquare \tag{4.6}$$

b. Variaţia totală a argumentului

Din (4.6) se obţine:

$$[\ln G(s)]_{s\in\gamma} = 2\pi j(m_\gamma - n_\gamma) + \pi j(\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma). \tag{4.7}$$

Înlocuind $G(s)=|G(s)|e^{j\arg G(s)}$ în (4.7), după calcule elementare, rezultă:

$$[\arg G(s)]_{s\in\gamma} = 2\pi(m_\gamma - n_\gamma) + \pi(\tilde{m}_\gamma - \tilde{n}_\gamma). \tag{4.8}$$

Relaţia (4.8) este expresia analitică a *principiului argumentului.* La o alegere convenabilă a conturului γ, relaţia (4.8) poate fi folosită pentru evaluarea variaţiei totale a argumentului în funcţie de numărul de zerouri şi de poli ai lui $G(s)$ în semiplanul $\{\mathrm{Re}s \geq 0\}$. Un astfel de contur este *conturul Nyquist* γ_N - fig.VI.1.

Fie $m_{\gamma N} = m_+$ şi $n_{\gamma N} = n_+$ numărul de zerouri şi respectiv de poli ai lui $G(s)$ în $\{\mathrm{Re}s > 0\}$. Fie de asemenea m_0 şi n_0 numărul de zerouri finite şi respectiv de poli finiţi în $\{\mathrm{Re}s = 0\}$. Se ştie că $G(s)$ mai are în punctul de la infinit fie un zero de multiplicitate $|m - n|$ pentru $m < n$, fie un pol de aceeaşi multiplicitate pentru $m > n$. Întrucât $R = +\infty$, fig.VI.1, rezultă că punctul de la infinit aparţine conturului γ_N. Ca urmare $\tilde{m}_{\gamma N} - \tilde{n}_{\gamma N} = m_0 - n_0 - (m - n)$.

În aceste circumstanţe din (4.8) se obţine:

$$\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi(n_+ - m_+) + \pi(n_0 - m_0) + \pi(m - n), \tag{4.9}$$

deoarece s-a ţinut seama de $\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=+\infty}^{\omega=-\infty} = -\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty}$.

Întrucât $\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}$ din (4.9) se mai obţine :

$$\arg G(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi(n_+ - m_+) + \frac{\pi}{2}(n_0 - m_0) + \frac{\pi}{2}(m - n). \tag{4.10}$$

c. Criteriul Cremer-Leonhard

Forma (4.10) a principiului argumentului poate fi utilizată pentru obţinerea unui rezultat de stabilitate BIBO (subcap. II.6) atunci când se cunoaşte polinomul polilor.

Fie $\Delta(s)$ un polinom monic, cu coeficienţi reali şi grad $\Delta(s) = r$.

Teorema 3 (Cremer-Leonhard)

Polinomul $\Delta(s)$ este hurwitzian dacă şi numai dacă:

$$\arg \Delta(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2} r. \blacksquare \tag{4.11}$$

$\mathcal{D}$. Fie r_+ şi r_0 numărul de zerouri (incluzându-se şi multiplicităţile corespunzătoare) situate în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$ şi respectiv în $\{\mathrm{Re}s = 0\}$. Înlocuind în (4.10): $n_+ = 0$, $n_0 = 0$, $n = 0$ şi $m_+ = r_+$, $m_0 = r_0$, $m = r$ se obţine:

$$\arg \Delta(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = -\pi r_+ - \frac{\pi}{2} r_0 + \frac{\pi}{2} r. \tag{4.12}$$

Suficienţa. Dacă (4.11) este adevărată, atunci din (4.11) şi (4.12) rezultă $r_+ = 0$ şi $r_0 = 0$, ceea ce înseamnă că $\Delta(s)$ este hurwitzian.

Necesitatea. Dacă $\Delta(s)$ este hurwitzian, atunci $r_+ = 0$ şi $r_0 = 0$. În aceste condiţii din (4.12) rezultă (4.11).■

Un rezultat echivalent cu teorema 3, care face uz de hodograful $\Delta(j\omega)$, este următorul.

Teorema 4 (Cremer-Leonhard)

Polinomul $\Delta(s)$ este hurwitzian dacă şi numai dacă hodograful $\Delta(j\omega)$, $\omega \geq 0$, parcurge în sens pozitiv exact r cadrane în succesiunea lor naturală.■

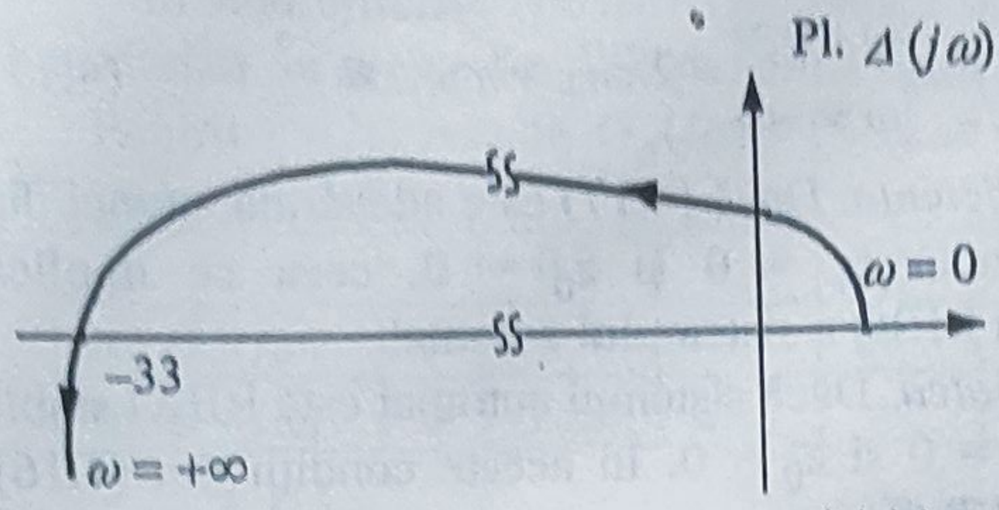


Fig.VI.29. Hodograful $\Delta(j\omega)$ la exemplul 4.1

Exemplul 4.1

Se consideră polinomul $\Delta(s) = s^3+17s^3+2s^2+1$. Se cere să se studieze natura acestui polinom în conformitate cu teorema 4.

După trasarea prin puncte a hodograful $\Delta(j\omega)$, $\omega \geq 0$, se obţine imaginea din fig.VI.29. Conform teoremei 4 rezultă că $\Delta(s)$ este hurwitzian. ■

4.2. Criteriul Nyquist

a. Utilizarea locului de transfer

Fie sistemul automat cu structura din fig.VI.30 (corespunzătoare schemei din fig.V.1), în care

$$G_d(s) = G(s)G_t(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{4.13}$$

este funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis, cu m = grad Q, n = grad P şi $m < n$.

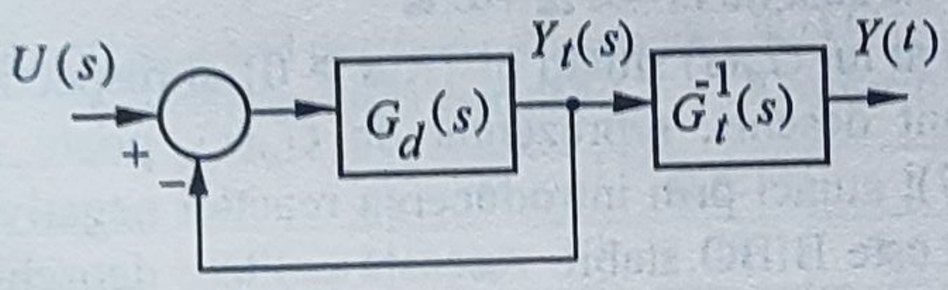


Fig.VI.30. Schema bloc structurală pentru studiul stabilităţii BIBO

Funcţia de transfer a sistemului închis are expresia:

$$G_0(s) = \frac{G_d(s)}{F(s)}, \tag{4.14}$$

în care

$$F(s) = 1 + G_d(s) = \frac{P(s)+Q(s)}{P(s)}. \tag{4.15}$$

Polii lui $G_0(s)$ coincid cu zerourile lui $F(s)$, respectiv cu zerourile polinomului $P(s)+Q(s)$.

Se ştie de la II.4.1 că funcţia de transfer a sistemului închis în raport cu perturbaţia, $G_{0w}(s)$, are exact aceiaşi poli ca şi $G_0(s)$. În aceste condiţii utilizarea funcţiei $F(s)$ pentru studiul stabilităţii unui sistem automat este pe deplin justificată.

În general $F(s)$ poate avea z_+ zerouri în $\{\mathrm{Re}s > 0\}$ şi z_0 zerouri în $\{\mathrm{Re}s = 0\}$. Polii lui $F(s)$ coincid cu polii lui $G_d(s)$, dintre care n_+ se află în $\{\mathrm{Re}s > 0\}$ şi n_0 în $\{\mathrm{Re}s = 0\}$. Punctul de la infinit nu este nici zero şi nici pol pentru $F(s)$ deoarece $F(s)$ este raportul a două polinoame de grad n. În aceste circumstanţe variaţia totală a argumentului lui $F(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, se determină cu formula (4.9) şi are expresia:

$$\arg F(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi(n_+ - z_+) + \pi(n_0 - z_0). \tag{4.16}$$

Se ştie că sistemul automat cu structura din fig.VI.30 este BIBO stabil ($G_t(s)$ este un element de tip P, PT_1 sau PT_2 şi ca atare $G_t^{-1}(s)$ nu are poli finiţi) dacă şi numai dacă toţi polii lui $G_0(s)$, respectiv toate zerourile lui $F(s)$ sunt situate în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$. În consecinţă se poate formula următorul rezultat.

Teorema 5 (Nyquist)

Sistemul automat cu structura din fig.VI.30 este BIBO stabil dacă şi numai dacă $F(s)$, definit prin (4.15), satisface condiţia:

$$\arg F(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi n_+ + \pi n_0 . \blacksquare \qquad (4.17)$$

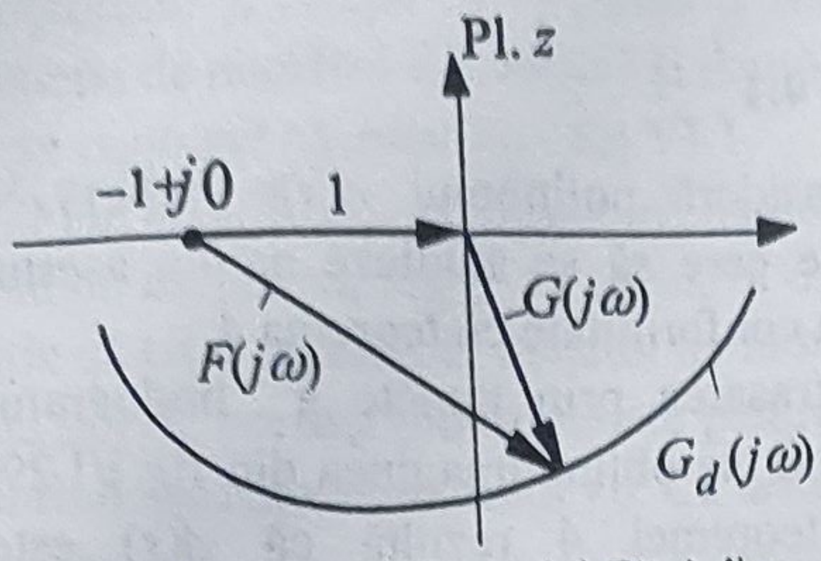


Fig.VI.31.Determinarea lui $F(j\omega)$ din $G\ (j\omega)$.

Suficienţa. Dacă (4.17) este adevărată, atunci din (4.16) rezultă $z_+ = 0$ şi $z_0 = 0$, ceea ce implică stabilitatea BIBO a sistemului automat.

Necesitatea. Dacă sistemul automat este BIBO stabil atunci $z_+ = 0$ şi $z_0 = 0$. În aceste condiţii din (4.16) rezultă (4.17).■

Din punct de vedere practic, este mai util şi mai simplu de aplicat un enunţ echivalent al teoremei 5 care se bazează pe următoarea observaţie. Întrucât între $F(s)$ şi $G_d(s)$ există relaţia (4.15) este suficient să se reprezinte hodograful $G_d(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, celălalt hodograf, şi anume $F(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, rezultând automat faţă de o nouă origine, translată în punctul $-1+j0$, fig.VI.31. Enunţul echivalent al teoremei 5 este următorul.

Teorema 6 (Nyquist)

Sistemul automat cu structura din fig.VI.30 este BIBO stabil dacă şi numai dacă locul de transfer al sistemului în circuit deschis (hodograful $G_d(j\omega)$) înconjoară punctul $-1+j0$, în sens pozitiv, de un număr de $n_+ + n_0/2$ ori atunci când ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$.■

S-a văzut că n_+ şi n_0 reprezintă numărul de poli ai lui $G_d(s)$ situaţi în $\{\mathrm{Re}s > 0\}$ şi respectiv $\{\mathrm{Re}s=0\}$. Aceasta înseamnă că sistemul în circuit deschis, reprezentat de $G_d(s)$, poate fi arbitrar BIBO instabil. Dacă are loc condiţia (4.17), atunci prin introducerea reacţiei negative conform fig.VI.30, sistemul automat astfel obţinut este BIBO stabil. Această calitate deosebit de importantă a reacţiei negative a fost evidenţiată la III.4, unde s-a arătat că reacţia negativă realizează o *alocare* a polilor sistemului automat.

Un caz frecvent întâlnit în aplicaţii este acela în care sistemul în circuit deschis, reprezentat de $G_d(s)$, are cel mult doi poli în $\{\mathrm{Re}s \geq 0\}$, şi anume în originea planului s ($s = 0$). Într-o astfel de situaţie ($n_+ = 0$ şi $n_0 \leq 2$) se utilizează următoarea formă particulară a teoremei 6.

Teorema 7 (Nyquist)

Sistemul automat cu structura din fig.VI.30, în care $G_d(s)$, definit prin (4.13), are cel mult doi poli în originea planului s şi restul de poli sunt toţi situaţi în $\{\mathrm{Re}s < 0\}$, este BIBO stabil dacă şi numai dacă punctul $-1+j0$ este situat la stânga în afara locului de transfer $G_d(j\omega)$ atunci când acesta este parcurs pentru ω luând valori de la $-\infty$ la $+\infty$.■

Atunci când hodograful $G_d(j\omega)$ are o formă complicată este dificil să se determine la prima vedere dacă punctul $-1+j0$ este la stânga sau la dreapta locului de transfer $G_d(j\omega)$. Având în vedere că hodograful $G_d(s)$ este parcurs de la $\omega = -\infty$ la $\omega = +\infty$, deci în sens negativ pe conturul Nyquist (fig.VI.1), rezultă că punctele situate la dreapta hodografului $G_d(j\omega)$, în sensul crescător al lui ω, sunt puncte interioare. Un procedeu expeditiv de determinare a poziţiei punctului $-1+j0$ faţă de hodograful $G_d(j\omega)$ constă în haşurarea părţii drepte a curbei $G_d(j\omega)$. Dacă punctul $-1+j0$ nu este într-o zona haşurată atunci acesta este în exteriorul hodografului $G_d(j\omega)$, respectiv la stânga sa atunci când $G_d(j\omega)$ este parcurs pentru ω crescător.

Exemplul 4.2

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VI.30 în care $G_d(s) = (4s^2 + 10s+5) / (s^3+2s^2+s+1)$. Se cere să se analizeze stabilitatea BIBO.

Utilizând criteriul Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) rezultă că polinomul (s^3+2s^2+s+1) este hurwitzian. În aceste condiţii se aplică teorema 7.

Pentru $s = j\omega$ rezultă $G_d(j\omega) = [-(2\omega^4 + 4\omega^2 - 5) - j\omega(4\omega^4+11\omega^2 - 5)]/(\omega^6 + 2\omega^4-3\omega^2+1)$.

Conform tabelului:

ω	0	0,2	0,4	0,63	0,8	0,93	1	10	10^2	$+\infty$
Re $G_d(j\omega)$	5	5,3	7,7	20,4	10	≈ 0	–1	$-2\cdot10^{-2}$	$-2\cdot10^{-4}$	0
Im $G_d(j\omega)$	0	1,08	2,25	≈ 0	–18	–12,6	–10	$-2{,}2\cdot10^{-2}$	$-4\cdot10^{-2}$	0

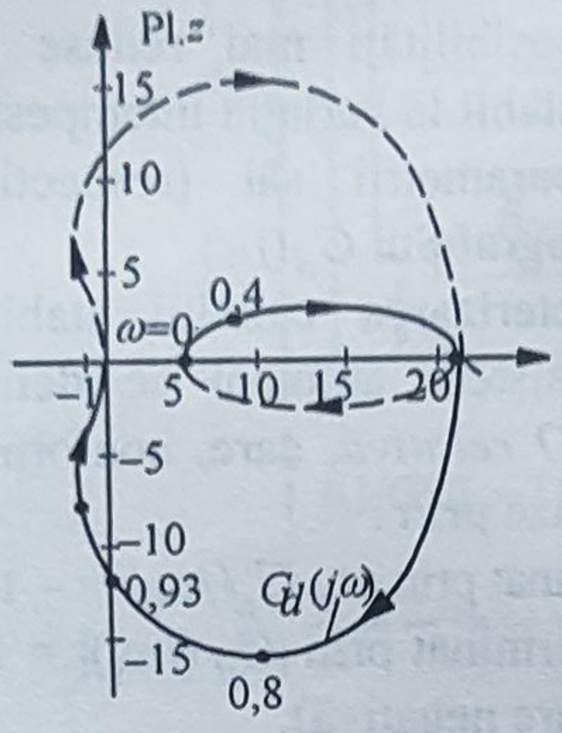


Fig. VI.32. Locul de transfer al sistemului în circuit deschis la exemplul 4.2

locul de transfer $G_d(j\omega)$ are forma din fig.VI.32. Întrucât punctul $-1+j0$ este în exteriorul hodografului $G_d(j\omega)$, conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO stabil.■

Exemplul 4.3

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VI.30 în care $G_d(s) = (s+1)/[s^\alpha(s+2)]$. Se cere să se analizeze stabilitatea BIBO pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = 2$.

Pentru $s=j\omega$ rezultă: $G_d(j\omega) = (j\omega+1)/[(j\omega)^\alpha(j\omega+2)]$, respectiv: $M_d(j\omega) = |G_d(j\omega)| = \sqrt{(\omega^2+1)/(\omega^2+4)}\,/\,\omega^\alpha$ şi $\varphi_d(\omega) = \arg G_d(j\omega) = -\pi\alpha/2 + \operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg}(\omega/2)$.

Conform tabelului:

α	ω	0	0,5	1	2	3	5	10	∞
$\alpha=1$	$M_d(\omega)$	∞	1,08	0,63	0,394	0,292	0,186	0,098	0
	$\varphi_d(\omega)$	–90°	–77°	–72°	–71°	–74°	–79°	–84°	–90°
$\alpha=2$	$M_d(\omega)$	∞	2,71	0,63	0,197	0,098	0,037	0,009	0
	$\varphi_d(\omega)$	–180°	–167°	–162°	–161°	–164°	–169°	–174°	–180°

locurile de transfer corespunzătoare sunt reprezentate în fig.VI.33 a şi b. Ambele hodografe trec prin punctul de la ∞ pentru $\omega = 0$. Punctul $-1+j0$ este în afara hodografului şi la stânga. Conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO stabil.■

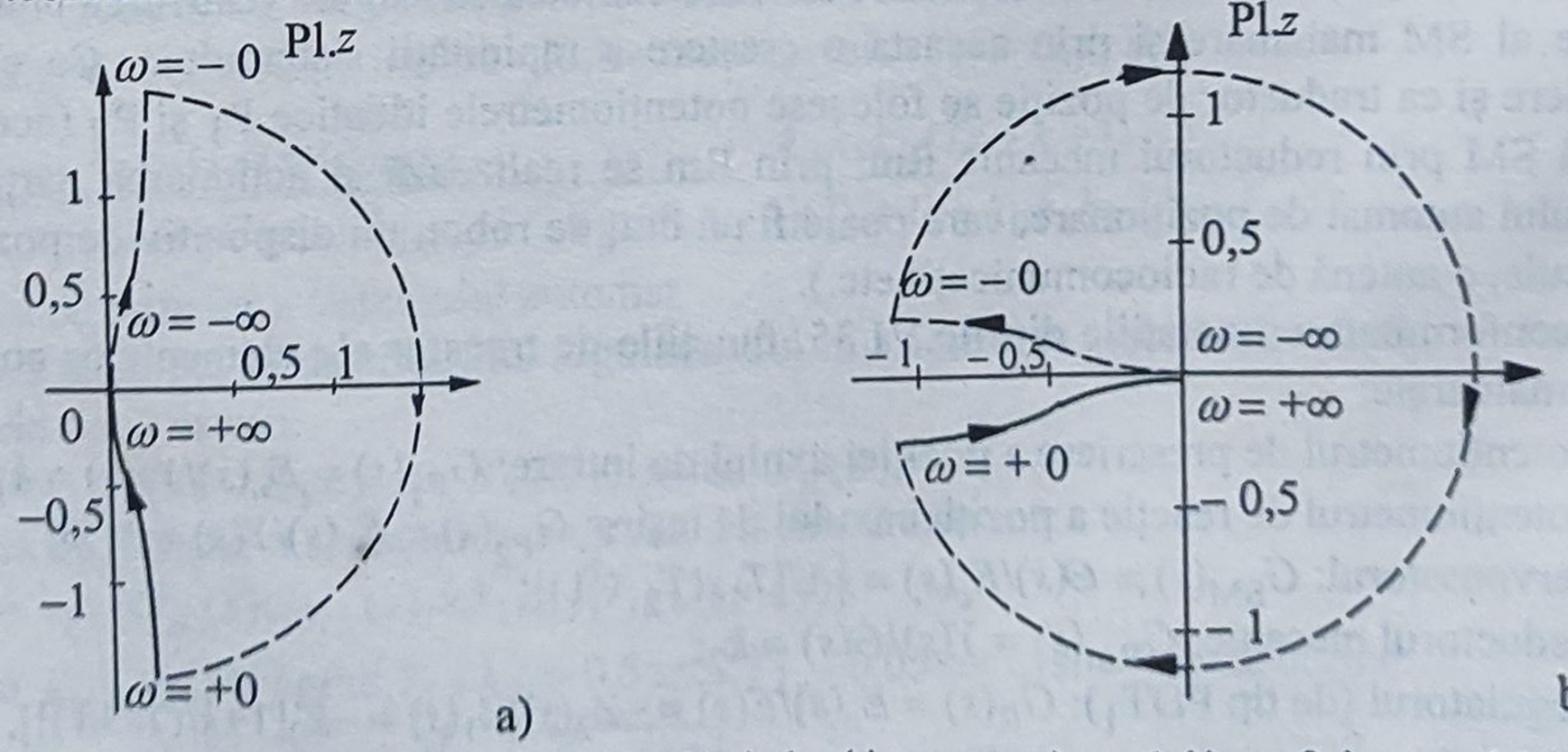


Fig. VI.33. Locul de transfer al sistemului în circuit deschis, pentru: a) $\alpha = 1$, b) $\alpha = 2$, la exemplul 4.3.

Un caz limită interesant este acela în care hodograful $G_d(j\omega)$ trece prin punctul $-1+j0$. În această situaţie există valori ale variabilei $s = j\omega$ pentru care $G_d(j\omega) = -1$, respectiv $G_0(s)$ are poli în $\{\mathrm{Re}s = 0\}$. Evident sistemul automat este BIBO instabil.

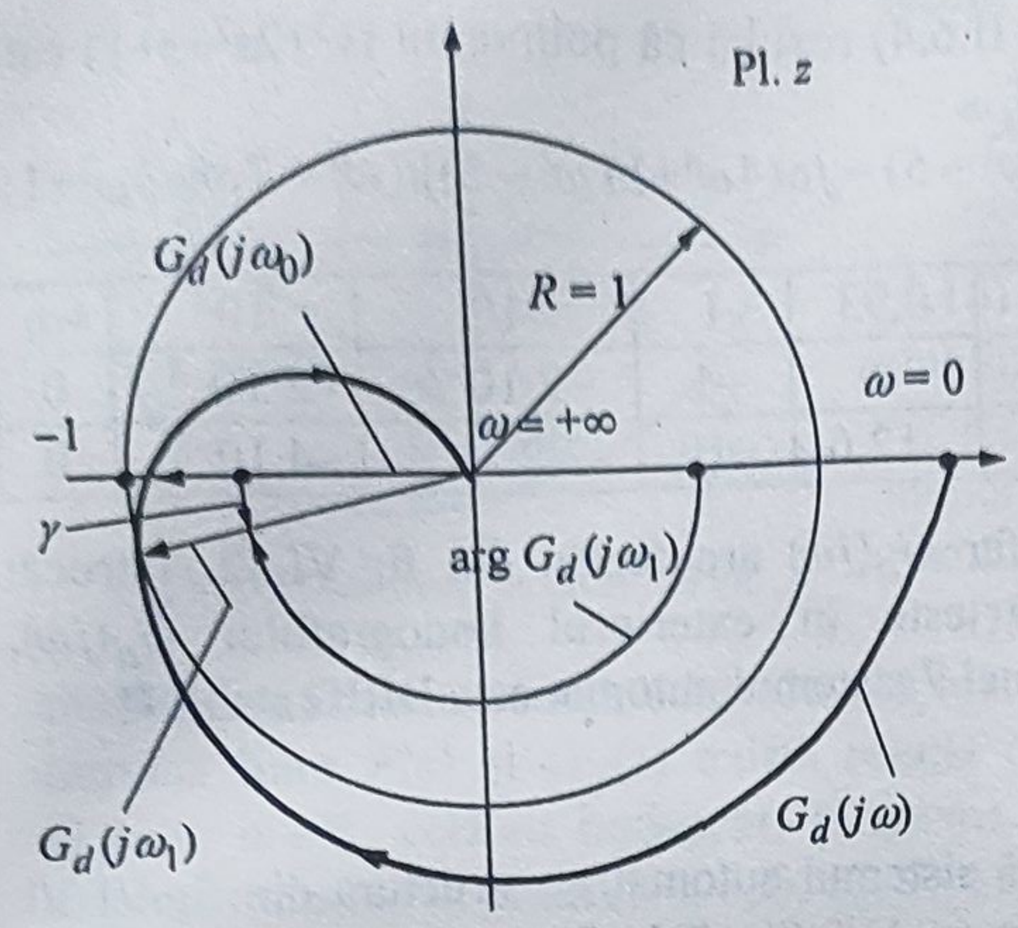


Fig. VI.34 Stabilitatea BIBO relativă

Din cele prezentate până aici rezultă că punctul $-1+j0$ ocupă o poziţie privilegiată relativ la stabilitatea BIBO a sistemului automat. Din acest motiv punctul $-1+j0$ se mai numeşte şi *punctul critic*. Intuitiv, este evident că în cazul sistemelor automate BIBO stabile cu cât locul de transfer $G_d(j\omega)$ este mai îndepărtat de punctul critic cu atât sistemul respectiv are posibilităţi mai reduse de a deveni BIBO instabil la variaţia intempestivă a unora dintre parametrii săi (respectiv la modificarea hodografului $G_d(j\omega)$.

Pentru caracterizarea calităţii stabilităţii BIBO a unui sistem automat se defineşte *stabilitatea BIBO relativă*, care, conform fig. VI.34, se evaluează prin :

- *marginea de amplificare*: $m = 1/|G_d(j\omega_0)|$, în care ω_0 este determinat prin $\arg G_d(j\omega_0) = -180^\circ$;
- *marginea de fază*: $\gamma = \arg G_d(j\omega_1) + 180^\circ$, în care ω_1 este determinat prin $|G_d(j\omega_1)| = 1$, iar $\arg G(j\omega_1)$ este măsurat ca în fig.VI.34 (şi având, evident, o valoare negativă).

Valorile recomandate sunt $m = 3 \div 10$ şi $\gamma = 30^\circ \div 50^\circ$. Realizarea acestor valori se asigură, în faza de proiectare a sistemului automat, prin sinteza regulatorului (fig. III.14).

b. Aplicaţie: alegerea regulatorului unui sistem automat de poziţionare

Se consideră sistemul automat de poziţionare cu schema funcţional - tehnologică din fig.VI.35. Elementul de execuţie este un servomotor electric asincron bifazat SM, comandat reversibil cu un redresor dublă alternanţă format din tranzistorii T_1 şi T_2. Aceştia sunt comandaţi prin tensiunea de ieşire a unui amplificator de curent continuu (A c.c.), care este elementul de bază al regulatorului. Legea de reglare este determinată de impedanţele de intrare şi de reacţie ale A c.c. Utilizarea reacţiei prin R_3, C_1 de la emitorii tranzistorilor T_1 , T_2 (uzual această reacţie se realizează de la ieşirea A c.c.) are calitatea că asigură realizarea unui cuplu de pornire al SM mai mare şi prin aceasta o creştere a rapidităţii sistemului. Ca element de prescriere şi ca traductor de poziţie se folosesc potenţiometrele identice P_1 şi P_2 (acesta cuplat la axul SM prin reductorul mecanic Rm; prin Rm se realizează şi acţionarea părţii fixate a sistemului automat de poziţionare, care poate fi un braţ de robot, un dispozitiv de poziţionare a unei scule, o antenă de radiocomunicaţii etc.).

În conformitate cu notaţiile din fig.VI.35, funcţiile de transfer ale elementelor componente sunt următoarele:

- Potenţiometrul de prescriere a poziţiei axului de intrare: $G_{P_1}(s) = E_u(s)/Y_p(s) = k_1$;
- Potenţiometrul de reacţie a poziţiei axului de ieşire: $G_{P_2}(s) = E_y(s)/Y(s) = k_1$;
- Servomotorul: $G_{SM}(s) = \Theta(s)/E_c(s) = -1/[T_1 s(T_2 + 1)]$;
- Reductorul mecanic: $G_{Rm}(s) = Y(s)/\Theta(s) = k_2$;
- Regulatorul (de tip PDT_1): $G_R(s) = E_c(s)/E(s) = -Z_2(s)/Z_1(s) = -k_0[1+k/(Ts+1)]$.

în care: abaterea $E(s)=E_u(s)-E_y(s)$ este o tensiune proporţională cu eroarea de poziţionare $Y_p(s)-Y(s)$ şi $Z_1(s)=RR_1/(R+R_1+R_2), Z_2(s)=RR_2/(R+R_1+R_2)+R_3(R_3C_1s+1)$, $k_0=R_2/R_1$, $k=(R_3/R_2)\left[1+(R_1+R_2)/R\right], T=R_3C_1$.

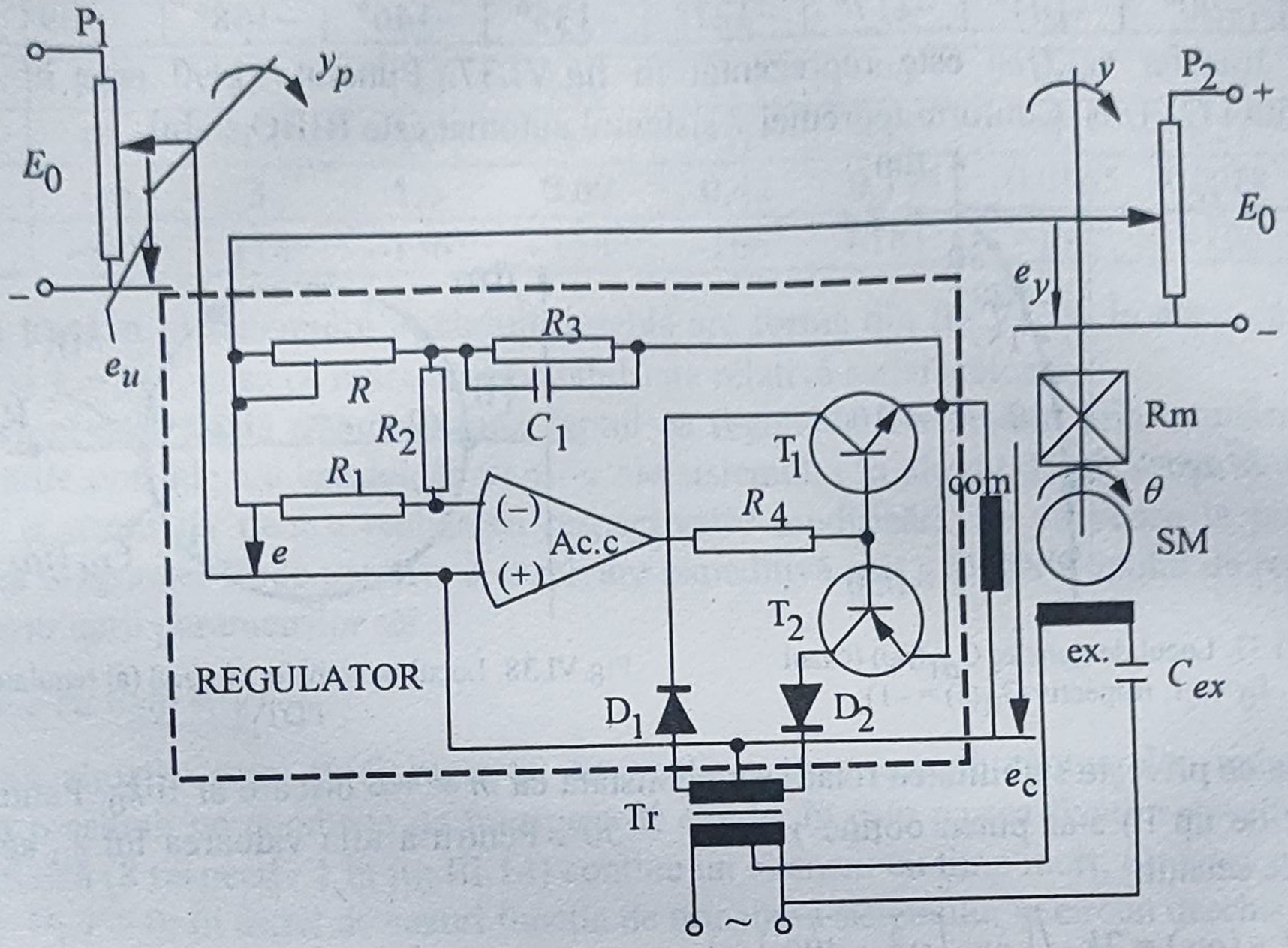


Fig. VI.35. Schema funcţional tehnologică a unui sistem automat de poziţionare

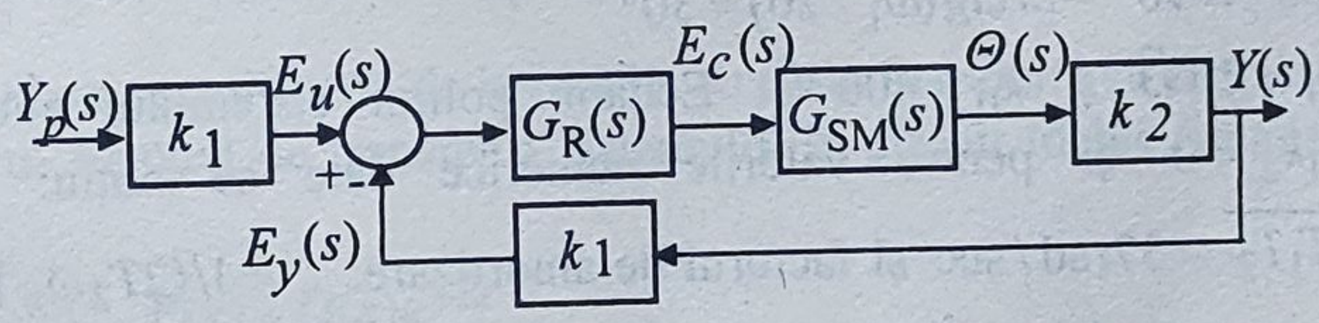


Fig. VI.36. Schema bloc structurală a sistemului automat de poziţionare din fig. VI.35

Conform acestor relaţii schema bloc structurală a sistemului automat de poziţionare are forma din fig. VI.36. Relaţia intrare - ieşire are expresia: $Y(s)=G_0(s)U(s)$, unde:

$$G_0(s)=\frac{k_1k_2G_R(s)G_{SM}(s)}{1+k_1k_2G_R(s)G_{SM}(s)}=\frac{k_0k_1k_2(Ts+k+1)}{T_1s(T_2s+1)(Ts+1)+k_0k_1k_2(Ts+k+1)}$$

este funcţia de transfer a sistemului automat.

Pentru a examina în detaliu rolul regulatorului în asigurarea stabilităţii relative se consideră următoarele două cazuri.

1° $k_0=1$ şi $k=0$ ($R_1=R$ şi $R_3=0$), adică $G_R(s)=-1$.

Funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis are forma:

$$G_{d1}=k_1k_2G_R(s)G_{SM}(s)=k_1k_2/\left[T_1s(T_2s+1)\right].$$

Pentru $k_1=0{,}05\text{V/grad}, T_1/k_2=0{,}5\,\text{sec}., T_2=0{,}05\,\text{sec}.$, şi $s=j\omega$ se obţine:

$$M_{d1}(j\omega)=|G_{d1}(j\omega)|=2/\left(\omega\sqrt{\omega^2+400}\right), \varphi_{d1}(j\omega)=\arg G_{d1}(j\omega)=270^0-\text{arctg}(\omega/20).$$

Conform tabelului:

ω	0	5	10	15	20	30	50	100	$+\infty$
$50M_{d1}$	$+\infty$	0,97	0,45	0,267	0,177	0,093	0,037	0,0098	0
φ_{d1}	$-90°$	$-104°$	$-117°$	$-127°$	$-135°$	$-146°$	$-158°$	$-169°$	$-180°$

locul de transfer $G_{d1}(j\omega)$ este reprezentat în fig.VI.37. Punctul $-1+j0$ este în exteriorul hodografului $G_{d1}(j\omega)$. Conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO stabil.

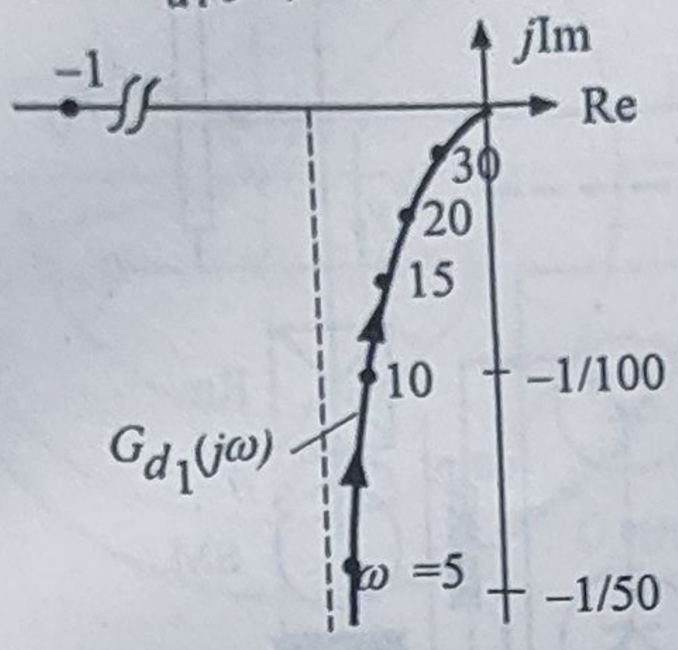


Fig.VI.37. Locul de transfer $G_{d1}(j\omega)$ (cazul $k_0 = -1$, respectiv $G_R(s) = -1$)

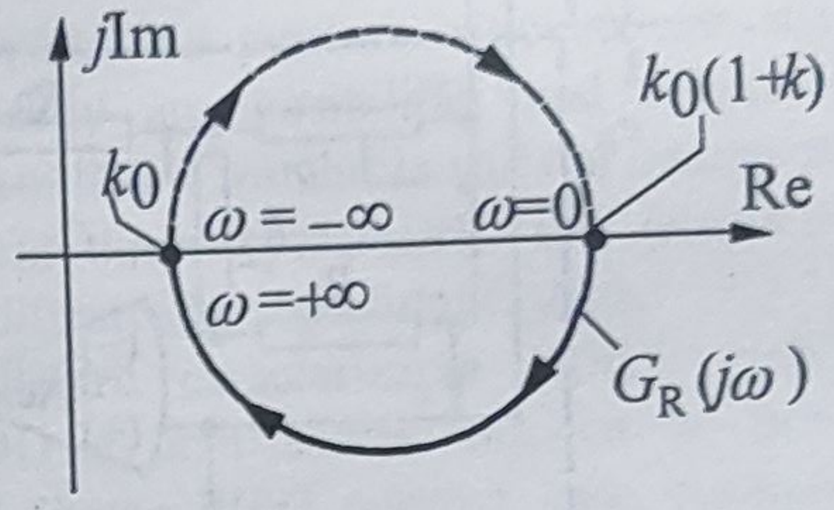


Fig.VI.38. Locul de transfer $G_R(j\omega)$ (al regulatorului PDT_1)

În ceea ce priveşte stabilitatea relativă se constată că $m = +\infty$ oricare ar fi k_0. Pentru $k_0 > 1$ (regulator de tip P) s-ar putea obține $\gamma = 30° \div 50°$. Pentru a afla valoarea lui k_0 se rezolvă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} k_0 M_{d1}(\omega_1) \equiv 2k_0 \Big/ \left(\omega_1 \sqrt{\omega_1^2 + 400}\right) = 1 \\ \varphi_{d1}(\omega_1) - 180° \equiv 90° - arctg(\omega_1 / 20) = 30° \end{cases}$$

şi se obține: $\omega_1 = 20\sqrt{3}$ şi $k_0 = 400\sqrt{3}$. Ecuația polilor sistemului automat are forma: $T_1T_2s^2 + T_1s + k_0k_1k_2 = 0$ şi pentru valorile numerice date se obțin: pulsația naturală $\omega_n = \sqrt{k_0k_1k_2 / T_1T_2} = 37 \text{rad/sec}$ şi factorul de amortizare: $\zeta = 1/(2T_2\omega_n) = 0{,}27$. Conform fig.VI.37 rezultă o suprareglare $\sigma\% = 40\%$ şi o durată a regimului tranzitoriu $t_s = 0{,}3$ sec., ceea ce este inacceptabil.

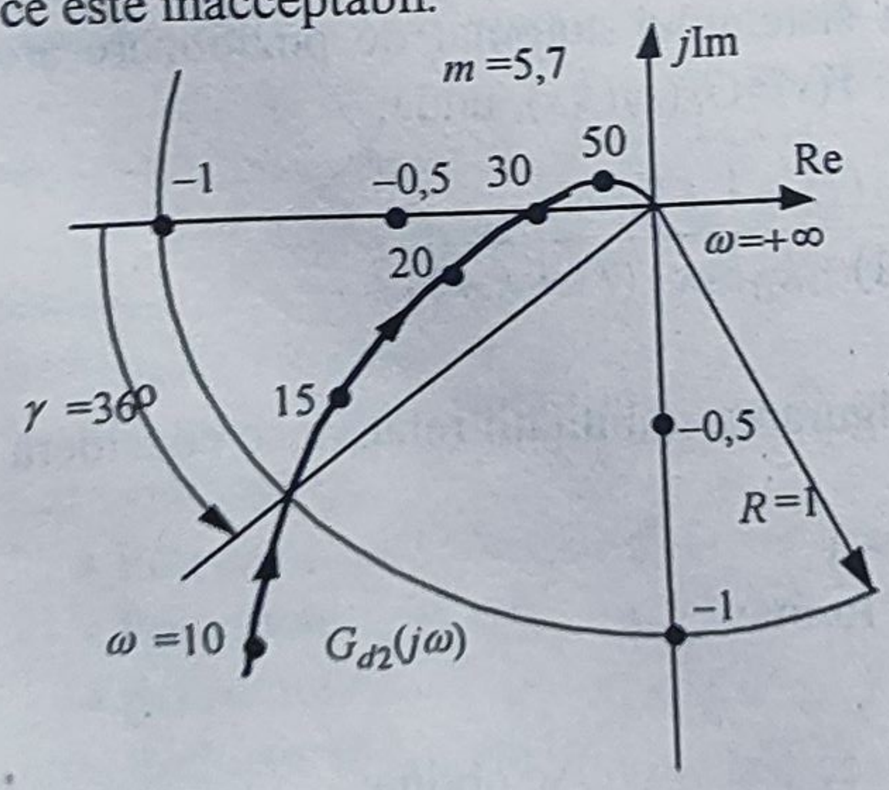


Fig.VI.39. Locul de transfer $G_{d2}(j\omega)$ (cazul regulatorului PDT_1)

2° Pentru $k > 0$ ($R_3 > 0$) regulatorul este de tip PDT_1 şi funcția de transfer a sistemului în circuit deschis are expresia: $G_{d2}(s) = k_1k_2G_{SM}(s)G_R(s) = G_{d1}(s)G_R(s)$. Locul de transfer corespunzător se obține cu

$$M_{d2}(\omega) = |G_{d2}(j\omega)| = M_{d1}(\omega)M_R(\omega)$$

$$\varphi_{d2}(\omega) = \arg G_{d2}(j\omega) = \varphi_{d1}(\omega) + \varphi_R(\omega)$$

în care:

$$M_R(\omega) = |G_R(j\omega)| = k_0 \Big/ \sqrt{k^2T^2\omega^2 + (k+1)^2}$$

$$\varphi_R(\omega) = \arg G_R(j\omega) = -\text{arctg}[(k+1)/kT\omega]$$

definesc locul de transfer al regulatorului (fig.VI.38).

Locul de transfer $G_{d2}(j\omega)$ se obține prin compunerea locurilor de transfer $G_{d1}(j\omega)$ şi $G_R(j\omega)$.

Este uşor de observat că efectul regulatorului constă într-o rotire, în domeniul frecvenţelor medii, în sens negativ, a locului $G_{d1}(j\omega)$ – fig.VI.37, ceea ce este favorabil realizării valorilor recomandate ale indicilor stabilităţii relative. Într-adevăr, pentru $k_0 = 40$, $k = 3$ şi $T = 0{,}05$ sec. (la care se ajunge prin câteva încercări) şi conform tabelului:

ω	0	5	10	15	20	30	50	100	$+\infty$
M_R	160	155	144	130	117	94	63	50	40
φ_R	0°	−10°	−19°	−27°	−31°	−35°	−35°	−27°	0°
M_{d2}	$+\infty$	3	1,3	0,69	0,42	0,175	0,0465	0,0098	0
φ_{d2}	−90°	−114°	−136°	−154°	−166°	−181°	−193°	−196°	−180°

locul de transfer al sistemului în circuit deschis are forma din fig.VI.39. În acest caz se obţin: $m = 5{,}7$ şi $\gamma = 36°$, ceea ce reprezintă o stabilitate relativă satisfăcătoare.

Ca observaţie finală trebuie reţinut faptul că rezultatul s-a obţinut prin tatonări bazate pe modificările posibile ale locului de transfer ale sistemului în circuit deschis, dar fără un suport director şi cantitativ pentru realizarea respectivelor modificări. Se va vedea la punctul *e* că utilizarea diagramei Bode permite o rezolvare expeditivă atât a alegerii tipului de regulator cât şi a determinării parametrilor săi.

c. Sisteme cu timp mort

Există situaţii, cum ar fi reglarea automată a temperaturii cuptoarelor industriale sau reglarea presiunii pe conducte de transport de fluide, în care partea fixată respectiv instalaţia automatizată (8 respectiv 1 în fig.III.14) conţine un element cu timp mort, caracterizat printr-un factor e^{-Ts}, $T > 0$. În astfel de cazuri funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis are forma:

$$G_d(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} e^{-Ts}, \tag{4.18}$$

în care $Q(s)$ şi $P(s)$ au semnificaţia de la (4.13). Aceasta înseamnă că funcţia $F(s)$ (definită prin (4.15)) - numitorul funcţiei de transfer a sistemului în circuit închis (relaţia (4.14)) are acum expresia:

$$F(s) = 1 + G_d(s) = \frac{P(s) + Q(s)e^{-Ts}}{P(s)}. \tag{4.19}$$

Spre deosebire de cazul sistemelor fără timp mort, numărătorul din (4.19) nu mai este un polinom, ci o funcţie transcedentă. Această funcţie are o infinitate de zerouri. Dintre acestea numai un număr finit sunt situate în $\{\text{Re}s \geq 0\}$. Aceasta deoarece, pentru $\text{Re}s \geq 0$, $\lim_{s\to\infty} G_d(s) = 0$, adică zerourile lui $F(s)$ în $\text{Re}s \geq 0$ se află într-o anumită vecinătate a originii. Conform unui rezultat din teoria funcţiilor, $F(s)$ poate avea într-un domeniu finit cel mult un număr finit de zerouri.

De asemenea $F(s)$ are în $\text{Re}\, s \geq 0$ cel mult un număr finit de poli (zerourile lui $P(s)$).

În aceste circumstanţe este evident că funcţiei $F(s)$ i se poate aplica principiul argumentului în scopul obţinerii unor rezultate de BIBO stabilitate. Procedând ca la punctul a se poate formula următorul rezultat.

Teorema 8

Teoremele 5,6 şi 7 se aplică şi în cazul în care $G_d(s)$ este de forma (4.18).■

Exemplul 4.4

Se consideră un sistem automat cu $G_d(s) = ke^{-Ts}/s$, $k>0$, $T>0$. Se cere să se determine în planul parametrilor (k, T) domeniul de BIBO stabilitate.

Locul de transfer este descris de $G_d(j\omega) = ke^{-Tj\omega}/j\omega = -k(\sin T\omega + j\cos T\omega)/\omega$. Pentru valori k şi T adecvate, din punctul de vedere al stablităţii BIBO, se disting două tipuri de locuri de transfer – fig.VI.40: corespunzătoare stabilităţii (a) şi instabilităţii (b). Conform teoremei 8, respectiv teoremei 7 (*mutatis mutandis*) condiţia de stabilitate BIBO este:

$$\min_{\omega} \operatorname{Re} G_d(j\omega) = \min_{\omega}[-(k\sin(T\omega)/\omega] > -1$$

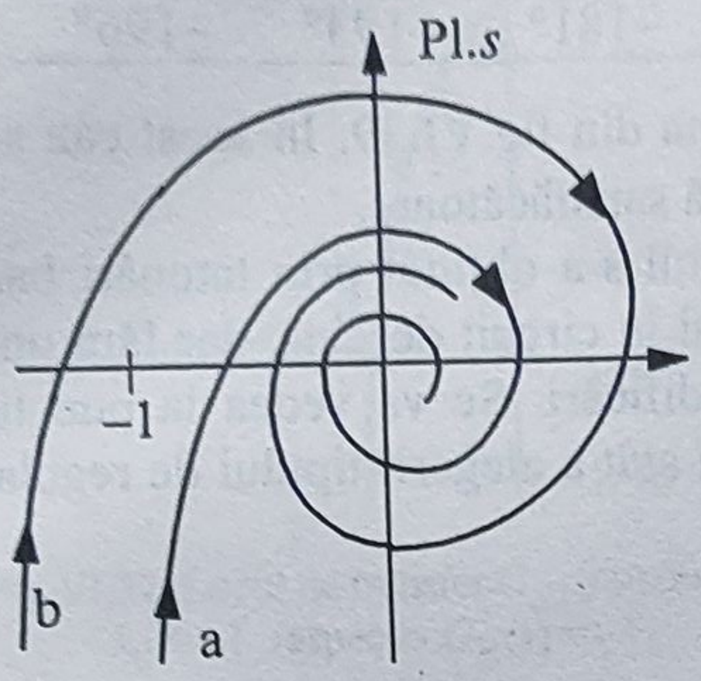


Fig.VI.40. Locul de transfer la exemplul 4.4;
a - BIBO stabilitate, b - BIBO instabilitate

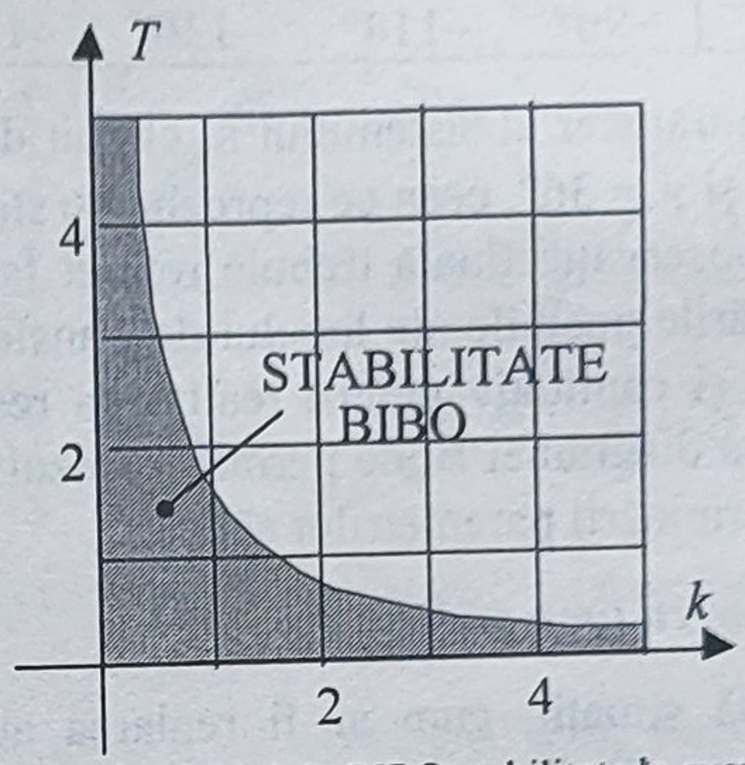


Fig.VI.41. Domeniul de BIBO stabilitate la exemplul 4.4

pentru ω determinat de $\operatorname{Im} G_d(j\omega) = -(k\cos T\omega)/\omega = 0$, $\omega > 0$. Din această ecuaţie rezultă $T\omega_i = (2i+1)\pi/2$, $i=0,1,2,\ldots$, ceea ce conduce la condiţia $\min[-2kT/((2i+1)\pi] > -1$. Soluţia acestei inecuaţii este $kT < \pi/2$ şi domeniul corespunzător de stabilitate BIBO este reprezentat în fig.VI.41.■

d. Factorul de amplificare ca parametru

Pentru a pune în evidenţă factorul de amplificare k al sistemului în circuit deschis, se înlocuieşte $G_d(s)$ (definit prin (4.13) sau (4.18)) cu $kG_d(s)$, în care k este un parametru. În această situaţie relaţia (4.15) devine:

$$F(s) = 1 + kG_d(s) = k(k^{-1} + G_d(s)).$$

Este evident că teorema 5 rămâne valabilă şi în acest caz. În schimb teoremele 6,7 şi 8 trebuie reformulate deoarece acum punctul critic este $-k^{-1} + j0$.

Teorema 9

Sistemul automat cu structura din fig.VI.30 în care $G_d(s)$ s-a înlocuit cu $kG_d(s)$, este BIBO stabil dacă şi numai dacă locul de transfer $G_d(j\omega)$ înconjoară punctul $-k^{-1} + j0$, în sens pozitiv, de un număr de $n_+ + n_0/2$ ori atunci când ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$.■

Teorema 10

Sistemul automat cu structura din fig.VI.30 în care $G_d(s)$ s-a înlocuit cu $kG_d(s)$ şi $G_d(s)$ are cel mult doi poli în originea planului s şi restul de poli sunt toţi situaţi în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$, este BIBO stabil dacă şi numai dacă punctul $-k^{-1} + j0$ este situat la stânga şi în afara locului de transfer $G_d(j\omega)$ atunci când acesta este parcurs pentru ω luând valori de la $-\infty$ la $+\infty$.■

Teorema 11

Teoremele 9 şi 10 se aplică şi în cazul în care $G_d(s)$ este de forma (4.18).■

e. Utilizarea diagramei Bode

După cum s-a arătat la 2.2, diagrama Bode poate fi aproximată, de regulă, prin segmente de dreaptă. Se va arăta în continuare că utilizarea diagramei Bode este foarte avantajoasă atât în analiza stabilității BIBO cât şi , mai ales, în proiectarea sistemelor automate BIBO stabile.

În cele ce urmează se au în vedere sistemele automate a căror funcție de transfer în circuit deschis este de forma:

$$G_d(s) = \frac{k}{s^\alpha} \frac{b_m s^m + \ldots + 1}{a_n s^n + \ldots + 1} e^{-Ts}, \tag{4.20}$$

în care $k > 0$, $\alpha = 0,1,2$, $m < n + \alpha$, $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $b_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, $T \geq 0$ şi polinoamele $a_n s^n + \ldots + 1$ şi $b_m s^m + \ldots + 1$ sunt relativ prime între ele.

Întrucât în majoritatea situațiilor care intervin în aplicații teorema 7, cu extinderea corespunzătoare de la teorema 8, este îndeplinită, se va formula un rezultat de stabilitate BIBO în cazul în care polinomul $a_n s^n + \ldots + 1$ este hurwitzian.

Cele două situații posibile – stabilitate şi instabilitate BIBO – sunt ilustrate în fig.VI.42. Pulsația ω_t, la care locul de transfer $G_d(j\omega)$ taie cercul de rază unitate, respectiv la care atenuarea $A_d(\omega)$ taie axa de 0dB se numeşte *pulsația de tăiere* a sistemului în circuit deschis. În conformitate cu teorema 7, cu extinderea corespunzătoare de la teorema 8, se poate enunța următorul rezultat.

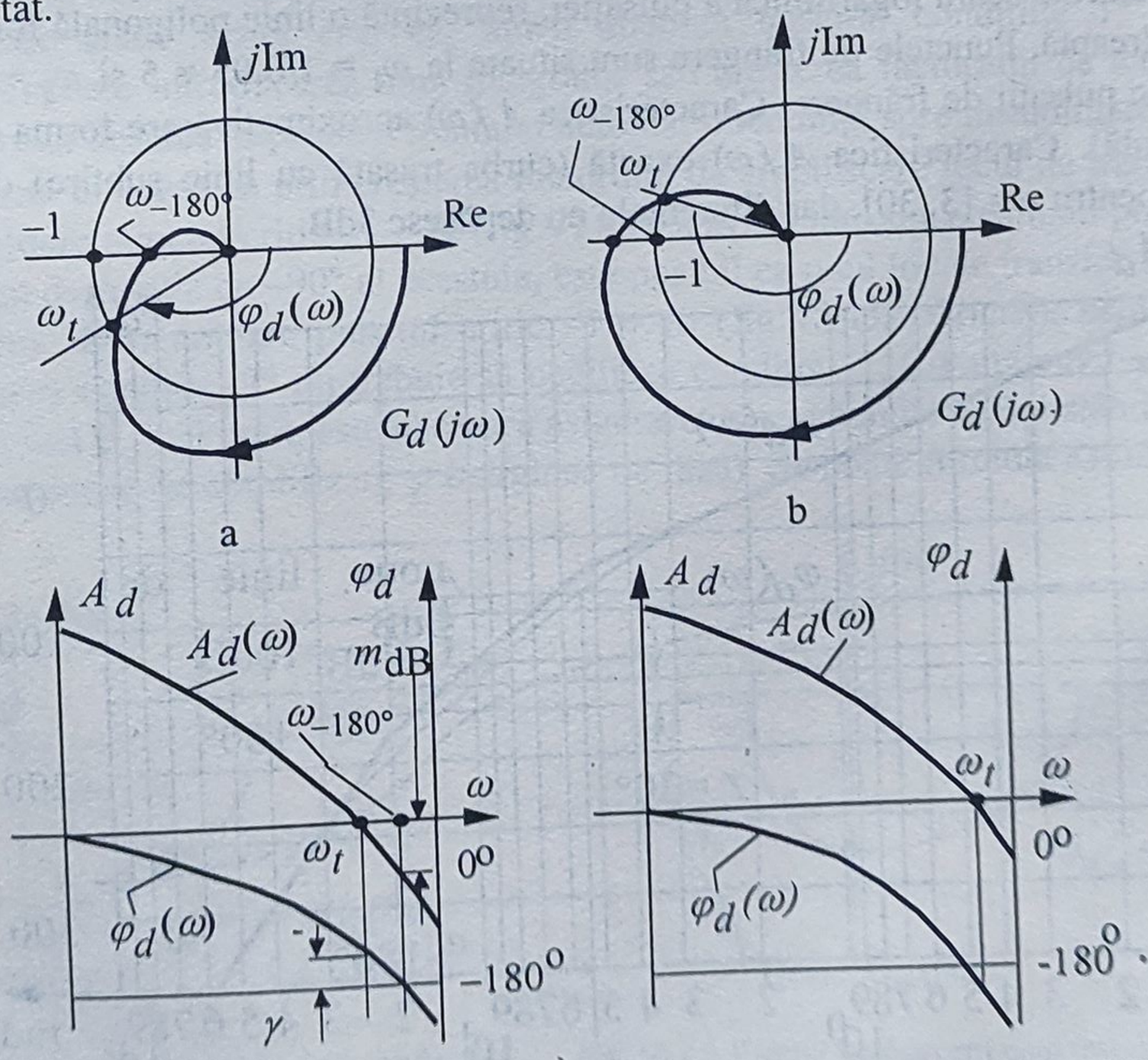


Fig.VI.42. Legătura dintre locul de transfer şi diagrama Bode; a– stabilitate BIBO, b– instabilitate BIBO

Teorema 12

Sistemul automat cu structura din fig.VI.30, în care $G_d(s)$ este de formă (4.13) şi definit prin (4.20) şi cu polinomul $a_n s^n+\ldots+1$ hurwitzian, este BIBO stabil dacă şi numai dacă la pulsaţia de tăiere, ω_t, caracteristica fază – pulsaţie se află deasupra liniei corespunzătoare lui – 180°.■

Determinarea stabilităţii relative cu ajutorul diagramei Bode este foarte simplă şi ea constă în a măsura $A_d(\omega_{-180°})$, în care $\omega_{-180°}$ este definită prin $\varphi_d(\omega_{-180°}) = -180°$, şi apoi $\varphi_d(\omega_t)$. Marginea de amplificare, exprimată în dB, este $m_{dB} = -A_d(\omega_{-180°})$, iar marginea de fază este $\gamma = \varphi_d(\omega_t) - (-180°)$. Valorile recomandate sunt: $m_{dB} = 10 \div 20$dB şi $\gamma = 30° \div 50°$.

Exemplul 4.5

Se consideră sistemul automat cu $G_d(s) = k/[s(0,05s+1)(0,2s+1)]$, $k>0$. Să se determine valorile lui k pentru care sistemul automat este BIBO stabil.

Întrucât k este necunoscut se trasează caracteristica atenuare – frecvenţă pentru $k = 1$. Conform definiţiei (2.4) se scrie:

$$A_d(\omega) = -20\lg\omega - 20\lg\sqrt{(0,05\omega)^2+1} - 20\lg\sqrt{(0,2\omega)^2+1},\ \omega>0.$$

Se observă că $A_d(\omega)$ poate fi aproximată după cum urmează:

$$A_d(\omega) = \begin{cases} -20\lg\omega & ,0<\omega<5 \\ -20\lg\omega - 20\lg(0,2\omega) & ,5\le\omega\le 20 \\ -20\lg\omega - 20\lg(0,2\omega) - 20\lg(0,05\omega) & ,20\le\omega\le+\infty. \end{cases}$$

Aceasta, pentru o scară logaritmică a pulsaţiei, reprezintă o linie poligonală formată din trei segmente de dreaptă. Punctele de frângere sunt situate la $\omega_1 = 1/0,05 = 5$ şi $\omega_2 = 1/0,05 = 20$, care se numesc pulsaţii de frângere. Caracteristica $A_d(\omega)$ aproximativă are forma din fig.VI.43 (linia poligonală). Caracteristica $A_d(\omega)$ exactă (curba trasată cu linie subţire) diferă de cea aproximativă pentru $\omega\in$ [3, 30], dar diferenţele nu depăşesc 3dB.

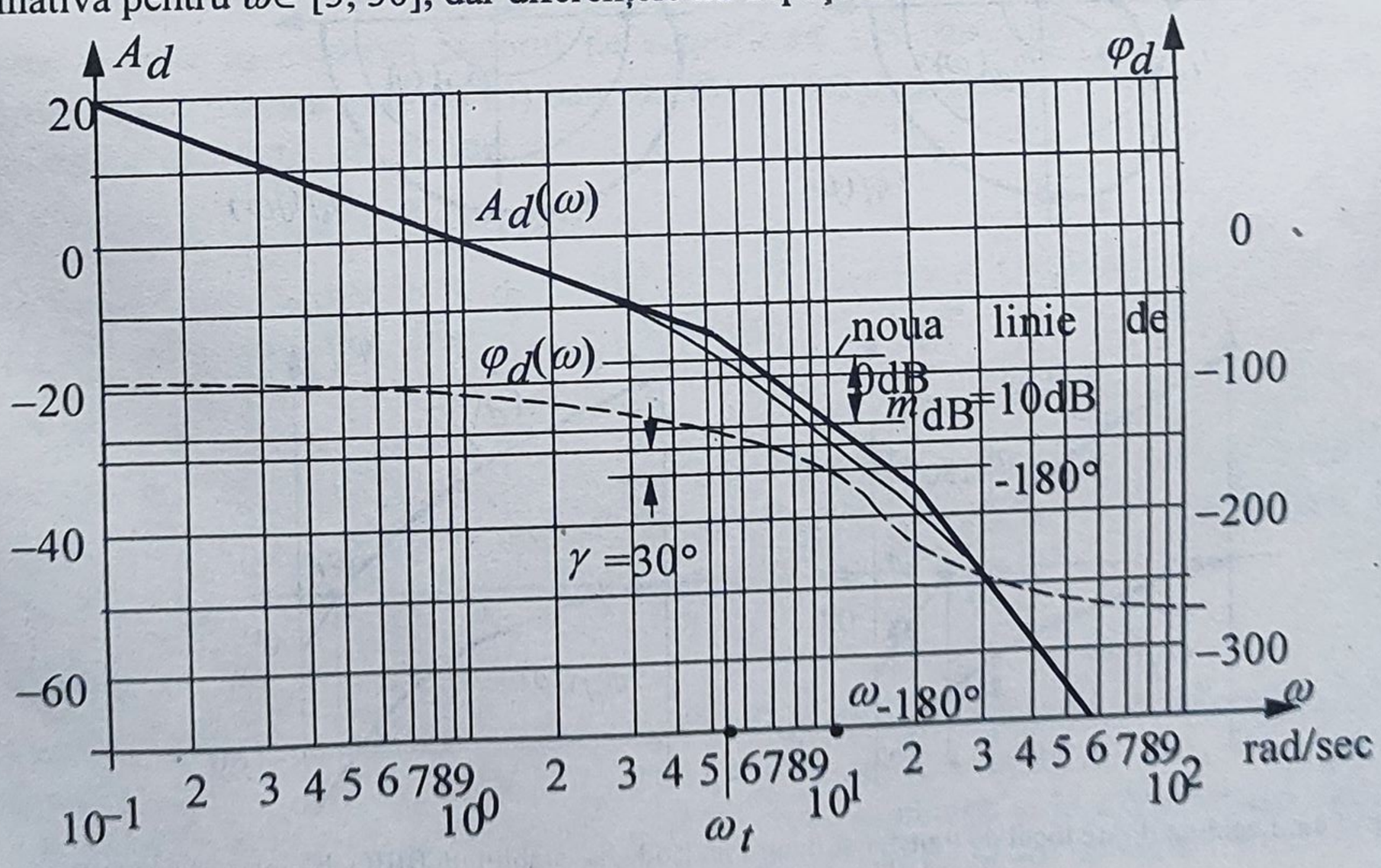


Fig. VI.43. Diagrama Bode la exemplul 4.5

Caracteristica $\varphi_d(\omega)$, conform definiției (2.5), are expresia: $\varphi_d(\omega)=-90°-\text{arctg}(0{,}2\omega)-\text{arctg}(0{,}05\omega)$ şi este trasată cu linie întreruptă în fig.VI.43.

Pentru a-l determina pe k se porneşte de la observația că pentru $k \neq 1$ linia de 0dB va avea în fig.VI.43 o altă poziție şi anume $-20\lg k$. Pentru a asigura stabilitatea BIBO, conform teoremei 12, noua linie de 0dB nu poate coborî mai jos de nivelul limită $L_{dB} = -27{,}5\text{dB}$. Aşadar, $k_{dB} = 20\lg k < 27{,}5\text{dB}$, ceea ce înseamnă $0 < k < 12{,}37$. Pentru a obține o margine de amplificare de 10dB, noua linie de 0dB se coboară numai până la $-17{,}5$dB, ceea ce înseamnă $k_{dB} = 17{,}5\text{dB}$, respectiv $k = 7{,}5$. În acest caz $\omega_t = 5{,}25$ rad/sec şi $\gamma = 30°$.■

4.3. Corecția sistemelor automate

a. Condiții impuse sistemului automat

Termenul <<corecție>> este tradițional în cadrul metodei frecvențiale şi se referă la stabilizarea unui sistem automat în sensul arătat la 4.2.b.

Pentru realizarea efectivă a corecției unui sistem automat este necesară formularea celor patru condiții de bază pe care acesta trebuie să le satisfacă:

1° Sistemul automat trebuie să fie BIBO stabil în raport cu mărimea prescrisă şi cu perturbația.

2° Sistemul automat trebuie să asigure o anumită exactitate în regim staționar.

Aceasta înseamnă că în regim staționar eroarea $e = y_p - y$ (a se vedea subcap.II.5) trebuie să fie nulă sau satisfăcător de mică. S-a arătat la II.5.2 că eroarea staționară este nulă dacă funcția de transfer a căii directe are poli în origine (elemente integratoare în regulator sau în partea fixată, dar pe calea directă a sistemului automat) şi respectiv satisfăcător de mică dacă, în lipsa polilor în origine, factorul de amplificare al sistemului în circuit deschis este suficient de mare.

Problema care apare acum este că, într-o anumită măsură, condițiile 1° şi 2° sunt contradictorii deoarece introducerea unui integrator sau creşterea factorului de amplificare al sistemului în circuit deschis imprimă sistemului automat o tendință spre instabilitate. Explicația acestui fapt constă în aceea că prin creşterea factorului de amplificare locul de transfer $G_d(j\omega)$ ajunge să înconjoare punctul critic $-1 + j0$ (fig.VI.44), iar prin introducerea unui pol în origine, datorită efectului de rotație cu $-90°$ al acestuia, este posibil ca noul loc de transfer al sistemului în circuit deschis să înconjoare punctul critic $-1 + j0$ (fig.VI.45). Oricum, soluția adoptată pentru satisfacerea condiției 2° nu trebuie să neglijeze condiția 1°. Cu alte cuvinte stabilitatea BIBO este esențială şi, mai mult, este necesară asigurarea unei anumite BIBO stabilități relative (definită prin marginea de amplificare şi marginea de fază). Se poate formula astfel următoarea condiție.

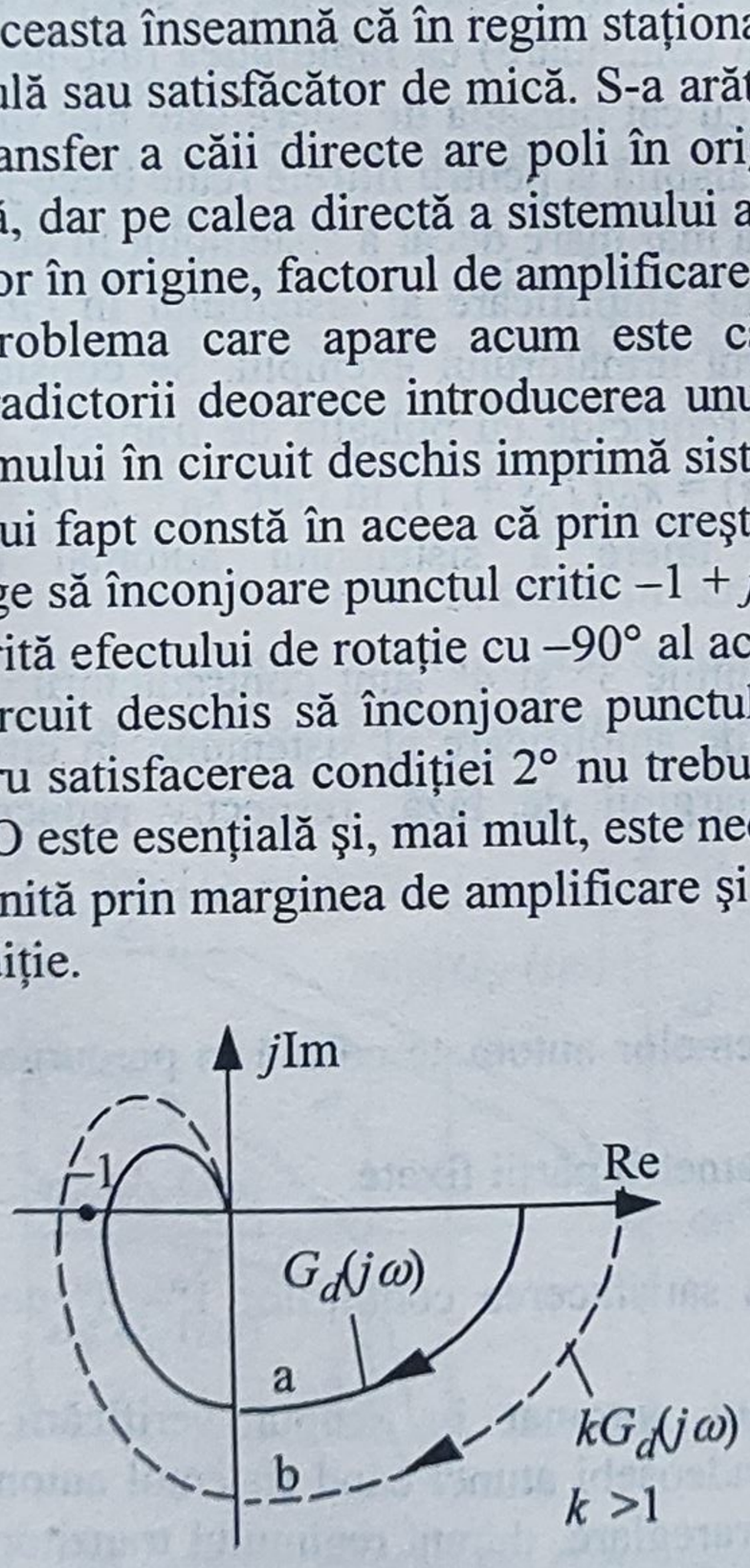


Fig.VI.44. Efectul creşterii factorului de amplificare k asupra stabilității BIBO; a– stabilitate BIBO, b– instabilitate BIBO

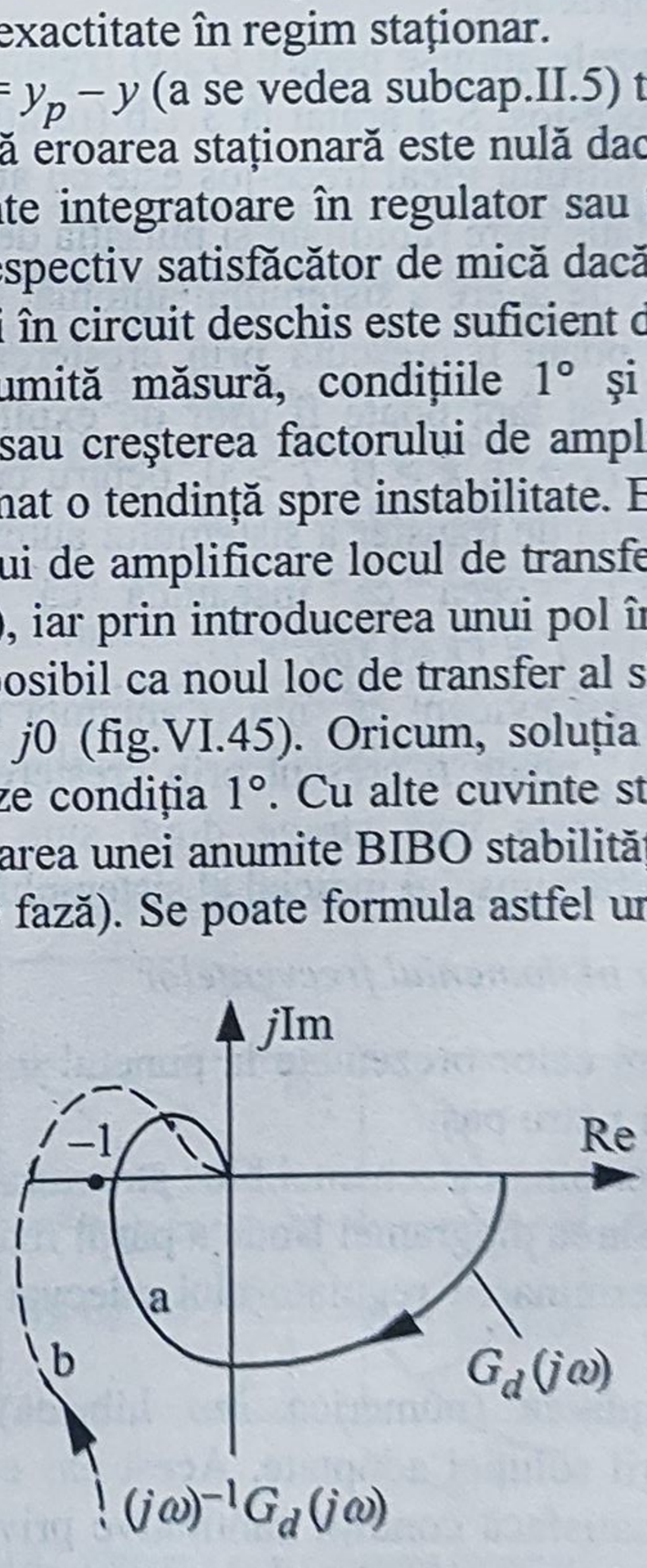


Fig. VI.45. Efectul introducerii unui integrator pe calea directă asupra stabilității BIBO; a– stabilitate BIBO, b– instabilitate BIBO

3° Răspunsul indicial în raport cu mărimea prescrisă trebuie să fie suficient de amortizat.

Pentru satisfacerea acestei condiţii se ţine seama de valorile recomandate ale marginii de amplificare şi marginii de fază definite la sfârşitul secţiunii 4.2. În ipotezele admise pentru $G_d(s)$ (relaţia (4.20)) se poate arăta că dacă la pulsaţia de tăiere ω_t panta caracteristicii $A_d(\omega)$, pe un domeniu suficient de larg de pulsaţii, este mai mică sau egală cu –20dB/decadă, atunci, pentru o valoare admisibilă a marginii de fază, rezultă şi o valoare admisibilă şi pentru marginea de amplificare (exemplul 4.5, fig.VI.43). În atare situaţie se poate folosi ca măsură a BIBO stabilităţii relative, respectiv a unei amortizări satisfăcătoare a răspunsului indicial, numai marginea de fază. Experienţa acumulată până în prezent arată că un răspuns indicial în raport cu mărimea prescrisă cu suprareglare acceptabilă şi suficient de bine amortizat se obţine pentru $\gamma = 50°\div70°$. Pentru ca răspunsul indicial în raport cu perturbaţia să fie acceptabil trebuie ca $\gamma > 30°$.

Satisfacerea condiţiilor 1° – 3° nu este suficientă pentru realizarea calităţilor impuse sistemului automat. La fel de importantă ca şi precedentele este şi următoarea condiţie.

4° Sistemul automat trebuie să răspundă suficient de rapid atât la variaţia mărimii prescrise cât şi la variaţia perturbaţiei.

Un sistem automat are un răspuns rapid numai dacă sistemul în circuit deschis are şi el această proprietate.

În ipotezele admise pentru $G_d(s)$ (relaţia (4.20)), sistemul în circuit deschis se comportă ca un filtru trece-jos. S-a arătat la 3.1.b (relaţia (3.25) şi în continuare) că rapiditatea răspunsului indicial al filtrului ideal trece-jos este cu atât mai mare cu cât pulsaţia de tăiere este mai mare. Această relaţie între rapiditate şi pulsaţia de tăiere este valabilă şi pentru filtrele reale trece-jos.

Pulsaţia de tăiere a sistemului automat este de regulă mai mare decât a sistemului în circuit deschis şi poate fi crescută prin creşterea factorului de amplificare al sistemului în circuit deschis. Acest fapt poate fi uşor de explicat cu ajutorul următorului exemplu. Se consideră $G_d(s) = k/(Ts+1)$, $k > 0$, $T > 0$, pentru care $\omega_t = 1/T$ (coincide cu pulsaţia de frângere, fig. VI.6). Funcţia de transfer a sistemului automat este $G_0(s) = k_0/(T_0 s + 1)$, în care $k_0 = k/(k+1)$, $T_0 = T/(k+1)$, ceea ce înseamnă că pulsaţia de tăiere a sistemului automat este $\omega_{t0} = (k+1)/T = (k+1)\omega_t > \omega_t$.

Este acum evident că, într-o anumită măsură, condiţiile 3° şi 4° sunt contradictorii. S-a văzut că ω_{t0} poate fi crescut prin creşterea factorului de amplificare al sistemului în circuit deschis. Aceasta însă atrage după sine reducerea marginii de fază, respectiv reducerea amortizării răspunsului indicial al sistemului automat.

b. Corecţia în domeniul frecvenţelor

Conform celor prezentate la punctul *a*, corecţia sistemelor automate constă în parcurgerea următorilor patru paşi:

1° Determinarea schemei bloc structurale cu toţi parametrii părţii fixate.

2° Trasarea diagramei Bode a părţii fixate.

3° Determinarea regulatorului adecvat care asigură satisfacerea condiţiilor 1°– 4° de la punctul *a*.

4° Simularea (numerică sau hibridă) a sistemului automat în scopul verificării şi îmbunătăţirii soluţiei adoptate. Acest pas este necesar îndeosebi atunci când sistemul automat trebuie să satisfacă condiţii cantitative privitoare la suprareglare, durata regimului tranzitoriu, durata de creştere şi precizia în regim staţionar.

În continuare se vor prezenta detalii privitoare la pasul 3° în care se realizează corecţia sistemului automat.

Utilizarea diagramei Bode în scopul corecţiei unui sistem automat constă în aplicarea următoarelor procedee.

1° Coborârea caracteristicii $A_d(\omega)$ - fig.VI.46.

Prin aceasta pulsaţia de tăiere se deplasează spre stânga, ceea ce asigură o creştere a marginii de fază. Totodată este posibil ca sistemul să devină prea lent.

2° Ridicarea caracteristicii $\varphi_d(\omega)$ - fig.VI.47.

Prin aceasta este posibilă creşterea marginii de fază cu menţinerea aproximativ constantă a pulsaţiei de tăiere.

3° Combinarea procedeelor 1° şi 2°.

Se va arăta în continuare că utilizând:

- un regulator PI, cu funcţia de transfer:

$$G_R(s) = k_r\,(1+\tau_1 s)/s,\ k_r > 0,\ \tau_1 > 0, \tag{4.21}$$

se aplică procedeul 1°;

- un regulator PD real, cu funcţia de transfer:

$$G_R(s) = k_r\,(1+\tau_2 s)/(1+\tau_0 s),\ k_r > 0, \tau_2 >> \tau_0 \geq 0, \tag{4.22}$$

se aplică procedeul 2°;

- un regulator PID real, cu funcţia de transfer:

$$G_R(s) = k_r\,(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)/[s(1+\tau_0 s)], k_r > 0, \tau_1 \geq \tau_2 >> \tau_0 \geq 0, \tag{4.23}$$

se aplică procedeul 3°.

Diagrama Bode a regulatorului PI (rel. (4.21)) este reprezentată în fig.VI.48. În mod obişnuit τ_1 se ia egal cu cea mai mare constantă de timp T_1 a părţii fixate. Se elimină astfel prin compensare (matematic - simplificare) efectul factorului $T_1 s + 1$ de la numitorul funcţiei de transfer a părţii fixate $G_F(s) = G_E(s)G_{IA}(s)G_t(s)$ (a se vedea fig.III.14, III.16 şi rel. (III.2.4.)). Acest fapt este avantajos deoarece factorul $T_1 s + 1$ produce o scădere a fazei cu până la 90°. Compensarea efectului factorului $T_1 s + 1$ este echivalentă cu o ridicare a caracteristicii fază - pulsaţie. Ea este cu atât mai eficientă cu cât T_1 este mai mare şi are o influenţă favorabilă în zona pulsaţiei de tăiere. În cazul în care $G_F(s)$ are mai multe constante de timp mari, de valori apropiate, se adoptă $\tau_1 > T_1$. Astfel scăderea rapidă a fazei datorită factorilor $(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$... de la numitorul lui $G_F(s)$ este mai bine compensată prin factorul $\tau_1 s + 1$ de la numărătorul lui $G_R(s)$.

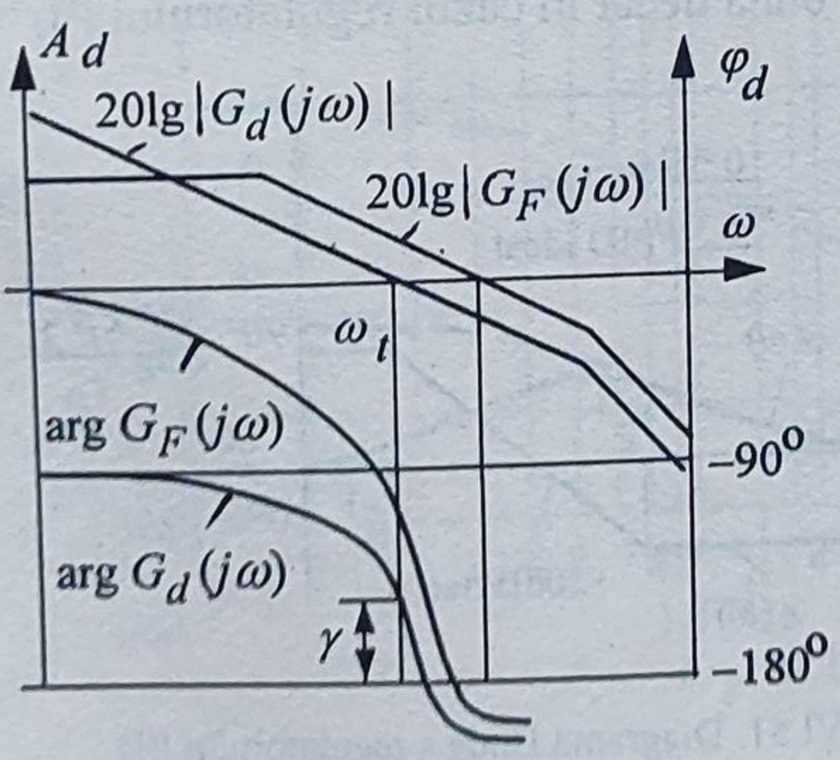


Fig.VI.46. Corecţia prin coborârea caracteristicii A_d; G_F - funcţia de transfer a părţii fixate, G_d - funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis

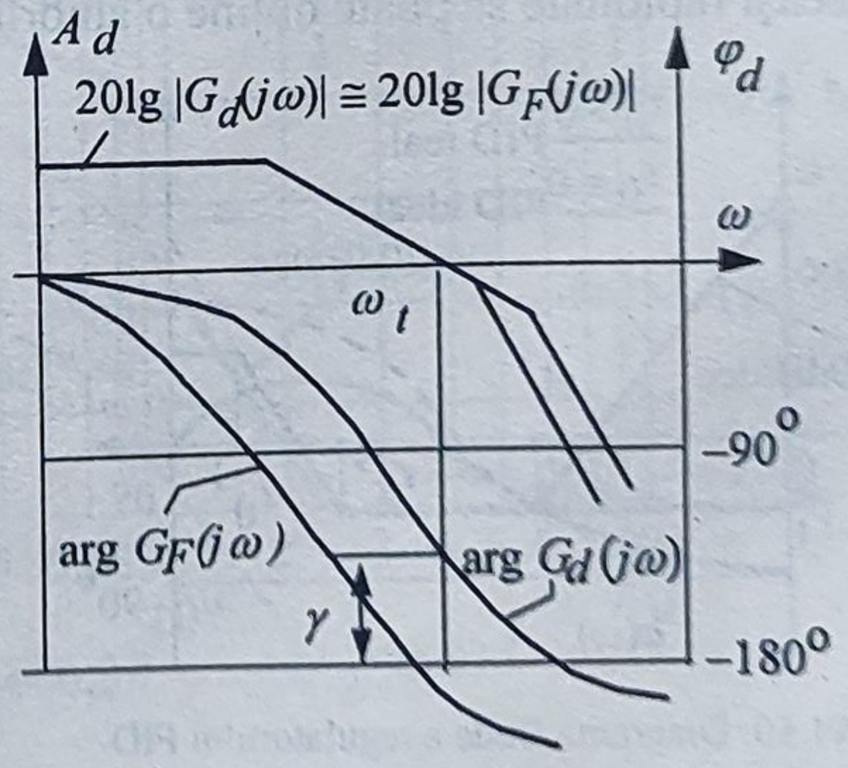


Fig.VI.47. Corecţia prin ridicarea caracteristicii φ_d; G_F - funcţia de transfer a părţii fixate, G_d - funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis

După ce s-a ales τ_1 se trasează caracteristica $A_d(\omega)$ (a sistemului în circuit deschis), pentru $k_r k_f = 1$, în care k_r este factorul de amplificare (necunoscut) al regulatorului şi k_f este factorul de amplificare (cunoscut) al părţii fixate, şi caracteristica $\varphi_d(\omega)$, fig.VI.49. Se trasează o dreaptă paralelă cu axa pulsaţiilor la valoarea $\gamma - 180°$, unde γ este marginea de fază impusă, şi se determină pulsaţia de tăiere ω_t, la care s-a produs intersecţia dintre respectiva dreaptă orizontală şi caracteristica $\varphi_d(\omega)$. ω_t este pulsaţia de tăiere a sistemului în circuit deschis, iar pentru determinarea lui $k_r k_f$ nu rămâne decât să se coboare linia de 0dB astfel încât aceasta să intersecteze caracteristica $A_d(\omega)$ exact la pulsaţia de tăiere ω_t - fig.VI.49. Caracteristica $A_d(\omega)$ are o porţiune, la frecvenţe joase, cu panta –20dB/decadă, determinată de factorul $k_r k_f / s$ din funcţia de transfer $G_d(s)$ a sistemului în circuit deschis. Pentru $\omega = 1$ se determină K_{ddB} pe caracteristica $A_d(\omega)$, fig.VI.49, şi apoi se calculează $\lg k_f k_r = K_{ddB}/20$, respectiv $k_f k_r$ şi în final k_r.

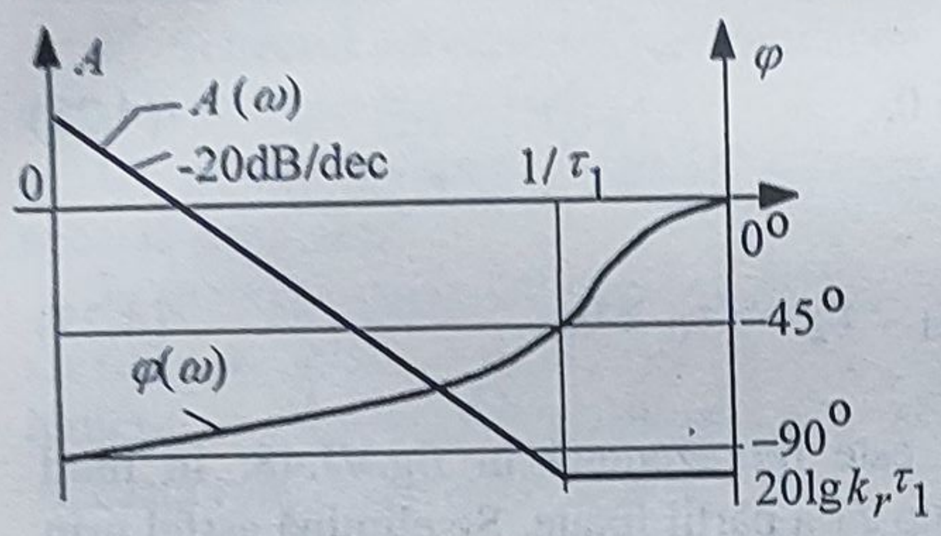


Fig.VI.48. Diagrama Bode a regulatorului PI

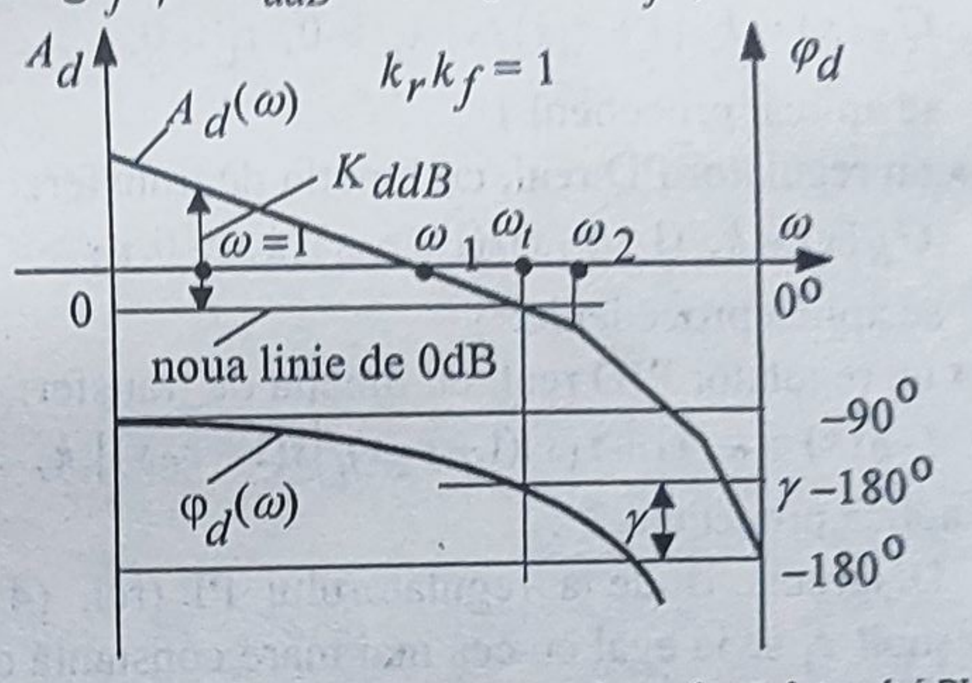


Fig.VI.49. Realizarea corecţiei cu ajutorul regulatorului PI

Diagrama Bode a regulatorului PID (rel. (4.23)) ideal ($\tau_0 = 0$) este reprezentată în fig.VI.50 (trasată cu linie întreruptă). Acest tip de regulator se deosebeşte de regulatorul PI prin prezenţa a încă unui factor (şi anume $1 + \tau_2 s$) în funcţia sa de transfer. Prin aceasta este posibilă o ridicare suplimentară a caracteristicii $\varphi_d(\omega)$. Aceasta înseamnă că pentru o aceeaşi margine de fază, respectiv aceeaşi amortizare, este posibilă o plasare mult mai la dreapta a pulsaţiei de tăiere, comparativ cu ceea ce este posibil cu un regulator PI. De asemenea este posibil ca la o menţinere neschimbată a pulsaţiei de tăiere să se crească marginea de fază, ceea ce înseamnă că la o aceeaşi rapiditate se poate obţine o amortizare mai bună decât în cazul regulatorului PI.

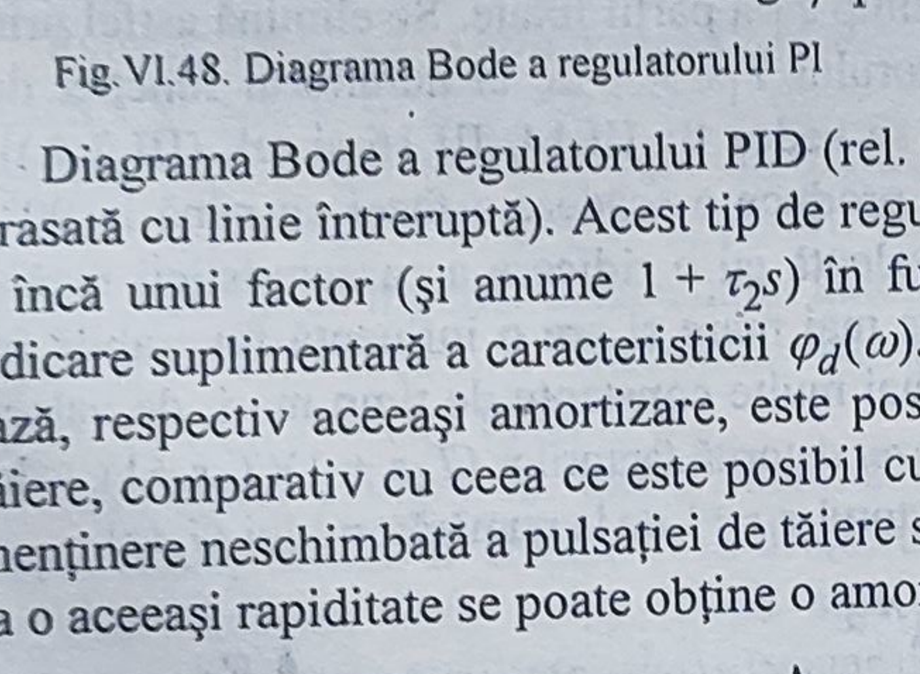


Fig.VI.50. Diagrama Bode a regulatorului PID

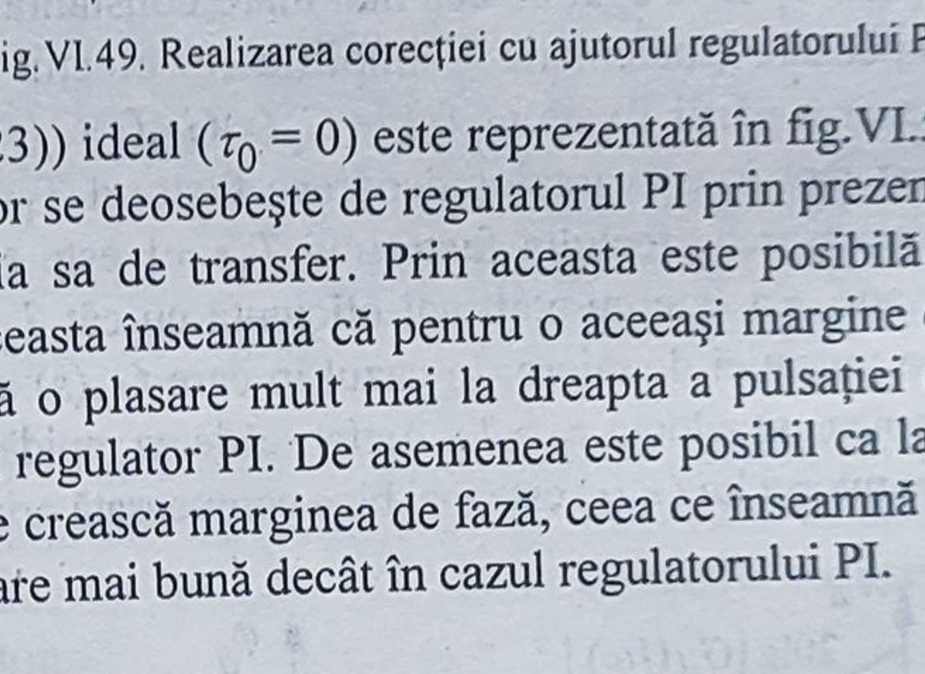


Fig.VI.51. Diagrama Bode a regulatorului PD

Diagrama Bode a regulatorului PID real (rel. (4.23)) este reprezentată cu linie continuă în fig.VI.50. În mod obişnuit se adoptă $\tau_1 = T_1$ şi $\tau_2 = T_2$, unde T_1 şi T_2 sunt constantele de timp cele mai mari ale părţii fixate. În continuare se procedează ca şi în cazul regulatorului PI, adică

se trasează caracteristicile $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$ ale sistemului în circuit deschis, pentru $k_r k_f = 1$. În funcţie de marginea de fază γ impusă, se determină pulsaţia de tăiere ω_t şi apoi k_r. Constanta de timp τ_0, introdusă în mod sistematic de regulatorul PID real, are un efect nefavorabil asupra calităţilor sistemului automat. Pentru ca acest efect să fie cât mai redus, valoarea lui τ_0 trebuie să fie cât mai mică posibil (evident există o limită inferioară determinată de principiul de funcţionare şi de tehnologia de realizare a regulatorului).

Diagrama Bode a regulatorului PD (rel. (4.22)) (real şi ideal) este reprezentată în fig.VI.51. Se adoptă $\tau_2 = T_1$, unde T_1 este cea mai mare constantă de timp a părţii fixate şi k_r se alege astfel încât să se realizeze marginea de fază impusă.

Exemplul 4.6

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.III.16 (a se vedea şi fig.III.14) în care $G_F(s) = G_E(s)G_{IA}(s)G_t(s) = 0{,}1/[(25s + 1)(6s + 1)(1{,}2s + 1)]$. Se cere să se determine parametrii unui regulator PI şi apoi ai unui regulator PID astfel încât $\gamma = 40°$ şi $m_{dB} \geq 10$dB.

Funcţia de transfer a regulatorului PI are expresia (4.21). Se adoptă $\tau_1 = 25$ sec. În acest fel funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis este: $G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = k/[s(6s + 1)(1{,}2s + 1)]$, $k = 0{,}1k_r$. Pentru $k = 1$ diagrama Bode are forma din fig.VI.52. Se observă că sistemul automat este instabil. Pentru a se obţine un sistem automat BIBO stabil este necesară ridicarea liniei de 0dB. Pentru $\gamma = 40°$ rezultă $\omega_t = 0{,}12$ rad/sec. Noua linie de 0dB este mai sus cu $K_{dB} = 17$dB faţă de cea veche. Conform relaţiei $\lg k_f k_r = K_{dB}/20 = -17/20$ rezultă $\lg k_r = 0{,}15$, respectiv $k_r = 1{,}4$, şi $m_{dB} = 15$dB.

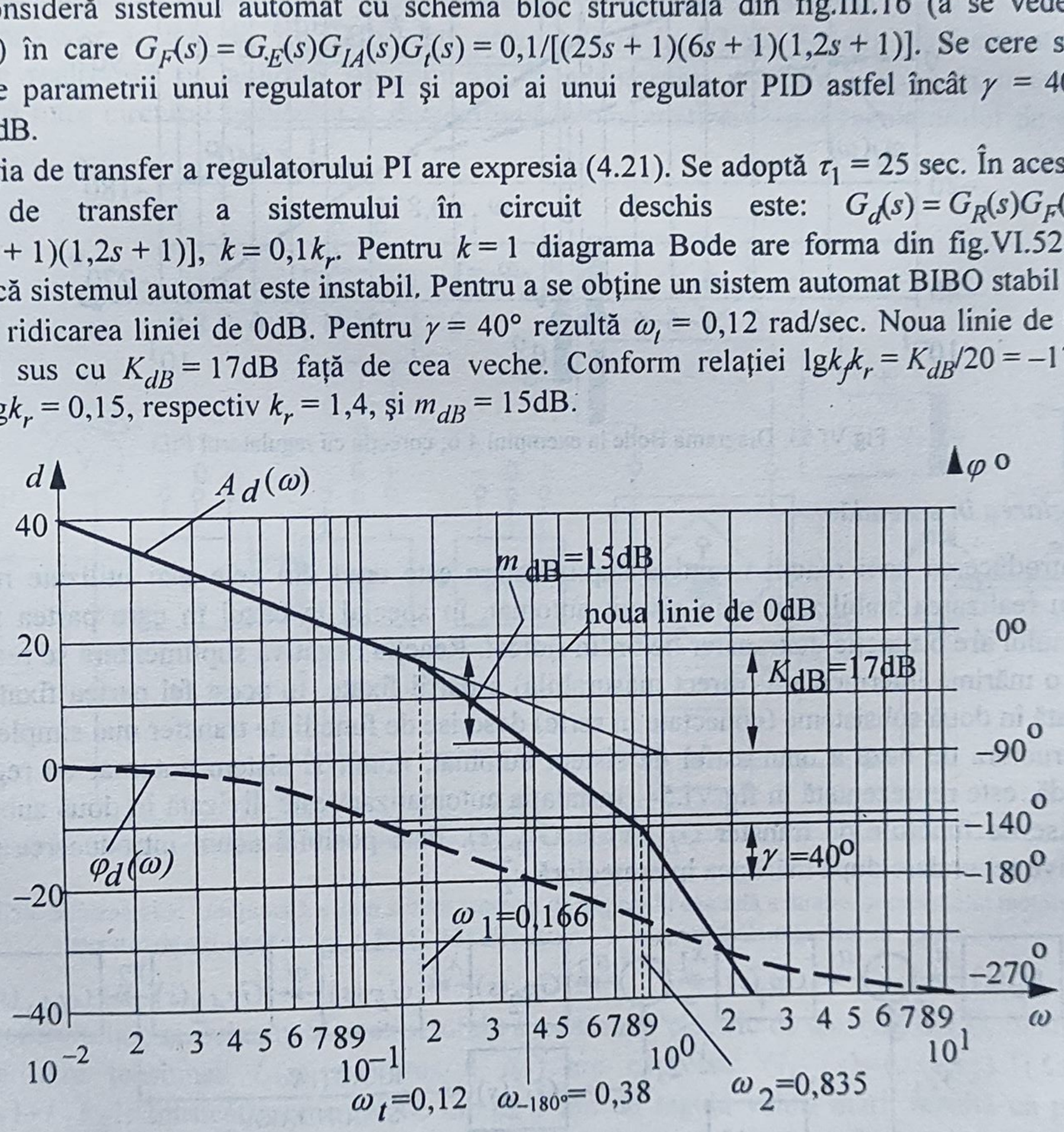


Fig.VI.52. Diagrama Bode la exemplul 4.6; corecţia cu regulator PI

Funcţia de transfer a regulatorului PID are expresia (4.23). Se adoptă $\tau_1 = 25$sec şi $\tau_2 = 6$sec. În aceste condiţii funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis este $G_d(s) =$

$=k/\,[s(1{,}2s+1)]$, $k = 0{,}1k_r$. Diagrama Bode, pentru $k = 1$, este reprezentată în fig.VI.53. Pentru $\gamma = 40°$ rezultă $\omega_t = 1$ rad/sec. Noua linei de 0dB este mai jos cu $K_{dB} = 3$dB față de cea veche. Conform relației $\lg k_f k_r = K_{dB}/20 = +3/20$ rezultă $\lg k_r = 1{,}15$, respectiv $k_r = 14$, și $m_{dB} = +\infty$.

Este evident că pentru o aceeași margine de fază ($\gamma = 40°$) regulatorul PID realizează o rapiditate mai mare ($\omega_t = 1$ rad/sec) a sistemului automat comparativ cu utilizarea regulatorului PI ($\omega_t = 0{,}12$ rad/sec).

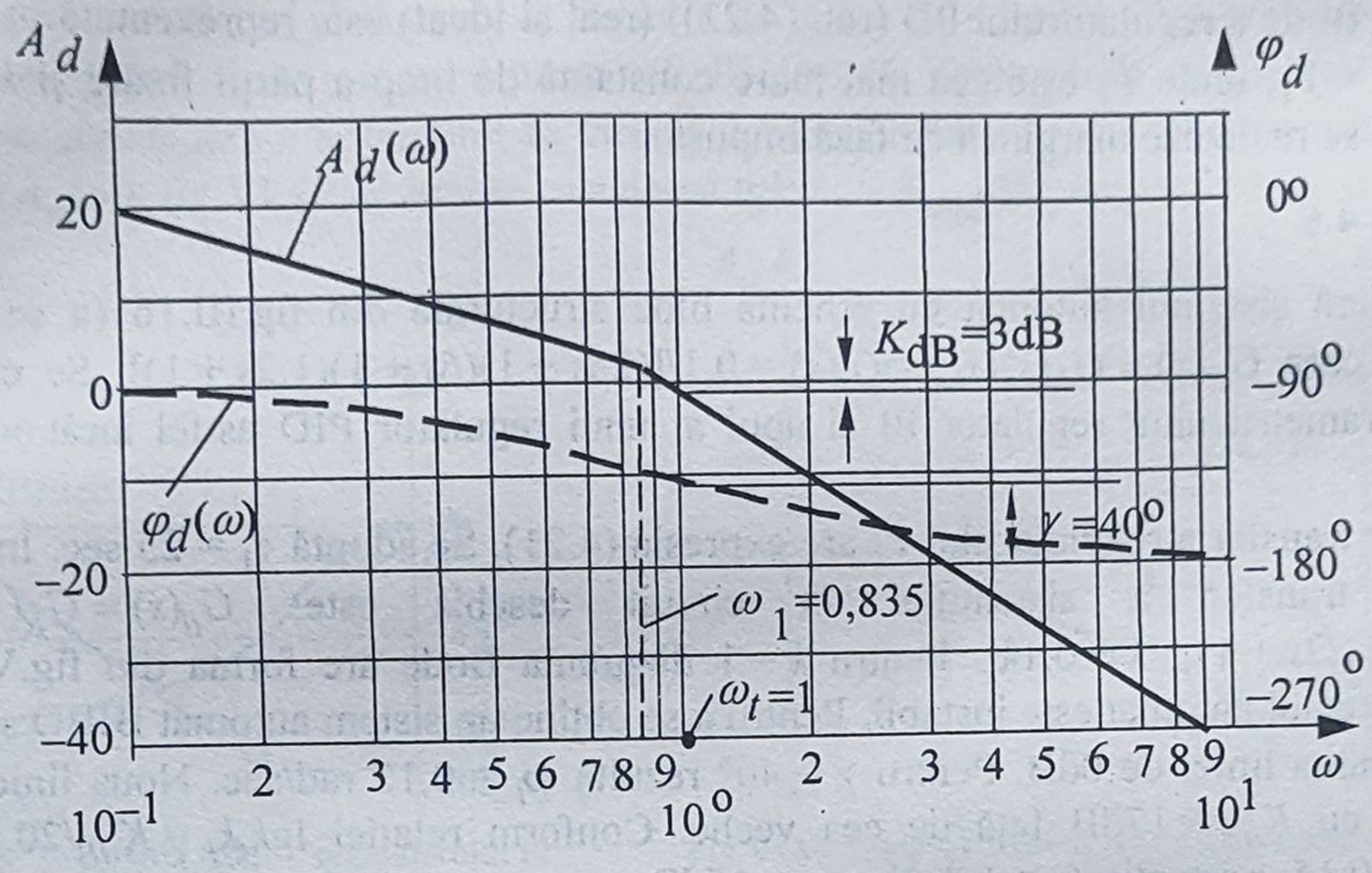


Fig.VI.53. Diagrama Bode la exemplul 4.6; corecția cu regulatorul PID

c. Reglarea în cascadă

Introducerea unei reacții negative suplimentare este unul din cele mai utilizate mijloace pentru realizarea stabilizării unui sistem automat, în special în cazul în care partea fixată a sistemului are o funcție de transfer de ordin ridicat. Reacția negativă suplimentară se realizează după o mărime intermediară (direct măsurabilă) a părții fixate. În acest fel partea fixată apare divizată în două subsisteme (conectate în serie) descrise de funcții de transfer mai simple.

Structura de bază a unui astfel de sistem automat, numit și sistem automat cu reglare în cascadă, este reprezentată în fig.VI.54. Instalația automatizată este divizată în două subsisteme descrise de funcțiile de transfer $G_{IA_1}(s)$ și $G_{IA_2}(s)$. Este posibilă acum introducerea reacției negative secundare după mărimea intermediară y_2.

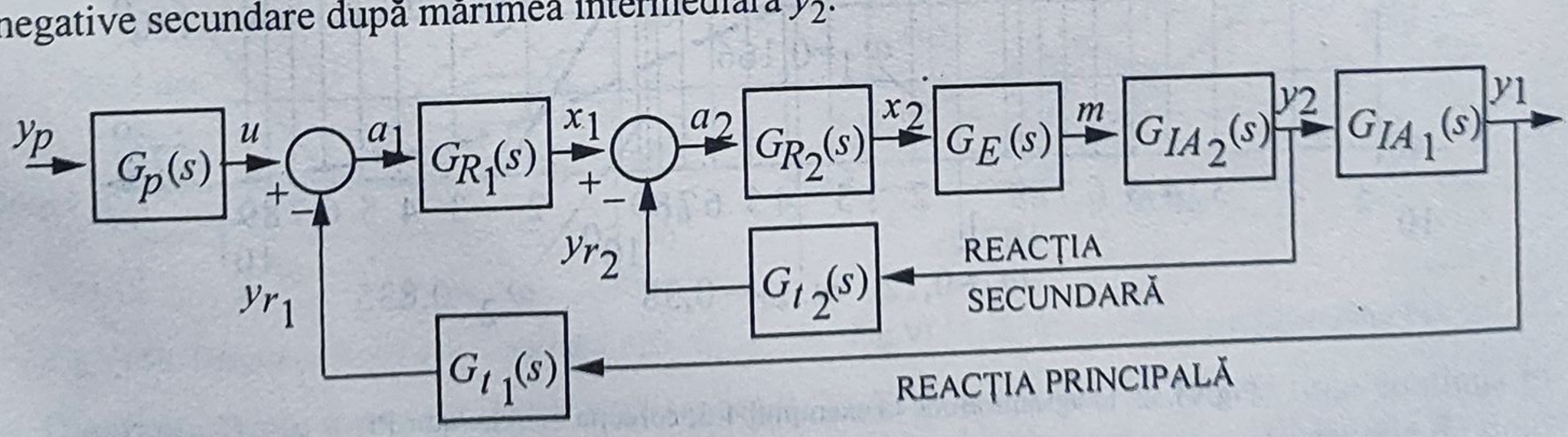


Fig.VI.54. Sistem automat de reglare în cascadă

Corecția sistemului automat se realizează în felul următor. Regulatorul $G_{R_2}(s)$ se alege astfel încât circuitul închis secundar să poată fi aproximat printr-o funcție de transfer de tipul PT_1. În general acest lucru este posibil utilizând un regulator PID. În aceste condiții pentru circuitul închis principal alegerea regulatorului $G_{R_1}(s)$ se face între tipurile P şi PI. O componentă D în regulatorul circuitului închis principal este mai puțin uzuală datorită faptului că o astfel de componentă face sistemul sensibil la perturbații aleatoare (zgomote). Pentru ambele regulatoare alegerea parametrilor se poate face prin procedeele de corecție în domeniul frecvențelor sau cu ajutorul metodei locului rădăcinilor. Prin faptul că partea fixată a sistemului a fost împărțită în două şi că folosind două regulatoare adecvate este posibilă compensarea a mai mult de două constante de timp din partea fixată, reglarea în cascadă poate asigura o stabilizare mult mai bună în comparație cu utilizarea unei singure reacții negative.

Un exemplu tipic de utilizare a reglării în cascadă îl constituie reglarea automată a turației unui motor electric de c.c. comandat pe indus. Cele două reacții sunt: reacția principală - după turație şi reacția secundară - după curentul prin indus. Schema bloc funcțională, corespunzătoare aceleia din fig.III.15, este prezentată în fig.VI.55. Reacția după curentul prin indus se realizează cu ajutorul şuntului SH, a adaptorului A (care asigură şi o separare galvanică între circuitul indusului şi dispozitivul de automatizare) şi a regulatorului de curent RC.

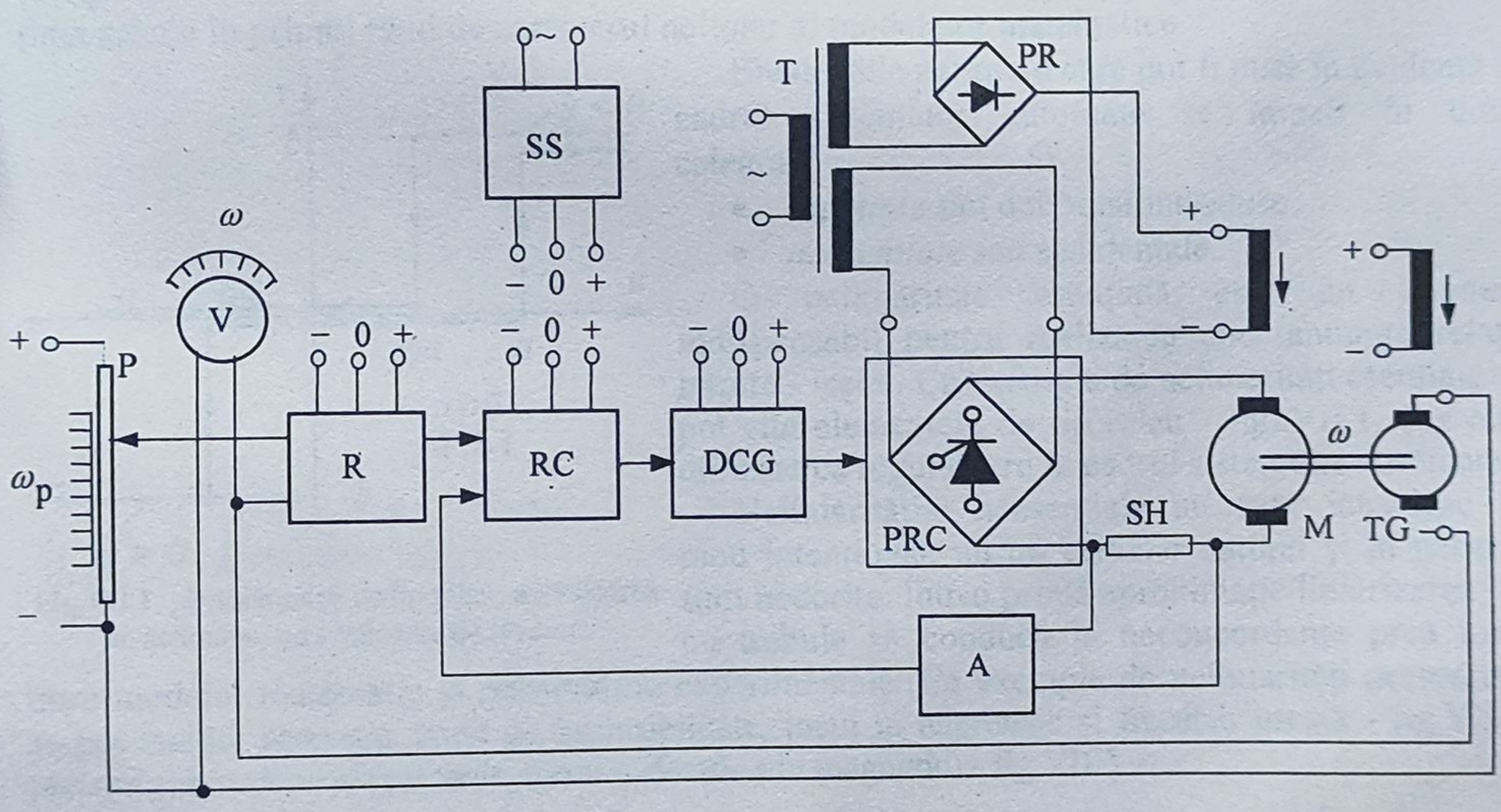


Fig.VI.55. Schema bloc funcțională a unui sistem automat de reglare în cascadă a turației şi curentului motorului electric de c.c. (a se vedea şi fig.III.15); SH– şunt, A– adaptor, RC– regulator de curent

În conformitate cu schema bloc structurală a motorului electric de c.c. (fig.II.12), funcția de transfer între tensiunea $U(s)$ şi curentul $I(s)$ are expresia: $G_{UI}(s)=(Js+k_3)/[(Ls+R)(Js+k_3)+k_1k_2]$. Întrucât momentul de inerție J are de regulă valori mari, rezultă că pentru valori mari ale lui $|s|$ (respectiv pentru valori mici ale timpului) - conform teoremei valorii inițiale, Anexa A1) expresia $|Js + k_3|$ are de asemenea valori mari. Scoțând forțat în factor $(Js + k_3)$ la numitorul lui $G_{UI}(s)$ şi considerând $k_1k_2/(Js + k_3) \approx 0$ se ajunge la aproximația

$G_{UI}(s) \equiv 1/(Ls + R)$. Semnificaţia fizică a acestui rezultat este că pentru valori mici ale ale timpului, comparabile cu constanta de timp electromagnetică L/R - de regulă de valoare mică, constanta de timp electromecanică J/k_3 - de regulă de valoare mare are un efect de întârziere a reacţiei prin t.c.e.m. (elementul 8 în fig.II.12), fapt care permite neglijarea acestei reacţii. În aceste condiţii regulatorul de curent RC se alege de tipul PI (relaţia (4.21)), cu $\tau_1 = L/R$.

În acest fel funcţia de transfer echivalentă a sistemului de reglare automată a curentului (circuitul închis secundar) este, într-o primă aproximaţie, de tipul P. Ca urmare, partea de motor rămasă în circuitul închis primar (al turaţiei) este descrisă de o funcţie de transfer, într-o primă aproximaţie, de tipul PT_1. În aceste condiţii regulatorul de turaţie R se alege de tipul PI (relaţia (4.21)), cu $\tau_1 = J/k_3$.

Capitolul VII

SISTEME AUTOMATE NELINIARE

Observaţiile şi investigaţiile experimentale evidenţiază faptul că sistemele automate reale sunt de regulă neliniare, în sensul că unul sau mai multe componente ale sistemului automat real sunt neliniare (nu satisfac definiţia 1 de la II.1.3). Sistemele automate liniare reprezintă cazuri particulare la care se ajunge prin idealizări, simplificări şi aproximaţii ale fenomenelor reale. În majoritatea situaţiilor rezultatele care se obţin în astfel de condiţii sunt satisfăcătoare, în sensul unei concordanţe acceptabile între modelele matematice şi respectiv observaţiile experimentale.

Există însă numeroase situaţii în care obţinerea unui model matematic liniar presupune aproximaţii inacceptabile, atât principial cât şi ca urmare a unor neconcordanţe flagrante între teorie şi experiment. Pentru astfel de sisteme a fost necesară elaborarea unor metode adecvate în care s-a ţinut seama în primul rând de caracterul neliniar al modelelor matematice.

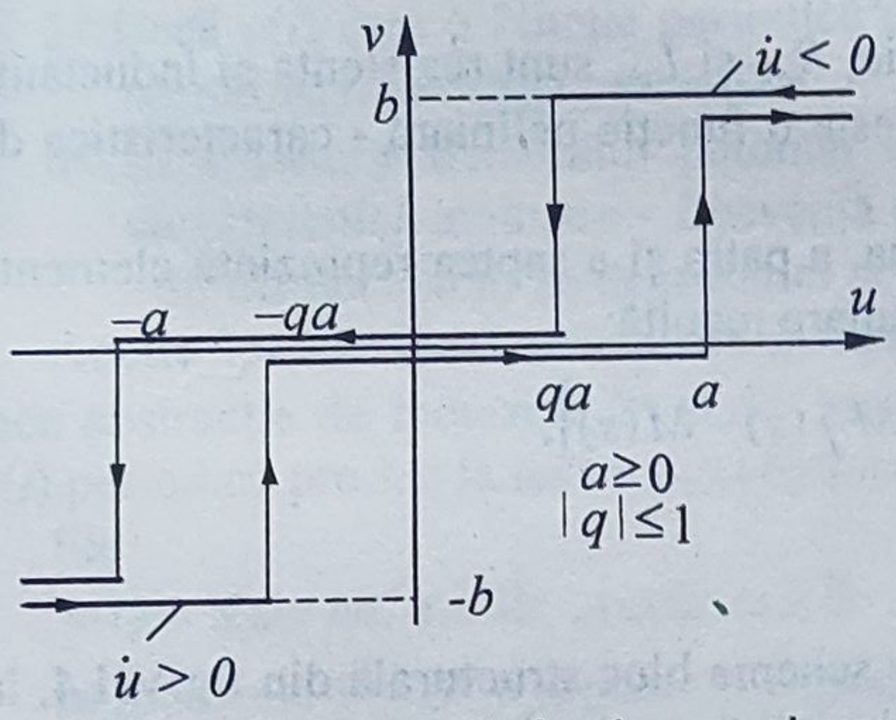


Fig.VII.1. Neliniaritatea de tip releu; a - valoarea de acţionare; *qa* - valoarea de revenire

Elementele neliniare care pot fi puse în evidenţă în cadrul sistemelor automate se împart în două categorii:

- *esenţiale* sau deliberat introduse
- *neesenţiale* sau accidentale.

O neliniaritate esenţială este un element indispensabil pentru realizarea unei anumite relaţii intrare - ieşire. Ca exemple de neliniarităţi esenţiale se pot cita elementele de tip releu - fig..VII.1, frecvent utilizate ca regulatoare în cadrul sistemelor automate.

Neliniarităţile neesenţiale nu sunt introduse în mod intenţionat, au un caracter natural şi în general sunt nedorite. Într-o primă aproximaţie liniarizarea lor nu trebuie să conducă la neconcordanţe prea mari între modelul matematic şi observaţiile experimentale. Ca exemple de neliniarităţi neesenţiale se pot aminti: saturaţia, zona de insensibilitate, jocul în angrenaje şi frecarea uscată - fig.VII.2, precum şi histerezisul (mecanic, termic, electric sau magnetic) - fig.VII.3.

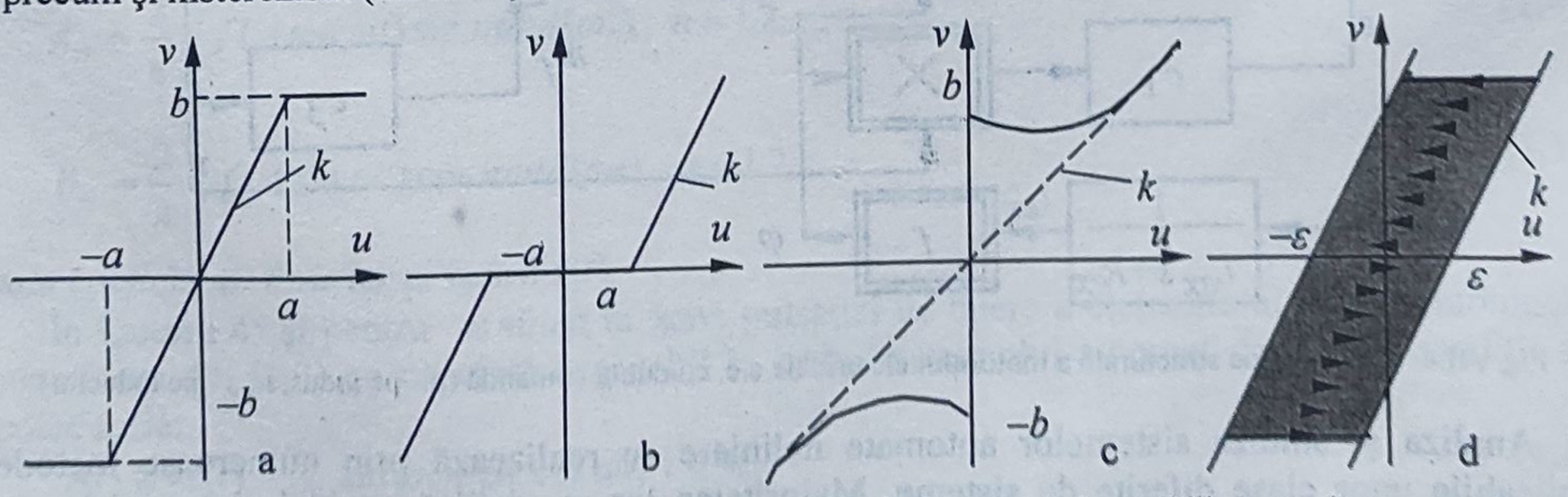


Fig.VII.2. Neliniarităţi neesenţiale (accidentale): a - saturaţia, b - zona de insensibilitate, c - frecarea uscată, d - jocul în angrenaje

În mod obişnuit se admite că sistemele neliniare satisfac *ipoteza de separabilitate*. Aceasta se referă la faptul că sistemul poate fi divizat în subsisteme liniare şi subsisteme neliniare conectate adecvat între ele. Pentru subsistemele liniare se poate adopta descrierea cu ajutorul funcţiei de transfer. Pentru ilustrarea unei proceduri de obţinere a modelului matematic pe baza ipotezei de separabilitate se prezintă în continuare cazul motorului electric de c.c. cu dublă comandă: prin tensiunea aplicată indusului (exemplul 2.1 de la II.2.1) şi prin tensiunea aplicată inductorului (circuitului de excitaţie). În aceste circumstanţe, conform fig.II.10, la ecuaţiile obţinute la exemplul 2.1 de la II.2.1 nuanţate corespunzător noii situaţii şi anume:

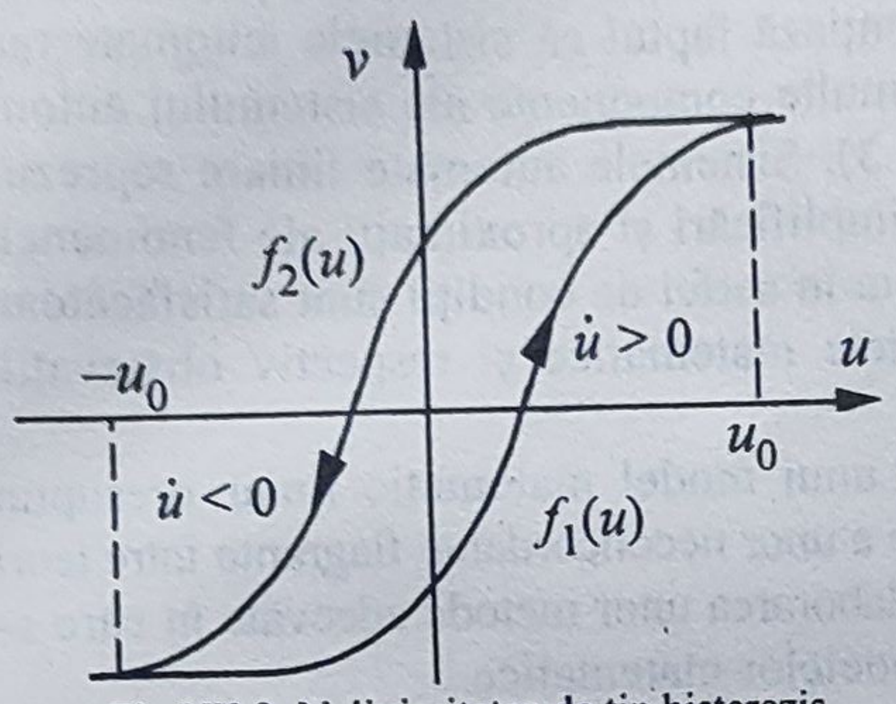


Fig.VII.3. Neliniaritatea de tip histerezis

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + e$$

$$e = c_1\varphi\omega$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = m_m - m_f - m$$

$$m_m = c_2\varphi i$$

$$m_f = c_3\omega,$$

se adaugă ecuaţiile inductorului:

$$u_{ex} = R_{ex}i_{ex} + L_{ex}\frac{di_{ex}}{dt}$$

$$\varphi = f(i_{ex}),$$

în care u_{ex} şi i_{ex} sunt tensiunea şi curentul de excitaţie, R_{ex} şi L_{ex} sunt rezistenţa şi inductanţa circuitului de excitaţie, φ este fluxul de excitaţie şi f este o funcţie neliniară - caracteristica de magnetizare a maşinii electrice de c.c.

Examinând cele şapte ecuaţii se constată că a doua, a patra şi a şaptea reprezintă elemente neliniare. Aplicând transformarea Laplace ecuaţiilor liniare rezultă:

$$I(s) = \frac{1}{Ls+R}\left[U(s) - E(s)\right],\ \Omega(s) = \frac{1}{Js}\left[M_m(s) - M_f(s) - M(s)\right],$$

$$M_f(s) = c_3\Omega(s),\ I_{ex}(s) = \frac{1}{L_{ex}s + R_{ex}}U_{ex}(s).$$

Cu acestea şi cu cele trei ecuaţii neliniare se obţine schema bloc structurală din fig.VII.4, în care dreptunghiurile cu chenar simbolizează elementele neliniare ale sistemului.

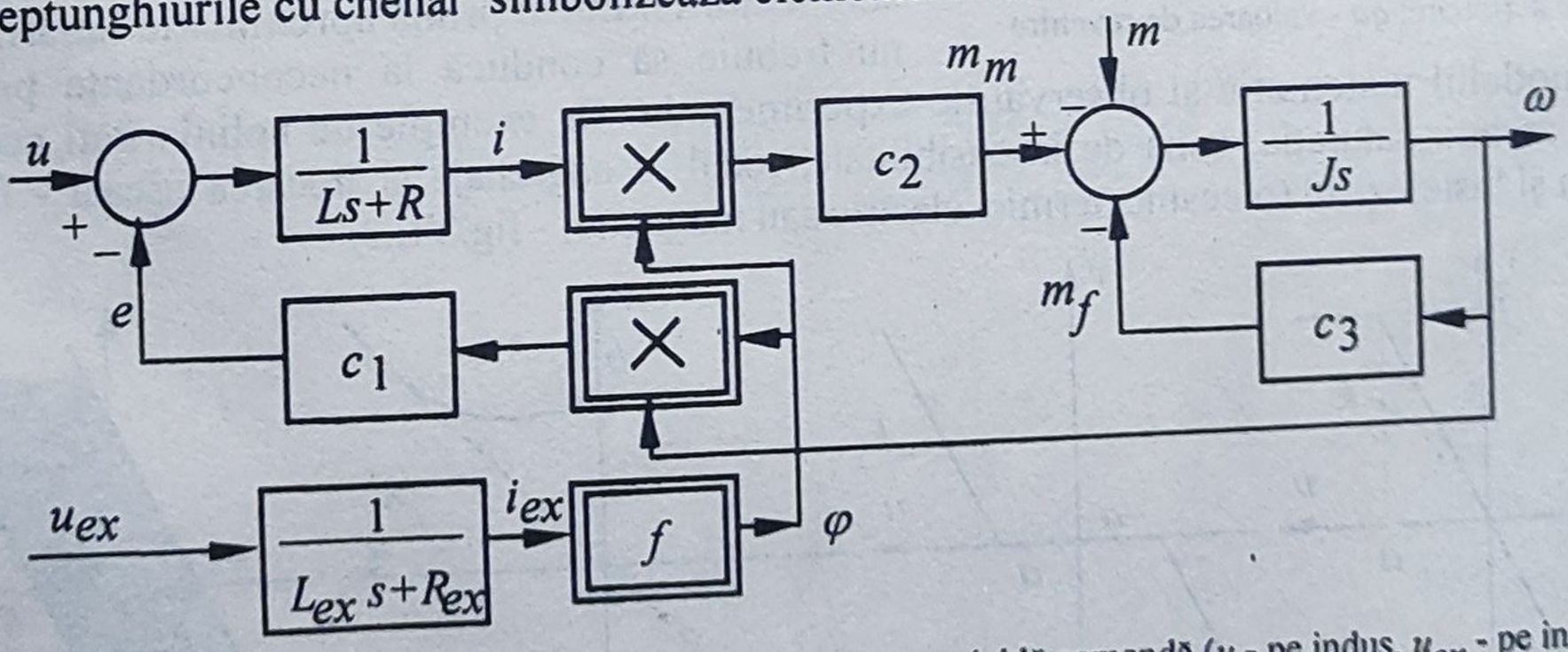


Fig.VII.4. Schema bloc structurală a motorului electric de c.c. cu dublă comandă (u - pe indus, u_{ex} - pe inductor)

Analiza şi sinteza sistemelor automate neliniare se realizează prin numeroase metode aplicabile unor clase diferite de sisteme. Majoritatea lor se sprijină pe idei şi concepte din teoria sistemelor automate liniare. Toate metodele au însă ca scop comun analiza stabilităţii şi

sinteza unor sisteme automate stabile. În cele ce urmează se vor prezenta două metode frecvențiale şi anume: metoda funcției de descriere şi metoda bazată pe criteriul Popov.

1. Metoda funcției de descriere

Aceasta este o metodă de liniarizare în domeniul frecvențelor. Ea este aplicabilă unei clase largi de neliniarități, dar se aplică în special neliniarităților descrise de funcții discontinue, pentru care liniarizarea bazată pe formula lui Taylor (a se vedea II.1.3) este inoperantă.

1.1. Procedeul celor două locuri

a. Definiția funcției de descriere

Ipotezele pe baza cărora se va defini *funcția de descriere* a unui element neliniar cu o mărime de intrare şi o mărime de ieşire (ambele funcții scalare de timp) sunt următoarele:

1° Relația intrare-ieşire este descrisă de:

$$v = f(u), \tag{1.1}$$

unde f este o funcție continuă şi monotonă pe porțiuni, univalentă sau multivalentă, având cel mult discontinuități de prima speță (condițiile lui Dirichlet).

2° Neliniaritatea (1.1) este simetrică față de originea planului (u,v).

3° Dacă $u(t)$ este o funcție periodică de perioadă T, atunci $v(t)$ este de asemenea o funcție periodică de aceeaşi perioadă T.

4° În structura sistemului automat elementul neliniar precede un element liniar cu o caracteristică atenuare - frecvență de tipul filtru trece - jos cu o pantă cel mult egală cu –40 dB/decadă în zona pulsației de tăiere.

Aceste ipoteze sunt satisfăcute în majoritatea cazurilor care intervin în aplicații. Dacă se face abstracție de ipotezele 2° şi 3°, atunci se iau în considerare şi neliniaritățile care pentru $u(t)$ periodică produc la ieşire şi o componentă continuă şi subarmonici.

Fie

$$u(t) = A\sin\omega t,\ t \in \mathbf{R};\ A \geq 0,\ \omega \geq 0. \tag{1.2}$$

În ipotezele 1° - 3° $y(t)$ poate fi exprimat prin următoarea *serie Fourier*:

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t),\ t \in \mathbf{R}, \tag{1.3}$$

în care

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(A\sin\omega t)\sin n\omega t d(\omega t),\ n = 1,2,..., \tag{1.4}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(A\sin\omega t)\cos n\omega t d(\omega t),\ n = 1,2,..., \tag{1.5}$$

sunt *coeficienții Fourier* ai ieşirii $v(t)$.

În ipoteza 4° şi pentru ω situat în zona pulsației de tăiere a elementului liniar armonicele superioare din (1.3) au un efect neglijabil în cadrul sistemului automat. În aceste condiții se poate scrie:

$$v(t) \cong v_1(t) = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t,\ t \in \mathbf{R}, \tag{1.6}$$

unde $v_1(t)$ este fundamentala lui $v(t)$.

Pentru stabilirea unui formalism asemănător cu cel utilizat la metoda frecvențială în cazul sistemelor automate liniare (cap.VI) se transpun relațiile (1.2) și (1.6) în domeniul complex. Se pot scrie relațiile:

$$u(t) = \operatorname{Im} U(A, j\omega) = \operatorname{Im} Ae^{j\omega t}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1.7}$$

$$v_1(t) = \operatorname{Im} V_1(A, j\omega) = \operatorname{Im} \sqrt{A_1^2(A) + B_1^2(A)}\, e^{j \operatorname{arctg} \frac{B_1(A)}{A_1(A)}} e^{j\omega t}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1.8}$$

Definiția 1

Se numește funcția de descriere a elementului neliniar (1.1), sub ipotezele 1° - 4°, raportul:

$$N(A) = \frac{V_1(A, j\omega)}{U(A, j\omega)}, A \in \mathbf{R}_+. \blacksquare \tag{1.9}$$

Ținând seama de (1.7), (1.8), din (1.9) rezultă că funcția de descriere are expresia:

$$N(A) = \frac{1}{A}\left[A_1(A) + jB_1(A)\right] = \frac{1}{A}\sqrt{A_1^2(A) + B_1^2(A)}\, e^{j \operatorname{arctg} \frac{B_1(A)}{A_1(A)}}, \quad A \in \mathbf{R}_+. \tag{1.10}$$

În aplicații se utilizează și *funcția de descriere invers negativă*:

$$N_i(A) = -1 / N(A), \quad A \in \mathbf{R}_+. \tag{1.11}$$

Hodograful $N_i(A)$, $A \in \mathbf{R}_+$, se numește *locul de descriere invers negativ* al elementului neliniar (1.1).

Notând cu

$$N_R(A) = \operatorname{Re} N(A), \quad N_I(A) = \operatorname{Im} N(A), \tag{1.12}$$

din (1.6), ținând seama de (1.2) și (1.10), rezultă:

$$v(t) \cong N_R(A)u(t) - \omega N_I(A) \int_0^t u(t)dt + AN_I(A). \tag{1.13}$$

Prezența integralei în relația intrare-ieșire (1.13) pune în evidență faptul că elementul neliniar are o "memorie", determinată de partea imaginară $N_I(A)$ a funcției de descriere. Acest fenomen apare numai în cazul neliniarităților multivalente, după cum se va arăta în cadrul rezultatului următor.

Teorema 1

Fie o neliniaritate bivalentă definită prin (fig.VII.3):

$$f(u) = \begin{cases} f_1(u), \text{ pentru } \dot{u} > 0, \\ f_2(u), \text{ pentru } \dot{u} < 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

astfel încât: (1.15)

$$f_1(u) \le f_2(u), \text{ pentru } |u| < u_0, \tag{1.16}$$

$$f_1(u) \equiv f_2(u), \text{ pentru } |u| \ge u_0.$$

Atunci (1.17)

$$N_I(A) = -S / (\pi A^2), \quad A \ge u_0,$$

unde S este aria cuprinsă între graficele funcțiilor $f_1(u)$ și $f_2(u)$. ■

$\mathcal{D}$. În conformitate cu relațiile (1.5), (1.10) și (1.12) se poate calcula $N_I(A)$ după cum urmează:

$$N_I(A)=\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t)\cos\omega t d(\omega t)=\frac{1}{\pi A^2}\left[\int_0^{\pi/2} f(A\sin\omega t)A\cos\omega t d(\omega t)+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(A\sin\omega t)A\cos\omega t d(\omega t)+\int_{3\pi/2}^{2\pi} f(A\sin\omega t)A\cos\omega t d(\omega t)\right]=$$

$$\frac{1}{\pi A^2}\left[\int_0^A f_1(u)du+\int_A^A f_2(u)du+\int_A^0 f_1(u)du\right]=\frac{1}{\pi A^2}\int_A^A[f_2(u)-f_1(u)]du=-\frac{S}{\pi A^2}.\blacksquare$$

Exemplul 1.1

Graficul neliniarității de tip releu, în care s-au introdus notații care permit și studiul unor cazuri particulare, este reprezentat în fig.VII.1. Cazurile care se au în vedere sunt următoarele:

1° releu bipozițional (ideal) pentru $q = 1$ și $a = 0$;

2° releu bipozițional cu histerezis pentru $q = -1$ și $a > 0$;

3° releu tripozițional (ideal) pentru $q = 1$ și $a > 0$;

4° releu tripozițional cu histerezis pentru $|q| < 1$ și $a > 0$.

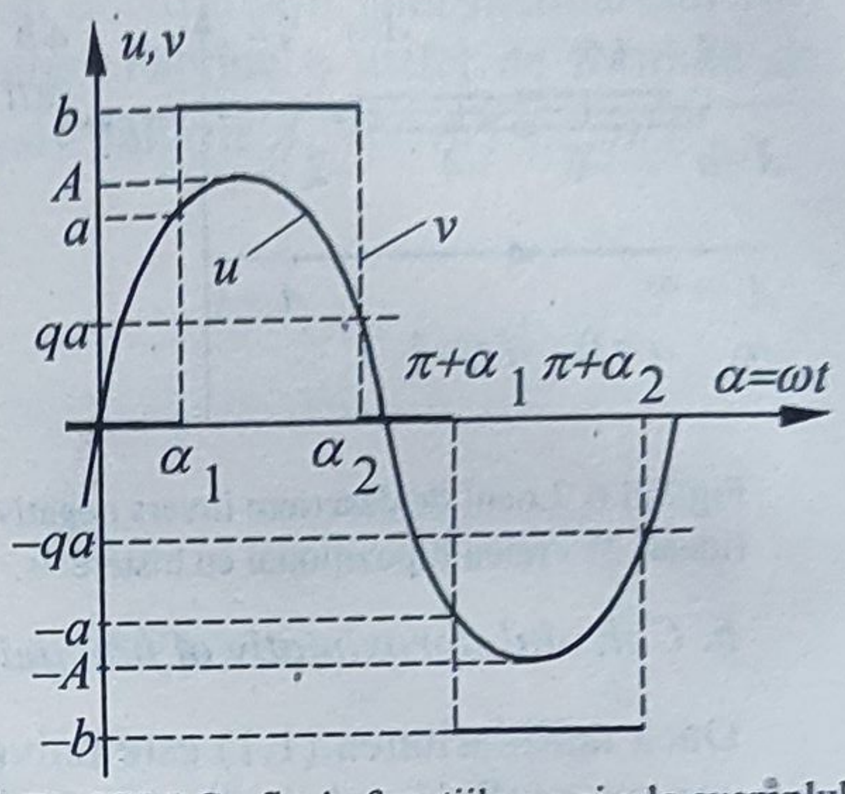


Fig.VII.5 Graficele funcțiilor u și y la exemplul 1.1 (neliniaritate de tip releu - fig.VII.1)

Se cere să se determine funcția de descriere și locul de descriere invers negativ al acestei neliniarități.

În conformitate cu (1.4), (1.10), (1.12) și fig.VII.5 (cazul 4°) se poate scrie:

$$N_R(s)=\frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} v(t)\sin\omega t d(\omega t)=\frac{2b}{\pi A}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha=\frac{2b}{\pi A}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2).$$

Din fig.VII.5 rezultă: $\sin\alpha_1=a/A$, $\cos\alpha_1=\sqrt{1-a^2/A^2}$, $\sin\alpha_2=qa/A$, $\cos\alpha_2=\sqrt{1-q^2a^2/A^2}$, astfel că partea reală a funcției de descriere are expresia:

$$N_R(A)=\frac{2b}{\pi A}\left(\sqrt{1-a^2/A^2}+\sqrt{1-q^2a^2/A^2}\right),\ A\geq a.$$

Pentru partea imaginară a funcției de descriere, conform relației (1.17), rezultă:

$$N_I(A)=-\frac{2ab}{\pi A^2}(1-q),\ \ A\geq a.$$

Funcția de descriere invers negativă are expresia:

$$N_i(A)=-\frac{\pi A^2}{4ab}\left[\sqrt{A^2/a^2-q^2}+j(1-q)\right]\Big/\left[A^2/a^2-q^2+\sqrt{(A^2/a^2-1)(A^2/a^2-q^2)}\right],\ A\geq a.$$

În primele trei cazuri particulare deja evidențiate se obțin următoarele expresii:

1° $N(A)=4b/\pi A,\ N_i(A)=-\pi A/4b,\ A>0$;

2° $N(A)=\frac{4ab}{\pi A^2}\left(\sqrt{A^2/a^2-1}-j\right),\ N_i(A)=-\frac{\pi a}{4b}\left(\sqrt{A^2/a^2-1}+j\right),\ A\geq a$;

3° $N(A)=\frac{4ab}{\pi A^2}\sqrt{A^2/a^2-1},\ N_i(A)=-\frac{\pi A^2}{4ba}\Big/\sqrt{A^2/a^2-1},\ A>a.$

Locurile de descriere invers negative sunt reprezentate în fig.VII.6.■

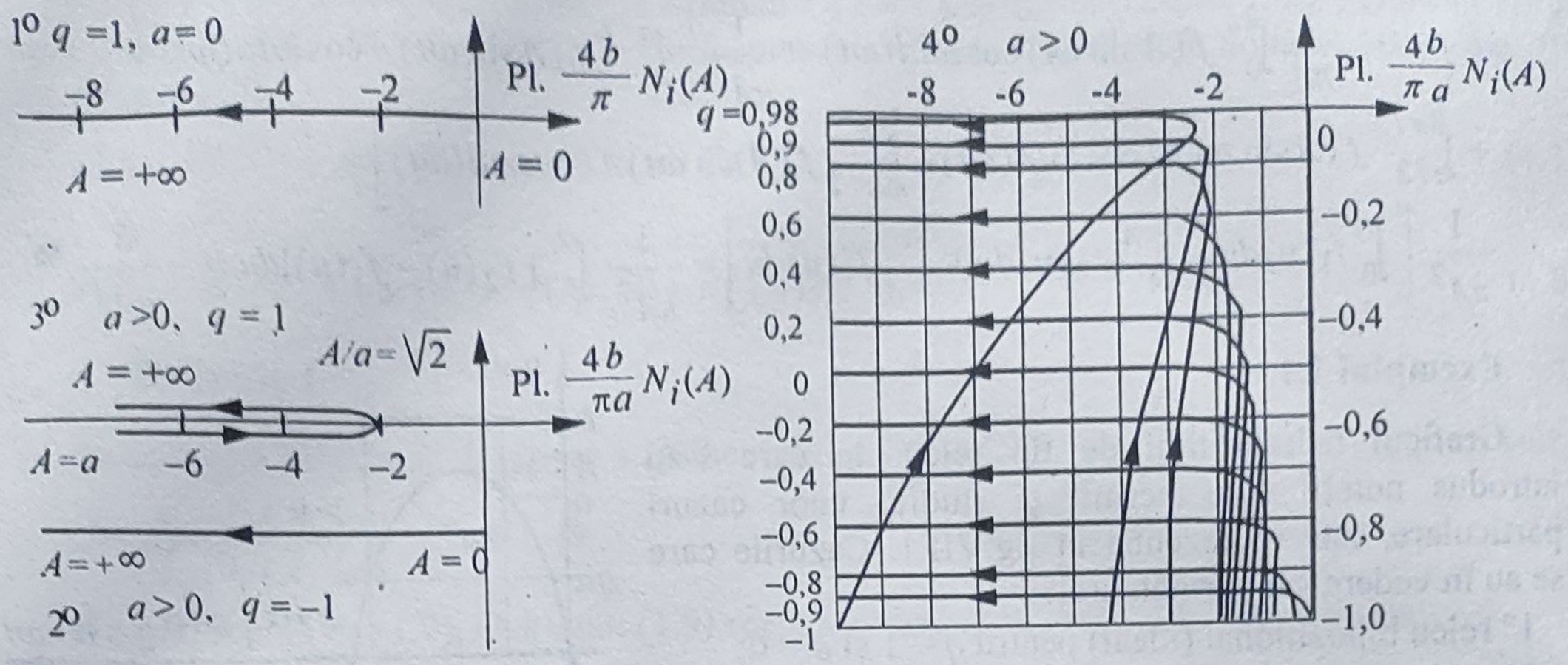


Fig. VII.6. Locul de descriere invers negativ al neliniarităţilor de tip releu (exemplul 1.1); 1° - releu bipoziţional (ideal),2° - releu bipoziţional cu histerezis, 3° - releu tripoziţional (ideal), 4° - releu tripoziţional cu histerezis

b. Calculul aproximativ al funcţiei de descriere

Dacă neliniaritatea (1.1) este univalentă, atunci, conform ipotezei 2°, funcţia f este impară. Ca urmare coeficientul A_1 din (1.10) se poate calcula şi cu formula:

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(A\sin\omega t)\sin\omega t d(\omega t). \tag{1.18}$$

Utilizând substituţiile $x = \sin\omega t$ şi $g(x) = xf(Ax)$ din (1.18) se obţine:

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \cong \frac{1}{3}[g(1)+2g(1/2)+2g(-1/2)+g(-1)],$$

din care rezultă:

$$A_1 \cong \frac{2}{3}[f(A)+f(A/2)]. \tag{1.19}$$

Întrucât în cazul neliniarităţilor univalente $N_I(A) = 0$ (conform teoremei 1), din (1.10) şi (1.19) se obţine:

$$N(A) = N_R(A) \cong \frac{2}{3A}[f(A)+f(A/2)]. \tag{1.20}$$

Exemplul 1.2

Se consideră neliniaritatea de tip releu bipoziţional (ideal) şi se cere să se calculeze funcţia de descriere cu formula (1.20).

Expresia analitică a acestei neliniarităţi este $v = b\,\mathrm{sgn}u$. Utilizând formula (1.20) rezultă: $N(A) \cong 4b/(3A)$. Aceasta poate fi considerată o aproximaţie satisfăcătoare având în vedere că $N(A)=4b/(\pi A)$ (exemplul 1.1, 1°).■

Exemplul 1.3

Se consideră $f(u) = ku^m$, $m = 1,3,\ldots$. Se cere să se calculeze funcţiile de descriere exactă şi aproximativă.

Întrucât pentru m impar se obține $\int_0^{\pi} \sin^{m+1} \omega t d(\omega t) = \pi[m(m-2).....3.1]/\,[(m+1)(m-1)...$ $...4.2]$, din (1.10) şi (1.17) rezultă: $N(A) = 2kA^{m-1}[m(m-2)...3.1]/[(m+1)(m-1)...4.2]$. Pe de altă parte din (1.20) se obține: $N(A) \cong (2^m+1)kA^{m-1}/(3\cdot 2^{m-1})$. Este uşor de observat că pentru $m = 1$ (cazul liniar) şi $m = 3$ cu ambele formule se obțin aceleaşi rezultate, respectiv $N(A) = k$ şi $N(A) = 3kA^2/4$.■

Formula (1.20), pe lângă simplitate, oferă posibilitatea determinării unei neliniarități $f(u)$ atunci când se cunoaşte funcția de descriere $N(A)$. Pentru a obține o astfel de formulă de inversiune, se consideră că amplitudinea intrării u ia succesiv valorile A, $A/2$, $A/2^2$,..., $A/2^n$,.... Din (1.20) se obține următorul şir de egalități:

$$3AN(A)/2 \cong f(A) + f(A/2)$$

$$-3AN(A/2)/2^2 \cong -f(A/2) - f(A/2^2)$$

$$3AN(A/2^2)/2^3 \cong f(A/2^2) + f(A/2^3)$$

.....

$$(-1)^n 3AN(A/2^n)/2^{2+1} \cong (-1)^n f(A/2^n) + (-1)^n f(A/2^{n+1})$$

.....

Sumând aceste egalități membru cu membru se obține:

$$f(A) \cong \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3A}{2^{n+1}} N\left(\frac{A}{2^n}\right), \tag{1.21}$$

deoarece, pe lângă reducerile de termeni asemenea, are loc şi $f(A/2^{n+1}) \to 0$ pentru $n \to \infty$ (f este funcție impară şi în plus este considerată continuă în $u = 0$).

Exemplul 1.4

Pentru $N(A) = 3kA^2/4$ se cere să se obțină $f(u)$ cu ajutorul formulei de inversiune (1.21).

Utilizând numai primii patru termeni din (1.21) se obține: $f(A) \cong 4095kA^3/4094$, ceea ce înseamnă $f(u) \cong ku^3$. Pentru aprecierea acestui rezultat se are în vedere şi ceea ce s-a obținut la exemplul 1.3 pentru $m = 3$.■

Formula de inversiune (1.21), deşi aproximativă, este deosebit de utilă în sinteza sistemelor automate neliniare, după cum se va vedea la exemplul 1.7.

c. Schema bloc structurală

Analogiile dintre noțiunile de răspuns la frecvență şi de funcție de descriere permit tratarea sistemelor automate neliniare în maniera cunoscută de la sistemele automate liniare. În plus se admite ipoteza de separabilitate, astfel că se pot alcătui scheme bloc structurale în care apar elemente liniare şi neliniare. Pentru elementele liniare ale sistemului se pot aplica regulile şi identitățile de transfigurare a schemelor bloc structurale cunoscute de la sistemele liniare (subcap. II.2), cu condiția ca mărimile de intrare ale elementelor neliniare să rămână neschimbate. Această condiție are în vedere faptul că funcția de descriere depinde de amplitudinea mărimii de intrare a elementului neliniar. În acest context trebuie remarcat că în cazul unui sistem automat cu o singură neliniaritate forma cea mai simplă la care se poate ajunge este *schema bloc structurală tipică* din fig.VII.7. Spre deosebire de cazul liniar, structura cu reacție negativă din fig.VII.7 nu are un echivalent mai simplu. În plus se preferă ca reacția să fie unitară, ceea ce conduce în mod implicit la constituirea în cadrul buclei închise a

elementului liniar, descris de $G(s)$, imediat după elementul neliniar. În acest fel este posibilă verificarea de fiecare dată a îndeplinirii ipotezei 4° de la punctul *a*.

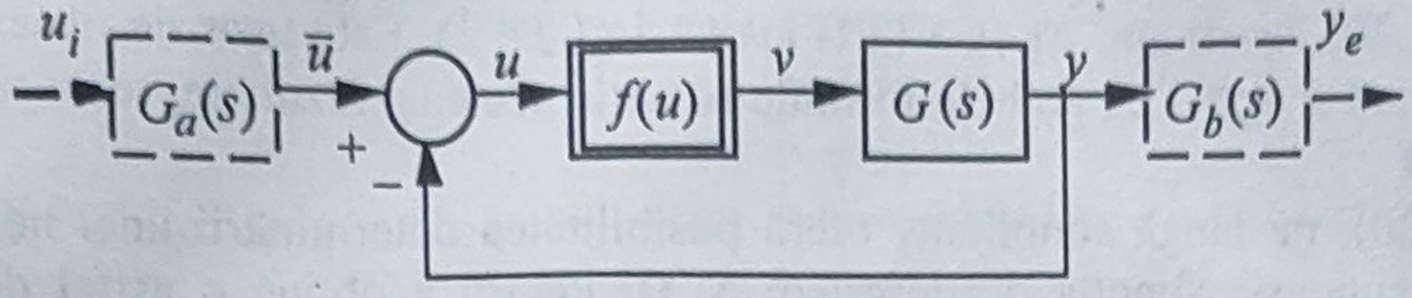


Fig.VII.7 Schema bloc structurală tipică a unui sistem automat cu o singură neliniaritate

Exemplul 1.5

Se consideră schema bloc structurală reprezentată în fig.VII.8. Se cere ca prin transfigurări succesive să se ajungă la schema bloc structurală tipică.

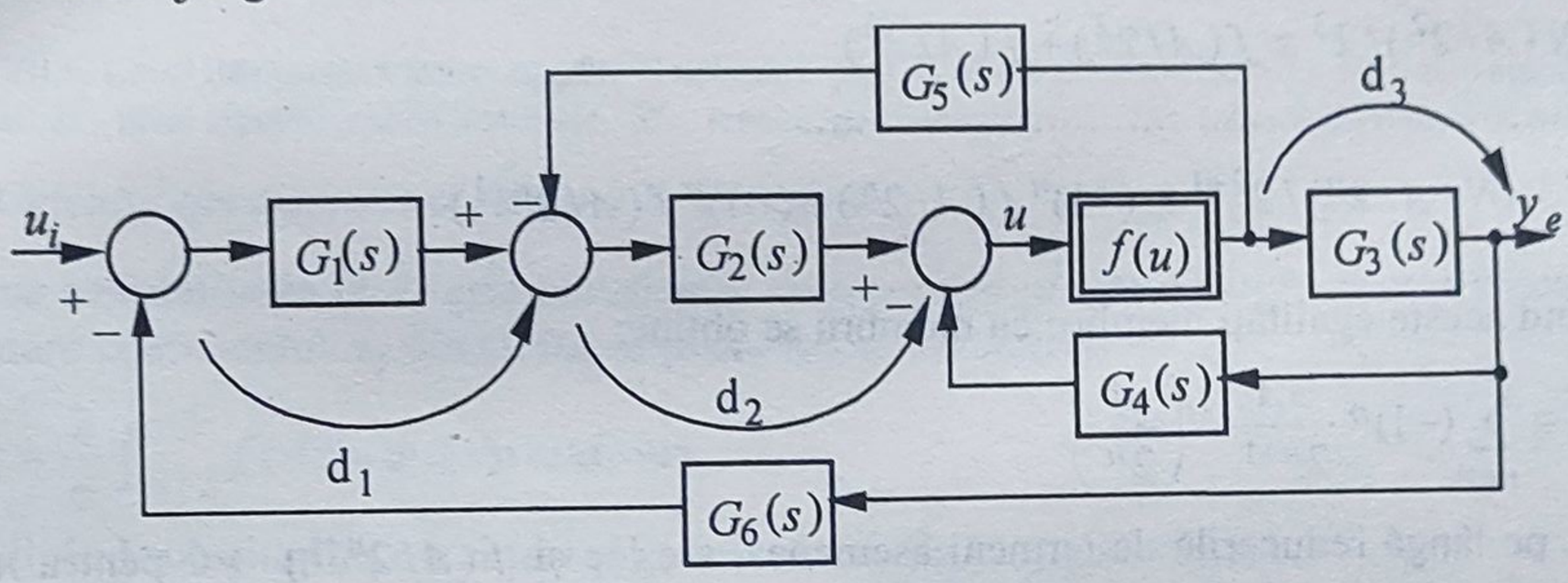


Fig.VII.8. Schema bloc structurală la exemplul 1.5

Se realizează în mod succesiv deplasările d_1, d_2 şi d_3 şi se ajunge la schema din fig.VII.9, în care: $G_7 = G_4 + G_2G_5 / G_3 + G_1G_2G_6$. Deplasând acum elementul G_7 de pe calea de reacție pe calea directă se ajunge la schema din fig.VII.7, în care $G = G_2G_5 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_6$, $G_a = G_1G_2$ şi $G_b = G_7^{-1}$.■

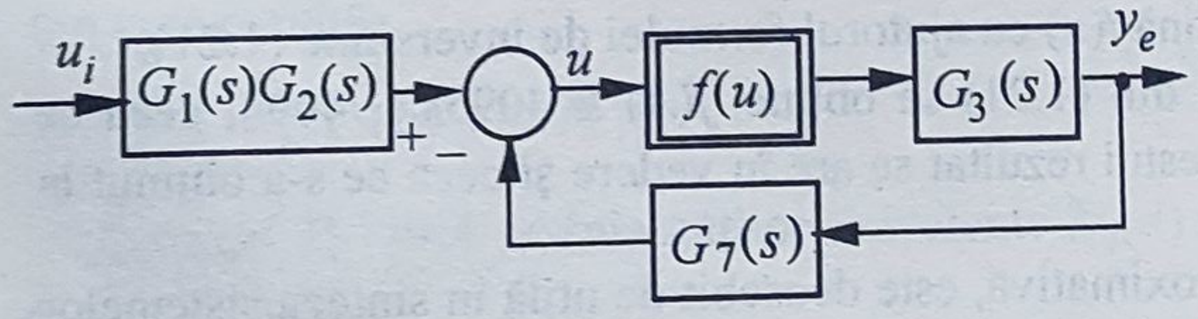


Fig.VII.9. Schema bloc structurală (la exemplul 1.5) obținută după realizarea deplasărilor d_1 - d_3 (fig.VII.8)

În cazul sistemelor automate cu două sau mai multe neliniarități, reducerea la forma tipică din fig.VII.7 nu este de regulă posibilă datorită condiției menținerii neschimbate a mărimilor de intrare ale neliniarităților.

d. Punct de echilibru

Pentru cele ce urmează se admite că partea liniară a sistemului automat neliniar (în forma tipică - fig.VII.7), pe lângă ipoteza 4° de la punctul *a*, mai satisface următoarele ipoteze:

1° Are cel mult un pol pe axa imaginară şi anume în $s = 0$, iar restul polilor sunt toți în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

2° Cele două polinoame al căror raport este $G(s)$ (fig.VII.7) sunt relativ prime între ele.

3° $G(s)$ conține, eventual, şi un element cu timp mort.

Ca şi în cazul sistemelor automate liniare, regimul de funcționare uzual al unui sistem automat neliniar, motivat de utilitatea sa practică şi în măsura posibilului, este *regimul staționar*. Cu referire la schema tipică din fig.VII.7 (în care se face abstracție de elementele

liniare $G_a(s)$ şi $G_b(s)$) un astfel de regim este posibil pentru $\overline{u} = \overline{u}_0 =$constant, care determină $u = u_0 =$ constant, $v = v_0 =$ constant şi $y = y_0 =$ constant. Cvadruplul $(\overline{u}_0, u_0, v_0, y_0)$ defineşte un *punct de funcţionare* al sistemului automat neliniar, caracterizat prin următoarele ecuaţii:

$$\begin{cases} y_0 = G(p)v_0 \\ v_0 = f(u_0) \\ u_0 = \overline{u}_0 - y_0, \end{cases} \tag{1.22}$$

în care $p = d/dt$ este operatorul de derivare introdus formal prin înlocuirea variabilei s în $G(s)$. Întrucât

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_0}, \tag{1.23}$$

rezultă că în punctul de funcţionare au loc şi egalităţile:

$$\begin{cases} p^n y_0 = p^{n-1} y_0 = ... = p y_0 = 0 \\ p^n v_0 = p^{n-1} v_0 = ... = p v_0 = 0 \end{cases}, \tag{1.24}$$

ceea ce permite să se afirme că cvadruplul $(\overline{u}_0, u_0, v_0, y_0)$ defineşte un *punct de echilibru* al sistemului automat neliniar în forma tipică. Noţiunea de punct de echilibru are semnificaţia cunoscută din fizică în sensul că toate derivatele variabilelor, în punctul respectiv, sunt nule (relaţia (1.24)). O definiţie formal riguroasă a punctului de echilibru se va da la 1.3.*a*.

Din (1.22) - (1.24) rezultă:

$$\begin{cases} y_0 = b_0 f(u_0)/a_0 \\ y_0 = \overline{u}_0 - u_0 \end{cases} \tag{1.25}$$

pentru care se dau reprezentările grafice din fig.VII.10. Punctul de echilibru este punctul de intersecţie al celor două grafice.

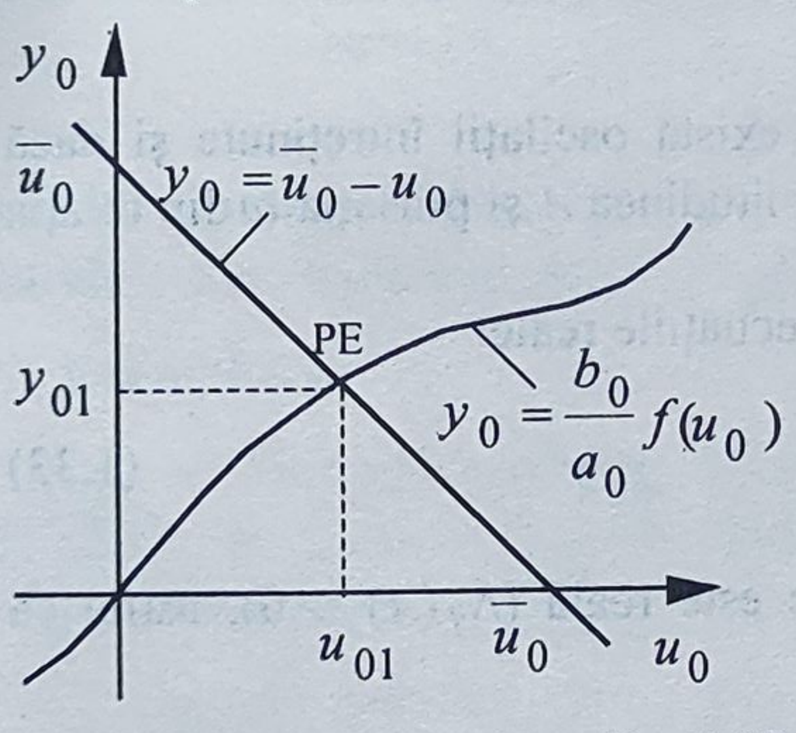


Fig.VII.10. Graficele funcţiilor (1.25); PE - punctul de echilibru

Pentru micile abateri Δu, Δv şi Δy ale mărimilor u, v şi y în jurul valorilor u_0, v_0 şi y_0, corespunzător ecuaţiilor (1.22), se pot scrie următoarele ecuaţii:

$$\begin{cases} y_0 + \Delta y = G(p)(v_0 + \Delta v) \\ v_0 + \Delta v = f(u_0 + \Delta v) \\ u_0 + \Delta u = \overline{u}_0 - (y_0 + \Delta y). \end{cases} \tag{1.26}$$

Ţinând seama de (1.22), din (1.26) rezultă:

$$\begin{cases} \Delta y = G(p)\Delta v \\ \Delta v = f(\Delta u) \\ \Delta u = -\Delta y, \end{cases} \tag{1.27}$$

în care s-a notat:

$$\Delta f(\Delta u) = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0). \tag{1.28}$$

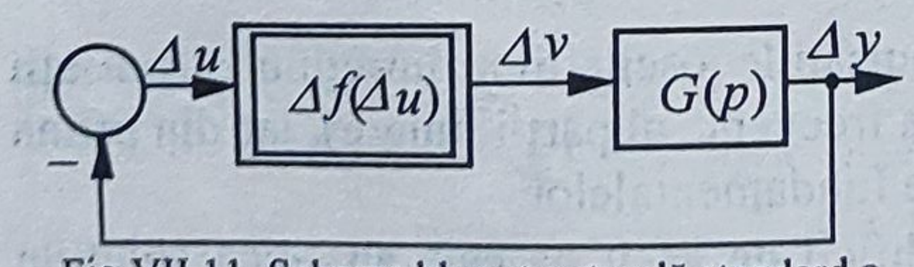


Fig.VII.11. Schema bloc structurală standard a unui sistem automat neliniar cu o singură neliniaritate

Pe baza ecuaţiilor (1.27) schema bloc din fig.VII.7 (exclusiv elementele liniare $G_a(s)$ şi $G_b(s)$) poate fi adusă la forma din fig.VII.11, numită *schema bloc structurală standard* asociată punctului de echilibru $(\overline{u}_0, u_0, v_0, y_0)$. Se remarcă imediat că sistemul automat din fig.VII.11, descris de ecuaţiile (1.27), se caracterizează prin punctul de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$.

e. Ecuația balanței armonice

În cadrul acestei secțiuni se admite ipoteza că sistemul (1.27), pentru $\overline{u}_0$ fixat, are ca unică stare de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$.

În afara acestei soluții este posibil ca ecuațiile (1.27) să admită și *soluții periodice*, respectiv *oscilații întreținute* în jurul punctului de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$.

Dacă în sistemul în forma standard (fig.VII.11) există oscilații întreținute, atunci, datorită efectului de filtru trece-jos al părții liniare, la intrarea elementului neliniar preponderentă este fundamentala:

$$\Delta u_1(t) = A\sin\omega t,\ t\in\mathbf{R};\ A>0,\ \omega>0. \tag{1.29}$$

În aceste condiții, trecând la mărimi complexe, din ecuațiile (1.27), cu (1.29), la nivelul fundamentalelor, rezultă:

$$\begin{cases}\Delta Y_1(A,j\omega)=G(j\omega)\Delta V_1(A,j\omega)\\ \Delta V_1(A,j\omega)=N(A)\Delta U_1(A,j\omega)\\ \Delta U_1(A,j\omega)=-\Delta Y_1(A,j\omega),\end{cases} \tag{1.30}$$

în care $N(A)$ este funcția de descriere a neliniarității (1.28).

Eliminând $\Delta V_1(A,j\omega)$ și $\Delta Y_1(A,j\omega)$ între ecuațiile (1.30) se obține:

$$[N(A)G(j\omega)+1]U_1(A,j\omega)=0\,. \tag{1.31}$$

Întrucât $U_1(A,j\omega)=Ae^{j\omega t}\neq 0$, din (1.31) rezultă:

$$N(A)G(j\omega)+1=0,\ A>0,\ \omega>0. \tag{1.32}$$

Ecuația (1.32), care, prin analogie cu cazul liniar, este *ecuația caracteristică* a sistemului automat neliniar în forma standard, se numește *ecuația balanței armonice*. Calea prin care s-a ajuns la această ecuație prilejuiește formularea următorului rezultat.

Regula 1

Dacă în sistemul automat neliniar în forma standard există oscilații întreținute și dacă acestea se aproximează la nivelul fundamentalei, atunci amplitudinea A și pulsația ω din relația (1.29) satisfac ecuația balanței armonice (relația (1.32)).■

Ecuația (1.32), în general complexă, este echivalentă cu ecuațiile reale:

$$\begin{cases}N_R(A)=-\mathrm{Re}\,G^{-1}(j\omega)\\ N_I(A)=-\mathrm{Im}\,G^{-1}(j\omega).\end{cases} \tag{1.33}$$

În cazul neliniarităților univalente funcția de descriere este reală ($N_I(A)\equiv 0$), astfel că ecuațiile (1.33) au forma particulară:

$$\begin{cases}N(A)=-\mathrm{Re}\,G^{-1}(j\omega)\\ \mathrm{Im}\,G^{-1}(j\omega)=0 \qquad (\text{sau } \mathrm{Im}\,G(j\omega)=0),\end{cases} \tag{1.34}$$

situație în care din a doua ecuație se calculează pulsațiile oscilațiilor întreținute (pulsații determinate numai de partea imaginară a răspunsului la frecvență al părții liniare), iar din prima ecuație se calculează amplitudinile corespunzătoare ale fundamentalelor.

Dacă $N(A)$ și $G(j\omega)$ au expresii complicate este dificil de găsit pe cale analitică soluțiile ecuațiilor (1.33). În astfel de cazuri se utilizează procedee grafice.

Pentru rezolvarea pe cale grafică a ecuației (1.32) aceasta se scrie sub forma:

$$G(j\omega)=N_I(A), \tag{1.35}$$

în care $N_i(A)$ este funcţia de descriere invers negativă a neliniarităţii (1.28). Se reprezintă în acelaşi plan (fig.VII.12) hodografele $G(j\omega)$, $\omega \geq 0$, şi $N_i(A)$, $A \geq 0$, punctele lor de intersecţie corespund oscilaţiilor întreţinute existente în sistemul automat neliniar. Această cale de rezolvare a ecuaţiei (1.32) (prin (1.35)), foarte utilă şi pentru obţinerea unei imagini globale asupra existenţei oscilaţiilor întreţinute, este cunoscută sub numele de *procedeul (metoda) celor două locuri*.

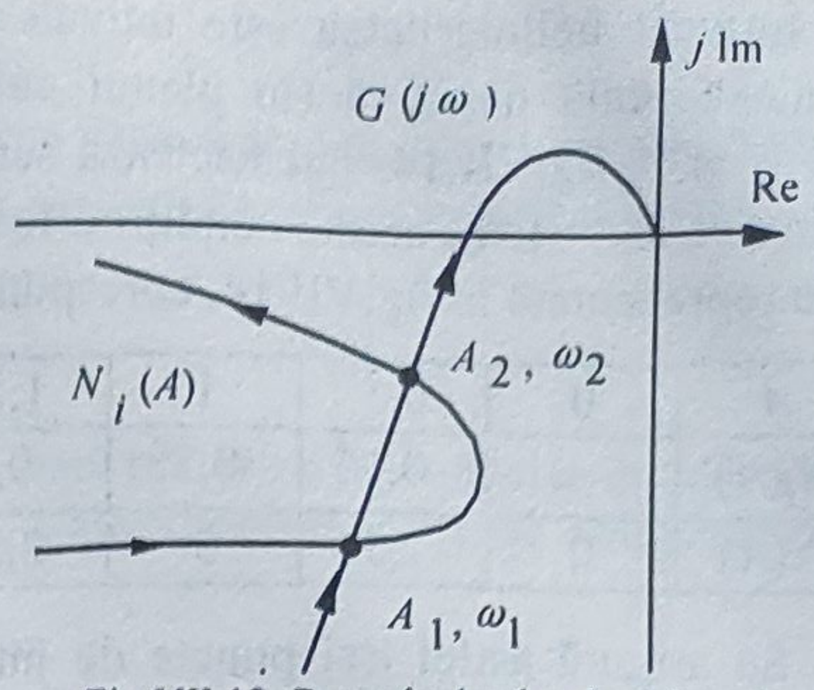


Fig.VII.12. Procedeul celor două locuri

Exemplul 1.6

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.11 în care $\Delta f(\Delta u) = b\,\mathrm{sgn}\,\Delta u$ (releu bipoziţional (ideal)) , cu sgn 0 = 0 (pentru existenţa formală a punctului de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$), şi $G(s) = (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)^{-1}$, cu $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ şi $a_3 \geq 0$. Se cere să se studieze oscilaţiile întreţinute (presupunând că ele există), la nivelul fundamentalei.

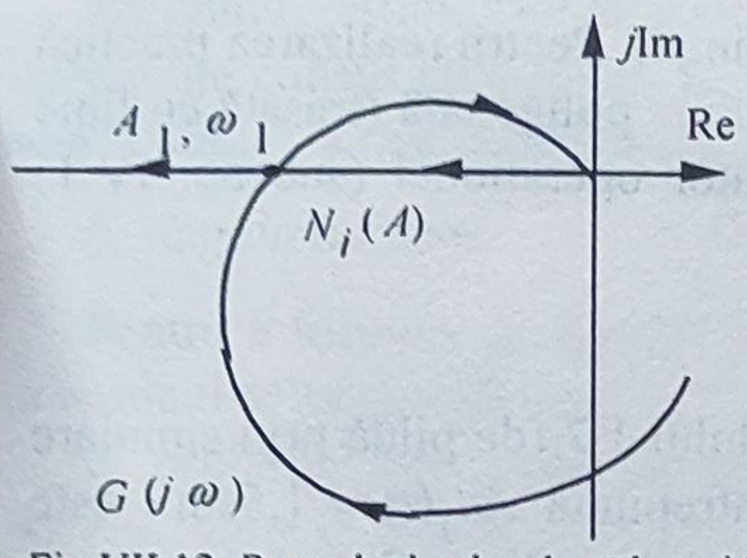


Fig.VII.13. Procedeul celor două locuri la exemplul 1.6

Funcţia de descriere a neliniarităţii de tip releu bipoziţional (ideal) a fost determinată la exemplul 1.1 (1°) şi locul de descriere invers negativ a fost reprezentat în fig.VII.6 (1°). Utilizând procedeul celor două locuri - fig.VII.13, rezultă că există o singură oscilaţie întreţinută. Pe baza ecuaţiilor (1.34) se poate scrie:

$$\begin{cases} 4b/(\pi A) = -\mathrm{Re}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) \\ \mathrm{Im}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) = 0, \end{cases}$$

din care rezultă $\omega_1 = \sqrt{a_2}$ şi $A_1 = 4b/[\pi(a_1 a_2 - a_3)]$. Din condiţia $A_1 > 0$ rezultă $a_1 a_2 - a_3 > 0$; aceasta înseamnă că dacă $a_3 > 0$, atunci partea liniară trebuie să fie BIBO stabilă (conform criteriului Hurwitz - teorema 7 de la II.6.4). Fundamentala oscilaţiei întreţinute are expresia: $\Delta u_1(t) = 4b/[\pi(a_1 a_2 - a_3)]\sin\sqrt{a_2}t$, $t \in \mathbf{R}$. ■

Exemplul 1.7

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.11 în care $G(s) = 0{,}4(s^3 + s^2 + s)^{-1}$. Se cere să se determine neliniaritatea univalentă $\Delta f(\Delta u)$ astfel încât sistemul să fie sediul a trei oscilaţii întreţinute.

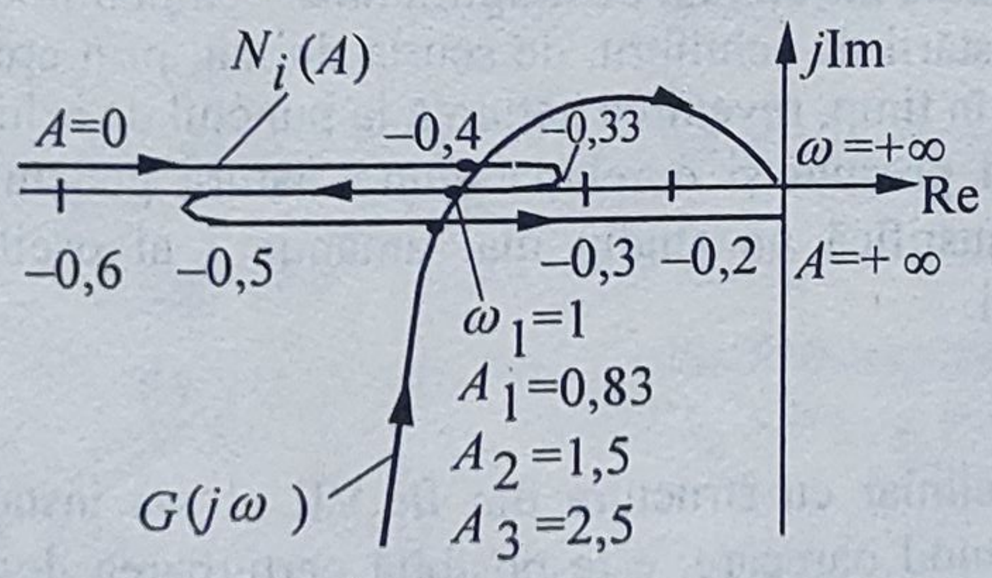


Fig.VII.14. Procedeul celor două locuri la la exemplul 1.7

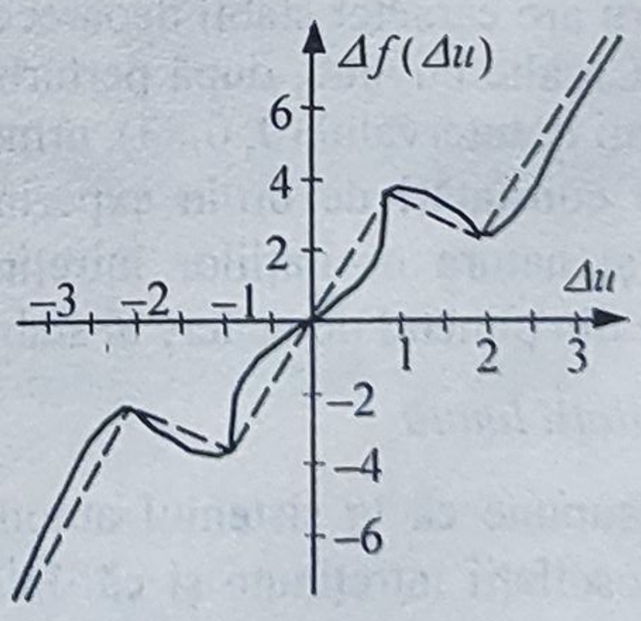


Fig.VII.15. Graficul neliniarităţii exemplul 1.7

Întrucât neliniaritatea este univalentă, locul de descriere invers negativ se va situa pe semiaxa reală negativă (în planul celor două locuri). Locul de transfer $G(j\omega)=0{,}4(-j\omega^3-\omega^2+j\omega)^{-1}$, fig.VII.14, intersectează semiaxa reală negativă în punctul $-0{,}4+j0$ corespunzător pulsației $\omega_1 = 1$. În aceste condiții o formă posibilă a locului de descriere invers negativ $N_i(A)$ este reprezentată în fig.VII.14, corespunzător tabelului:

A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	4	5	10	∞
$N_i(A)$	$-\infty$	–0,66	–0,33	–0,4	–0,5	–0,4	–0,25	–0,2	–0,1	0
$N(A)$	0	1,5	3	2,5	2	3-	4	5	10	$+\infty$

Se asigură astfel trei puncte de intersecție între cele două locuri, respectiv trei oscilații întreținute, toate de aceeaşi pulsație $\omega_1 = 1$ şi de amplitudini $A_1 = 0{,}83$, $A_2 = 1{,}5$ şi $A_3 = 2{,}5$.

Utilizând formula de inversiune (1.21), cu numai primii patru termeni, se obține pentru neliniaritatea căutată următorul tabel de corespondență:

A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	10	$+\infty$
$\Delta f(A)$	0	0,825	3,6	3,3	2,34	5,58	9,8	21,4	31,6	117	$+\infty$

căruia îi corespunde graficul din fig.VII.15 (trasat cu linie continuă). Pentru realizarea practică a acestei neliniarități se poate recurge la aproximarea printr-o linie poligonală (trasată cu linie întreruptă), posibil de materializat cu ajutorul unui amplificator operațional (subcap. IV.1) prevăzut cu un circuit de reacție cu rezistențe şi diode.■

1.2. Stabilitatea oscilațiilor întreținute

Observațiile experimentale care se pot face în cazul exemplului 1.7 (de pildă prin simulare analogică) evidențiază următorul fapt remarcabil: oscilația întreținută $\Delta u_1(t) = 1{,}5\sin t$ este stabilă în sensul că după orice perturbare, de scurtă durată, fie prin scăderea fie prin creşterea amplitudinii în intervalul (0,825, 2,5) urmează, în timp, revenirea naturală la oscilația întreținută menționată. Nu acelaşi lucru se constată în cazul celorlalte două oscilații întreținute (de amplitudine 0,83 şi 2,5), deoarece chiar dacă, în mod adecvat şi pentru o durată oarecare, există în sistem oricare din cele două oscilații, după o perturbare oricât de mică şi de durată scurtă (intempestivă dar şi inevitabilă în orice experiment) nu mai urmează revenirea la oscilația întreținută anterioară perturbării, ci îndepărtarea de aceasta. Se poate afirma că oscilațiile întreținute $\Delta u_1(t) = 0{,}83 \sin t$ şi $\Delta u_1(t) = 2{,}5 \sin t$ sunt instabile.

Consistent cu aceste constatări, experimentele mai relevă şi corelația logică între natura oscilațiilor întreținute şi natura punctului de echilibru $\Delta y=0$, $\Delta v=0$, $\Delta u=0$. Concret, punctul de echilibru are caracter stabil deoarece oscilația întreținută de amplitudinea cea mai mică este instabilă. Cu alte cuvinte, după perturbarea stării de echilibru, de scurtă durată, prin creşterea amplitudinii în intervalul (0, 0,83), urmează, în timp, revenirea naturală la punctul de echilibru.

Aceste constatări de ordin experimental precum şi corelația dintre natura punctului de echilibru şi natura oscilațiilor întreținute justifică un studiu mai amănunțit al oscilațiilor întreținute din punctul de vedere al stabilității.

a. Oscilații limită

Se presupune că în sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.11 s-a instalat un regim de oscilații întreținute şi că, într-un mod oarecare, este posibilă perturbarea de scurtă durată în sensul scăderii sau creşterii, între anumite limite, a amplitudinii. În funcție de evoluția în timp a sistemului, ulterioară perturbării, se disting următoarele trei cazuri.

Definiția 2

Oscilația întreținută se numește *limită stabilă* dacă după perturbarea de scurtă durată, atât în sensul scăderii cât și al creșterii, ambele suficient de mici, a amplitudinii, urmează revenirea, în timp, la oscilația întreținută precedentă perturbării.■

Definiția 3

Oscilația întreținută se numește *limită instabilă* dacă după perturbarea de scurtă durată, atât în sensul scăderii cât și al creșterii, ambele oricât de mici, a amplitudinii, urmează îndepărtarea, în timp, de oscilația întreținută precedentă perturbării.■

Definiția 4

Oscilația întreținută se numește *limită semistabilă*, adică *stabilă* (*instabilă*) *la stânga* și *instabilă (stabilă) la dreapta*, dacă după perturbarea de scurtă durată, în sensul scăderii suficient (oricât) de mici și al creșterii oricât (suficient) de mici a amplitudinii, urmează revenirea (îndepărtarea) și respectiv îndepărtarea (revenirea), în timp, la (de) și de (la) oscilația întreținută precedentă perturbării.■

Atributul <<limită>> utilizat în aceste trei definiții se justifică prin aceea că oscilațiile întreținute constituie o limită pentru $t \to +\infty$ a procesului evolutiv declanșat de perturbarea de scurtă durată a respectivelor oscilații.

b. Regula lui Loeb

Pentru a formula o condiție privitoare la stabilitatea oscilațiilor întreținute se poate utiliza procedeul celor două locuri.

O oscilație întreținută (1.29), oricare ar fi natura ei, se caracterizează prin perechea $A_0 > 0$, $\omega_0 > 0$, soluție a ecuației balanței armonice (1.32). O perturbare a ei, la $t = 0$, are ca efect variația amplitudinii de la A_0 la $A_0 + \Delta A$ și a pulsației de la ω_0 la $\omega_0 + \Delta\omega$. Apare astfel o nouă oscilație care nu mai este riguros periodică deoarece este afectată de o amortizare ζ, pozitivă sau negativă. Expresia acestei oscilații, la nivelul fundamentalei, este:

$$\Delta u_1(t) = \mathrm{Im}(A_0 + \Delta A)e^{-\zeta t}e^{j(\omega_0+\Delta\omega)t}, t \in \mathbf{R}_+. \tag{1.36}$$

Conform definițiilor 2 și 3 și relației (1.36), oscilația întreținută este limită stabilă dacă:

$$\Delta A\zeta > 0 \tag{1.37}$$

și este limită instabilă dacă:

$$\Delta A\zeta < 0. \tag{1.38}$$

Pentru a converti condițiile (1.37) și (1.38) în niște condiții utilizabile practic se pornește de la faptul că înainte de perturbare era satisfăcută ecuația (1.32), adică:

$$N(A_0)G(j\omega_0) + 1 = 0, \tag{1.39}$$

și că după perturbare, pentru $|\Delta A|$, $|\Delta\omega|$ și $|\zeta|$ suficient de mici și corespunzător relației (1.36), are loc:

$$N(A_0 + \Delta A)G[j(\omega_0 + \Delta\omega + j\zeta)] + 1 = 0. \tag{1.40}$$

Împărțind în (1.40) prin $N(A)$ și separând apoi părțile reală și imaginară se obține:

$$X(A_0 + \Delta A, \omega_0 + \Delta\omega + j\zeta) + jY(A_0 + \Delta A, \omega_0 + \Delta\omega + j\zeta) = 0, \tag{1.41}$$

unde:

$$X(A,\omega) = -N_{IR}(A) + G_R(\omega),\ Y(A,\omega) = -N_{II}(A) + G_I(\omega), \tag{1.42}$$

$$N_{IR}(A) = \mathrm{Re}\, N_I(A),\ N_{II}(A) = \mathrm{Im}\, N_I(A), \tag{1.43}$$

$$G_R(\omega) = \mathrm{Re}\, G(j\omega),\ G_I(\omega) = \mathrm{Im}\, G(j\omega). \tag{1.44}$$

În ipoteza că funcțiile $X(A,\omega)$ și $Y(A,\omega)$ sunt derivabile în (A_0, ω_0) se poate aplica în (1.41) formula lui Taylor, ceea ce conduce la:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_{A_0} \Delta A + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} (\Delta\omega + j\zeta) + j\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{A_0} \Delta A + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} (\Delta\omega + j\zeta) = 0, \tag{1.45}$$

în care s-a ținut seama că ecuației (1.39), cu (1.42) - (1.44) îi corespunde ecuația: $X(A_0, \omega_0)+jY(A_0, \omega_0)=0$.

Efectuând calculele în (1.45), anulând părțile reală și imaginară și apoi eliminând $\Delta\omega$ între ecuațiile obținute se ajunge la:

$$S_0 \Delta A = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2_{\omega_0} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2_{\omega_0}\right]\zeta, \tag{1.46}$$

în care:

$$S_0 = \left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_{A_0}\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_{\omega_0}\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{A_0} \tag{1.47}$$

Conform condițiilor (1.37), (1.34) și relației (1.46) oscilația întreținută este limită stabilă dacă $S_0 > 0$ și limită instabilă dacă $S_0 < 0$. Aceste afirmații rămân valabile și pentru $\Delta A \to 0, \Delta\omega \to 0, \zeta \to 0$. S_0, cu (1.42) - (1.44), are expresia:

$$S_0 = \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0}\left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} - \left(\frac{dG_I}{d\omega}\right)_{\omega_0}\left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0}, \tag{1.48}$$

ceea ce permite să se formuleze următorul enunț.

Regula 2 (Loeb)

Oscilația întreținută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0), soluție a ecuației (1.32), este:

- limită stabilă dacă $S_0 > 0$;
- limită instabilă dacă $S_0 < 0$;
- limită semistabilă dacă $S_0 = 0$.■

Aplicarea acestei reguli presupune calculul expresiei (1.48). O posibilitate de evitare a calculului celor patru derivate din (1.48) se bazează pe observația că produsul vectorial al vectorilor:

$$\bar{v}_G = \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0}\bar{i} + \left(\frac{dG_I}{d\omega}\right)_{\omega_0}\bar{j},\quad \bar{v}_N = \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0}\bar{i} + \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0}\bar{j},$$

ținând seama de (1.48), este:

$$\bar{v}_G \times \bar{v}_N = |\bar{v}_G| \cdot |\bar{v}_N| \sin(\bar{v}_G, \bar{v}_N)\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0} & \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0} & 0 \\ \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0} & \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} & 0 \end{vmatrix} = S_0\bar{k},$$

unde $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ sunt versorii spațiului euclidean tridimensional.

Având în vedere că $\bar{v}_G$ şi $\bar{v}_N$ sunt vectorii tangenţi respectiv la hodografele $G(j\omega)$ şi $N_i(A)$ în punctul lor de intersecţie, caracterizat de perechea (A_0, ω_0), şi că sensul pozitiv al vectorului produs vectorial se obţine atunci când unghiul dintre $\bar{v}_G$ şi $\bar{v}_N$, măsurat în sens pozitiv (antiorar), este cuprins între 0 şi π, regula 2 poate fi reformulată în felul următor.

Regula 3 (Loeb)

Oscilaţia întreţinută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0), soluţie a ecuaţiei (1.32) şi corespunzătoare unui punct de intersecţie a hodografelor $G(j\omega)$ şi $N_i(A)$, este:

- limită stabilă dacă pornind din punctul de intersecţie de-a lungul lui $G(j\omega)$ pentru ω crescător, locul $N_i(A)$ pentru A crescător rămâne la stânga şi pentru ω descrescător locul $N(A)$ pentru A descrescător rămâne la dreapta - (fig.VII.16.a);
- limită instabilă dacă pornind din punctul de intersecţie de-a lungul lui $G(j\omega)$ pentru ω crescător, locul $N_i(A)$ pentru A crescător rămâne la dreapta şi pentru ω descrescător locul $N(A)$ pentru A descrescător rămâne la stânga - (fig.VII.16.b);
- limită semistabilă dacă în punctul de intersecţie ceţe două locuri sunt tangente - (fig.VII.16.c).■

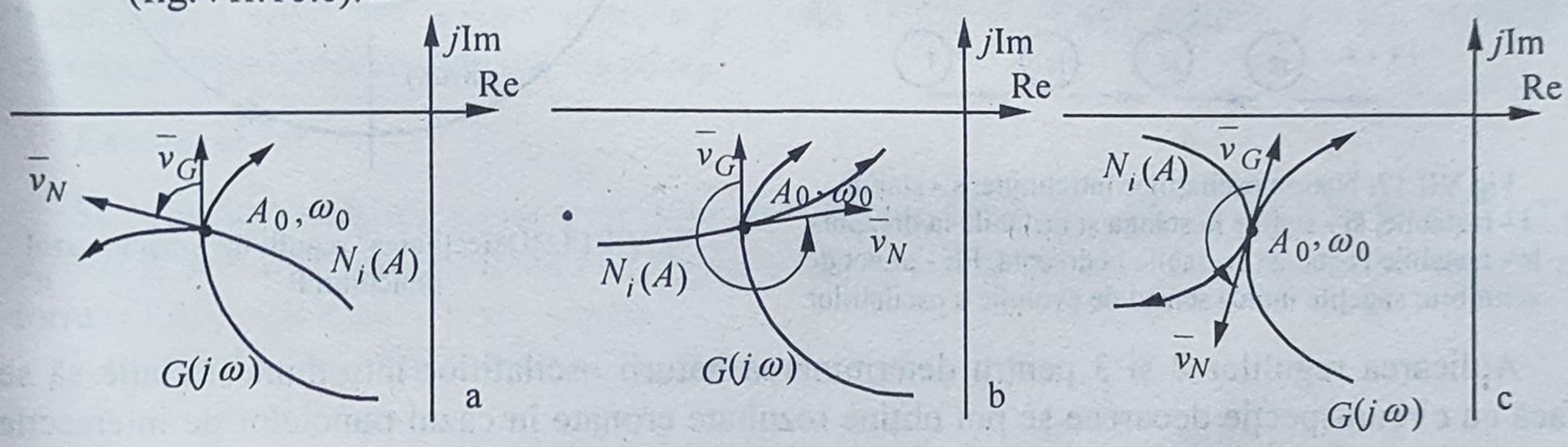


Fig.VII.16. Pentru ilustrarea regulei 3; oscilaţia întreţinută este: a - limită stabilă, b - limită instabilă, c - limită semistabilă

Evident, regula 3 poate fi folosită fără nici un fel de calcule, cu condiţia trasării prealabile a hodografelor $G(j\omega)$ şi $N_i(A)$, şi constă numai în evaluarea poziţiei relative a celor două locuri în zonele punctelor de intersecţie.

Exemplul 1.8

Se consideră sistemul automat de la exemplul 1.7. Se cere să se determine natura celor trei oscilaţii întreţinute.

Conform fig.VII.14 şi conform regulei 3 numai oscilaţia întreţinută caracterizată de $\omega_1 = 1$ şi $A_3 = 1{,}5$ este limită stabilă în timp ce celelalte două sunt limită instabile. Aceste constatări confirmă cele expuse în partea introductivă a acestei secţiuni şi permit o caracterizare mai detaliată a proprietăţilor sistemului. De exemplu dacă funcţionarea sistemului are loc la oscilaţia limită stabilă, orice perturbare a acesteia cu $0{,}83 < A < 1{,}5$, este urmată de revenirea la oscilaţia limită stabilă. Dacă $A < 0{,}83$, atunci pentru $t \to +\infty$, urmează $A \to 0$ şi sistemul ajunge în punctul de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$, care are caracter stabil. Dacă $A > 2{,}5$, atunci pentru $t \to +\infty$, urmează $A \to +\infty$.■

Din cele prezentate la exemplul 1.8 se trage concluzia că dacă cele două locuri au mai multe puncte de intersecţie, nici unul de tangenţă, atunci în mod logic, natura oscilaţiilor

întreținute, de exemplu în ordinea crescătoare a amplitudinilor lor, este cea prezentată în fig.VII.17.a,b. Dacă există şi puncte de tangență ale celor două locuri, atunci oscilațiile semistabile sunt stabile la dreapta, dacă se situează la stânga unei oscilații instabile - fig.VII.17.c, şi instabile la dreapta, dacă se situează la stânga unei oscilații stabile - fig.VII.17.d.

Oscilațiile limită stabile, numite şi *autooscilații,* sunt fenomene neliniare tipice. Ele nu au corespondent în cazul sistemelor automate liniare şi nu pot fi, principial, produse decât în cadrul sistemelor automate neliniare.

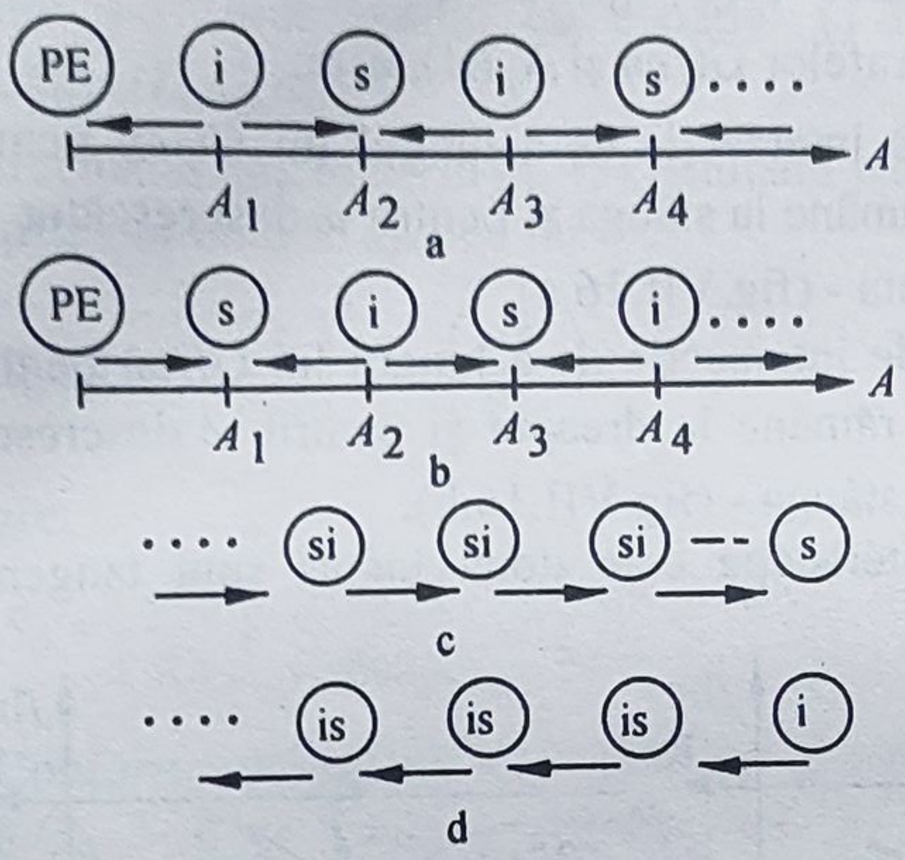


Fig.VII.17. Natura oscilațiilor întreținute: s - stabile, i - instabile, si - stabile la stânga şi instabile la dreapta, is - instabile la stânga şi stabile la dreapta, PE - punct de echilibru; săgețile indică sensul de evoluție a oscilațiilor

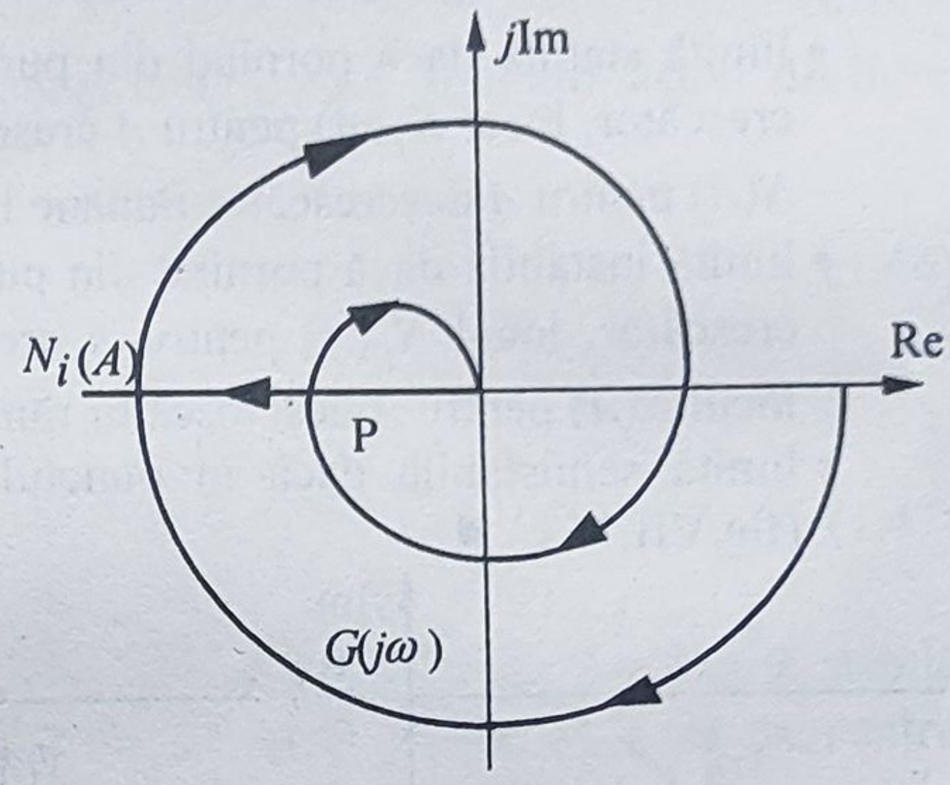


Fig.VII.18. "Defecțiunea" regulii lui Loeb în cazul punctului P

Aplicarea regulilor 2 şi 3 pentru determinarea naturii oscilațiilor întreținute trebuie să se facă cu circumspecție deoarece se pot obține rezultate eronate în cazul punctelor de intersecție ale celor două locuri situate în interiorul spiralei locului de transfer $G(j\omega)$. Un exemplu concludent în acest sens este acela pentru care neliniaritatea este un releu bipozițional (ideal) şi partea liniară, stabilă BIBO, este de forma $G(s)=(s^7+\alpha_1 s^6+a_2 s^5+\ldots+a_7)^{-1}$. Folosind procedeul celor două locuri, fig.VII.18, şi aplicând regula 3, rezultă că cele două oscilații întreținute sunt ambele limită stabile, ceea ce nu este plauzibil. În realitate, aşa cum arată rezultatele obținute prin simulare, oscilația întreținută corespunzătoare punctului P din fig.VII.18 este limită semistabilă (stabilă la stânga şi instabilă la dreapta).

Explicația "defecțiunii" regulii lui Loeb în cazul punctului P (fig.VII.18) este că la formularea acestei reguli nu s-au avut în vedere şi punctele de intersecție situate în interiorul spiralei locului de transfer $G(j\omega)$. Cu acest prilej mai trebuie remarcat că dacă ipoteza 4º de la 1.1.*a* nu este satisfăcută sau dacă în sistem apar oscilații întreținute de pulsații mult mai mici ca pulsația de tăiere a părții liniare, atunci rezultatele care se obțin cu ajutorul ecuației balanței armonice (1.32) por fi afectate de erori importante.

1.3. Stabilitatea punctului de echilibru

a. Preliminarii

La exemplul 1.8, în corelație cu natura oscilațiilor întreținute şi prin extensie contextuală, s-a afirmat că punctul de echilibru are caracter stabil.

Comparativ cu stabilitatea BIBO (definită la II.6.1) utilizarea termenului de stabilitate în conexiune cu punctul de echilibru are o semnificație fenomenologică diferită.

Pentru stabilirea unui cadru riguros în scopul examinării stabilității punctului de echilibru este necesară o abordare adecvată în domeniul timpului.

Fie un sistem dinamic neliniar descris de următoarea ecuație diferențială:

$$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbf{R}_+,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.49}$$

în care $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ şi vectorul x defineşte *starea sistemului*. Sistemului (1.49) i se asociază starea inițială:

$$x(t_0) = x_0, t_0 \in \mathbf{R}_+. \tag{1.50}$$

Se admite ipoteza că f este continuă şi lipschitziană (adică $\| f(y_1) - f(y_2) \| \le L \| y_1 - y_2 \|$, $L > 0$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n$) respectiv că problema de tip Cauchy (1.49), (1.50) admite soluția unică:

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0),\ t \ge t_0, \tag{1.51}$$

care defineşte traiectoria sistemului în $\mathbf{R}^n$ corespunzătoare stării inițiale (1.50).

Definiția 5

Starea $x = a$ = constant se numeşte *punct de echilibru* al sistemului (1.49) dacă:

$$f(a) = 0.\blacksquare \tag{1.52}$$

Noțiunea de punct de echilibru are semnificație fizică evidentă deoarece într-un astfel de punct viteza stării este nulă (pentru $x = a$ din (1.52) şi (1.49) rezultă $\dot{x} = 0$), traiectoria corespunzătoare reducându-se la un punct.

Exemplul 1.9

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.11, cu $G(p)$ de forma (1.23), $a_n \neq 0$ şi $m < n$ (în concordanță cu ipoteza 4° de la 1.1a). Se cere să se determine ecuația de forma (1.49) care descrie acest sistem.

Ecuațiile (1.27) pot fi scrise şi sub forma:

$$\Delta y = G(p)\Delta f(-\Delta y).$$

În ipoteza $m < n$ (fără a reduce generalitatea se consideră $m = n - 1$, urmând ca valoarea efectivă a lui m să fie dată de indicele primului coeficient nenul din şirul $b_{n-1}, \ldots, b_0$), cu notațiile: $\alpha_k = a_{n-k}/a_n, \beta_k = b_{n-k}/a_n, k = \overline{1,n}$, şi ținând seama de (1.23) se pot defini următoarele variabile de stare:

$$x_1 = \Delta y$$

$$x_2 = px_1 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 \Delta f(-x_1)$$

$$\text{----------}$$

$$x_n = px_{n-1} + \alpha_{n-1} x_1 - \beta_{n-1} \Delta f(-x_1).$$

Înlocuind $x_1, \ldots, x_n$ în ecuația sistemului rezultă:

$$px_n = -\alpha_n x_1 + \beta_n \Delta f(-x_1).$$

Explicitând acum $\dot{x}_i = px_i, i = \overline{1,n}$, din relațiile de mai sus se obține următoarea ecuație diferențială:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 x_1 + \beta_1 \Delta f(-x_1) + x_2 \\ -\alpha_2 x_1 + \beta_2 \Delta f(-x_1) + x_3 \\ \vdots \\ -\alpha_n x_1 + \beta_n \Delta f(-x_1) \end{bmatrix}.$$

Întrucât $\Delta f(0) = 0$ rezultă că punctul de echilibru al acestui sistem este $x = 0$ (respectiv $x_1 = 0, x_2 = 0,....,x_n = 0$) şi, cu referire la ecuaţiile (1.27), $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$.■

Definiţia 6

Punctul de echilibru $x = a$ al sistemului (1.49) se numeşte *stabil* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\|x_0 - a\| < \delta$ implică $\|x(t) - a\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$. Punctul de echilibru $x = a$ se numeşte *global stabil* dacă el este stabil pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$.■

Definiţia 7

Punctul de echilibru $x = a$ al sistemului (1.49) se numeşte *asimptotic stabil* dacă el este stabil şi $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - a\| = 0$. Punctul de echilibru $x = a$ se numeşte *global asimptotic stabil* dacă el este asimptotic stabil pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$.■

Definiţia 8

Punctul de echilibru $x = a$ al sistemului (1.49) se numeşte *instabil* dacă el nu este stabil. Punctul de echilibru $x = a$ se numeşte *global instabil* dacă el este instabil pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$.■

Din definiţiile 6 şi 7 rezultă că stabilitatea asimptotică implică stabilitatea. Distincţia necesară în acest context este următoarea: punctul de echilibru se numeşte *simplu stabil* (sau *neutral stabil*) dacă el este stabil dar nu este asimptotic stabil.

Trebuie de asemenea remarcat că în cazul utilizării atributului <<global>>, în mod necesar punctul de echilibru $x = a$ este unic.

S-a arătat că soluţia (1.51) defineşte traiectoria sistemului (1.49) în $\mathbf{R}^n$ corespunzătoare stării iniţiale (1.50). În cazul $n = 2$ reprezentarea traiectoriei se face în planul stărilor, fiind posibilă o interpretare geometrică simplă a definiţiilor 6 - 8. Pentru $a = 0$ inegalităţile $\|x\| < \varepsilon$ şi $\|x\| < \delta$, în care $\|\cdot\|$ este de exemplu norma euclideană, au ca imagini discuri mărginite de cercurile C_ε, C_δ, cu centrul în origine şi de raze ε, δ.

Dacă originea planului stărilor este un punct de echilibru stabil al sistemului (1.49), atunci oricare ar fi cercul C_ε, există în interiorul său un cerc C_δ, astfel încât orice traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ (evoluţia are loc datorită perturbării sistemului din punctul de echilibru $x = 0$ prin alocarea, într-un mod oarecare, la $t = t_0$, a stării iniţiale x_0) rămâne în interiorul lui C_ε - fig.VII.19.a.

Dacă originea planului stărilor este un punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (1.49), atunci orice traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ rămâne în C_ε şi în plus ea converge, în timp, către origine - fig.VII.19.b.

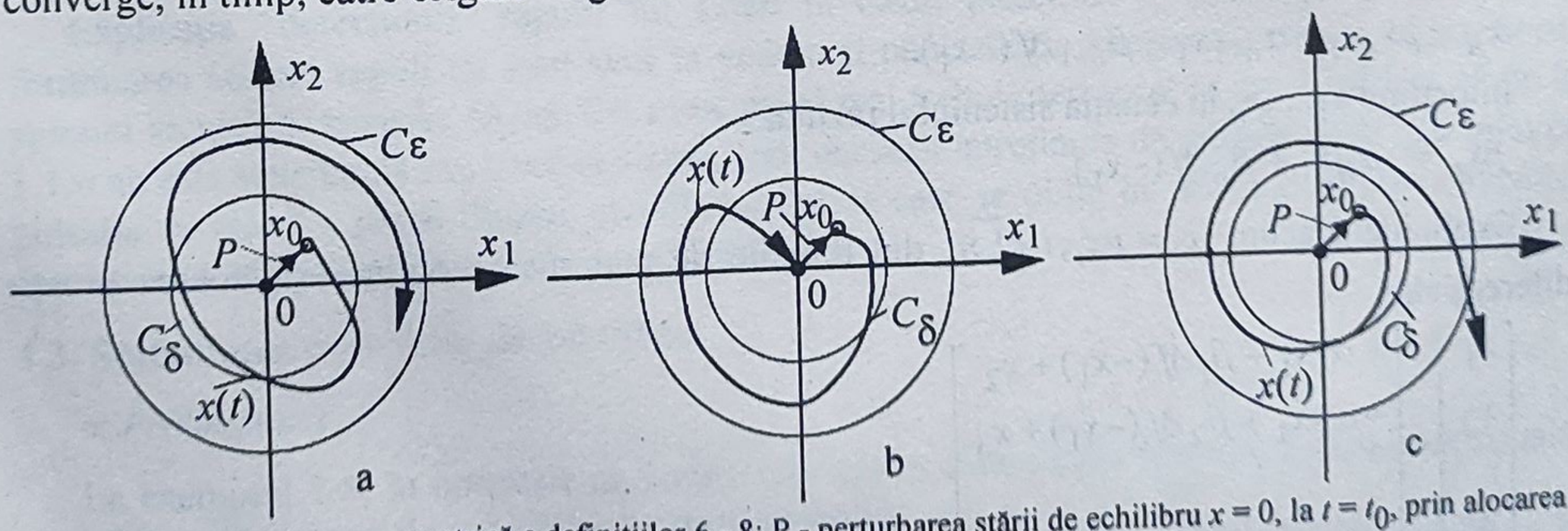


Fig.VII.19. Interpretarea geometrică a definiţiilor 6 - 8; P - perturbarea stării de echilibru $x = 0$, la $t = t_0$, prin alocarea stării iniţiale x_0; punctul de echilibru este: a - stabil (neutral), b - asimptotic stabil, c - instabil

O comportare contrară aceleia din fig.VII.19.a, respectiv există un C_ε astfel încât pentru orice C_δ există o traiectorie care porneşte din interiorul lui C_δ şi nu rămâne în interiorul lui C_ε, arată că originea este un punct de echilibru instabil al sistemului (1.49) - fig.VII.19.c.

O examinarea comparativă a noţiunilor introduse prin definiţiile 6 - 8 conduce la constatarea că, din punct de vedere calitativ - practic, situaţia cea mai avantajoasă (dezirabilă) este ca punctul de echilibru să fie global asimptotic stabil.

b. Cazul sistemelor liniare

Pentru a investiga natura structural-parametrică a noţiunii de stabilitate asimptotică şi pentru determinarea unei conexiuni cu stabilitatea BIBO se analizează în continuare cazul sistemelor liniare.

Se consideră sistemul (1.49) particularizat sub forma:

$$\dot{x} = Ax,\ t \in \mathbf{R}_+,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.53}$$

în care A este o matrice pătratică de ordinul n, cu elemente reale constante.

Sistemul (1.53) are ca punct de echilibru $x = 0$.

Fie $\Delta(s) = \det(I_n s - A)$ polinomul caracteristic al matricei A (I_n este matricea unitate de ordinul n) şi fie λ_i, $i = \overline{1,r}$, valorile proprii distincte ale matricei A, fiecare de multiplicitate q_i, cu $\sum_{i=1}^{r} q_i = n$. Se ştie că valorile proprii sunt zerourile polinomului caracteristic.

Teorema 2

Punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.53) este global asimptotic stabil dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt situate în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.■

$\mathcal{D}$. Pentru a obţine soluţia problemei (1.53), (1.50), cu $t_0 = 0$, se aplică ecuaţiei (1.53) transformarea Laplace cu condiţia iniţială (1.50). Se obţine:

$$X(s) = -(I_n - A)^{-1} x_0 \equiv -\frac{1}{\Delta(s)} \mathrm{adj}(I_n s - A) x_0 .$$

Revenind la domeniul timpului (prin aplicarea teoremei dezvoltării, Anexa A, 1.2.b) rezultă:

$$x(t) = -\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{1}{(q_i - j)!} A_{ij} t^{q_i - j} e^{\lambda_i t} x_0, \quad t \geq 0, \tag{1.54}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s - \lambda_i)^{q_i} (I_n s - A)^{-1} \right] \right\}_{s=\lambda_i}, \quad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,q_i}.$$

În conformitate cu definiţia 7 punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.53) este global asimptotic stabil dacă şi numai dacă $\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0$, $i = \overline{1,r}$.■

Exemplul 1.10

Pentru a examina posibila legătură între stabilitatea asimptotică şi stabilitatea BIBO şi pentru simplitatea expunerii se consideră sistemul de la exemplul 1.9 în care $\Delta f(-\Delta y) \equiv 0$. În această situaţie este activă numai partea liniară reprezentată de $G(p)$ (relaţia (1.23) - raportul a două polinoame relativ prime între ele) care este la originea ecuaţiei diferenţiale (1.53) în care:

$$A=\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

este o matrice de tip Frobenius.

Potrivit teoremei 2 stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru $x = 0$ este echivalentă cu $\{vp\}\subset\{\text{Re } s < 0\}$, unde $\{vp\}$ este mulţimea valorilor proprii ale matricei A, care sunt de fapt zerourile polinomului caracteristic $\Delta(s)=\det(I_n s-A)$. Se poate demonstra relativ uşor că pentru A de tip Frobenius se obţine $\Delta(s)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$.

Pe de altă parte se ştie (teorema 2 de la II.6.2) că stabilitatea BIBO a sistemului descris de $G(s)$ (din care provine $G(p)$) este echivalentă cu $\{p\}\subset\{\text{Re } s < 0\}$, unde $\{p\}$ este mulţimea polilor lui $G(s)$. Din (1.23) rezultă că polinomul (monic) al polilor este $p(s)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$, cu $\alpha_i = a_{n-i}/a_n, i=\overline{1,n}$, (notaţii introduse la exemplul 1.9).

Întrucât în acest caz $\Delta(s) \equiv p(s)$ se trage concluzia că stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru este echivalentă cu stabilitatea BIBO a sistemului.

În cazul general se demonstrează că $\{p\} \subseteq \{vp\}$ ceea ce permite să se afirme că stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru implică stabilitatea BIBO a sistemului. Evident implicaţia inversă este adevărată numai dacă $\{p\} = \{vp\}$.■

c. Stabilitatea asimptotică în primă aproximaţie

Fie un sistem dinamic neliniar descris de ecuaţia (1.49) în care se pot separa un termen liniar şi un termen neliniar, de forma;

$$\dot{x}=Ax+g(x),\quad t\in\mathbf{R}_+,\quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{1.55}$$

unde $g(x)$ este o funcţie neliniară, continuă, cu $g(0) = 0$.

Sistemul (1.55) are punctul de echilibru $x = 0$. Pentru orice alt punct de echilibru $x = a \neq 0$ cu $Aa + g(a) = 0$, se face translaţia $\tilde{x} = x - a$ şi ecuaţia (1.55) devine: $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{g}(\tilde{x})$ cu $\tilde{g}(\tilde{x})=Aa+g(\tilde{x}+a)$, pentru care punctul de echilibru este $\tilde{x} = 0$.

Ecuaţia (1.53), cu acelaşi punct de echilibru ($x = 0$) este aproximanta liniară a ecuaţiei (1.55).

Soluţia sistemului (1.53), cu condiţia iniţială (1.50) şi $t_0 = 0$, are forma:

$$x(t)=X(t)x_0,\quad t\in\mathbf{R}_+, \tag{1.56}$$

în care $X(t)$ este matricea fundamentală a sistemului (1.53), cu $\det X(t)\neq 0$, $t \in \mathbf{R}_+$, a cărei expresie analitică poate fi lesne identificată în (1.54).

În ipoteza că aproximanta liniară (1.53) are punctul de echilibru asimptotic stabil, există constantele $N > 0$ şi $\alpha > 0$ astfel încât:

$$\|X(t)\| \le Ne^{-\alpha t},\ t\in\mathbf{R}_+. \tag{1.57}$$

De exemplu, cu notaţiile $A_0 = \max_{i,j}\|A_{ij}\|$, $a = \max_i \text{Re}\lambda_i$ şi $q = \max_i q_i$, cele două constante se pot alege după cum urmează: pentru $q = 1$, $N = A_0 n$ şi $\alpha = -a$; pentru $q > 1$, $N=[-(q-1)e^{-1}(a+\alpha)^{-1}]^{q-1}A_0 qr$, $0<\alpha<-a$.

Din (1.56) şi (1.57) urmează că pentru soluţia aproximantei liniare (1.53) se poate scrie:

$$\|x(t)\| \le N\|x_0\|e^{-\alpha t},\ t\in\mathbf{R}_+. \tag{1.58}$$

Acest rezultat prilejuieşte particularizarea definiţiei 8 sub următoarea formă:

Definiția 9

Punctul de echilibru $x = a$ al sistemului (1.49) se numește *exponențial asimptotic stabil* dacă el este stabil și există $N > 0$ și $\alpha > 0$ astfel încât soluția (1.51) satisface inegalitatea $\|x(t)-a\| \le Ne^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \ge t_0$. Punctul de echilibru se numește *global exponențial asimptotic stabil* dacă el este exponențial asimptotic stabil pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$.■

În mod evident stabilitatea exponențial asimptotică implică stabilitatea asimptotică. Implicația inversă nu are loc în general. În cazul sistemului liniar (1.53), pe baza inegalității (1.58), rezultă că stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru $x = 0$ este echivalentă cu stabilitatea exponențial asimptotică globală a respectivului punct.

Cu aceste elemente pregătitoare se poate formula următorul rezultat privitor la sistemul (1.55) și la aproximantul liniar (1.53)

Teorema 3 (Poincaré-Liapunov)

Sistemul (1.55) satisface următoarele ipoteze:

1° Punctul de echilibru $x = 0$ al aproximantului liniar (1.53) este exponențial asimptotic stabil.

2° $g(x)$ satisface inegalitatea $\|g(x)\| \le L\|x\|$ cu $L > 0$, suficient de mic.

Atunci punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.55) este exponențial asimptotic stabil.■

$\mathcal{D}$. Pentru $t_0 = 0$ aplicând metoda variației constantelor pentru ecuația (1.55) cu (1.56) se obține:

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(\theta)g(x(\theta))d\theta, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Trecând la norme în această ecuație și ținând seama de (1.58) și ipotezele 1° și 2° rezultă:

$$\|x(t)\| \le N\|x_0\|e^{-\alpha t} + LN\int_0^t e^{-\alpha(t-\theta)}\|x(\theta)\|d\theta, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Se înmulțește această inegalitate cu $e^{\alpha t}$ și se introduc notațiile: $y(t) = \|x(t)\|e^{\alpha t}$, $M = N\|x_0\|$ și $a = LN$. Se obține: $y(t) \le M + a\int_0^t y(\theta)d\theta$. Înmulțind cu a și făcând notația $z(t) = a\int_0^t y(\theta)d\theta$ se ajunge la inegalitatea diferențială: $\dot{z}(t) \le az + Ma$. Integrând de la 0 la t cu $z(0) = 0$ rezultă $z(t) \le Me^{at} - M$. Revenind la funcția $y(t)$ (prin înlocuirea lui $z(t)$) și ținând seama de inegalitatea pe care acesta o satisface, după calcule elementare se obține: $y(t) \le Me^{at}$, $t \in \mathbf{R}_+$. Înlocuind acum $y(t)$, M și a se constată că soluția sistemului (1.55) satisface inegalitatea: $\|x(t)\| \le N\|x_0\|e^{-(\alpha - L/N)t}$, $t \in \mathbf{R}_+$. Pentru $L < \alpha/N$ rezultă că punctul de echilibru $x = 0$ al sistemului (1.55) este exponențial asimptotic stabil.■

d. Regula lui Kochenburger

În cazul sistemelor automate cu neliniarități care realizează $\Delta v = 0$ pentru $\Delta u \in (-\alpha, \alpha)$ sau $\Delta u \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, cum sunt releul, zona de insensibilitate și jocul în angrenaje (α se concretizează respectiv conform fig.VII.1, fig.VII.2.b și d), toate punctele intervalului $(-\alpha, \alpha)$ (sau $[-\alpha, \alpha]$) pot fi puncte de echilibru. Ele constituie o *zonă de echilibru* și prin convenție se tratează de regulă ca un punct de echilibru unic.

Existența unor oscilații întreținute într-un sistem automat neliniar implică faptul că punctul de echilibru (dacă există) nu este global asimptotic stabil. În acest context procedeul celor două locuri, prin analogie cu cazul sistemelor automate liniare, permite o extensie naturală a criteriului de stabilitate Nyquist pentru cazul sistemelor automate neliniare. Comparativ cu

acesta (teorema 7 de la VI.4.2.a) aici rolul punctului critic $(-1, j0)$ este jucat de locul de descriere invers negativ $N_i(A)$. Din acest motiv $N_i(A)$ se mai numeşte *locul critic*.

Regula 5 (Kochenburger)

Punctul de echilibru (unic) $\Delta y=0$, $\Delta v=0$, $\Delta u=0$ al sistemului automat în forma standard (fig.VII.11) este global asimptotic stabil dacă la parcurgerea locului de transfer $G(j\omega)$, în sensul crescător al lui ω, locul critic $N_i(A)$ rămâne la stânga şi complet în afara locului $G(j\omega)$.■

e. Aplicaţie: sistem automat de poziţionare

Pentru sistemul automat de poziţionare de la VI.4.2.b, în ipoteza liniarităţii, s-a adoptat un regulator PDT_1 care asigură o stabilitate relativă BIBO satisfăcătoare. În sistemul real se pot identifica uşor unele neliniarităţi accidentale. Dintre acestea jocul în angrenaje (care este prezent în reductorul Rm, fig.VI.35) poate influenţa negativ stabilitatea. Se cere să se evalueze efectul acestei neliniarităţi asupra stabilităţii punctului de echilibru.

Sistemul automat are o zonă de echilibru pentru $|\Delta\theta| \le 2\theta_\varepsilon$ (θ este unghiul axului servomotorului - fig.VI.35; θ_ε este semijocul în angrenaje şi are semnificaţia lui ε din fig.VII.2.d). Datorită componentei I existente în $G(s)$ (polul $s = 0$) este posibilă realizarea condiţiilor $\dot\theta = 0$ (axul servomotorului în repaus), $e = 0$, $e_u = e_y$ şi $u = y$ care definesc situaţia de echilibru. Din acest motiv zona de echilibru poate fi tratată ca un punct de echilibru unic.

Funcţia de descriere a neliniarităţii de tip joc în angrenaje, cu notaţiile din fig.VII.2d are expresia:

$$N(A)=\frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2\varepsilon}{A}\right)+2\left(1-\frac{2\varepsilon}{A}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{A}-\frac{\varepsilon^2}{A^2}}+j4\left(\frac{\varepsilon^2}{A^2}-\frac{\varepsilon}{A}\right)\right],\quad A\ge\varepsilon.$$

Conform tabelului:

A/ε	1	1,25	1,66	2,5	5	$+\infty$
$\lvert N(A)\rvert/k$	0	0,322	0,576	0,695	0,775	1
$\arg N(A)$	$-90°$	$-38°$	$-32°$	$-26°$	$-15°$	$0°$
$k\lvert N_i(A)\rvert$	$+\infty$	3,1	1,74	1,44	1,29	1
$\arg N_i(A)$	$-90°$	$-142°$	$-148°$	$-154°$	$-165°$	$-180°$

şi conform fig.VI.39 hodografele $N_i(A)$ şi $G(j\omega)$ ($\equiv G_{d_2}(j\omega)$) au formele din fig.VII.20.

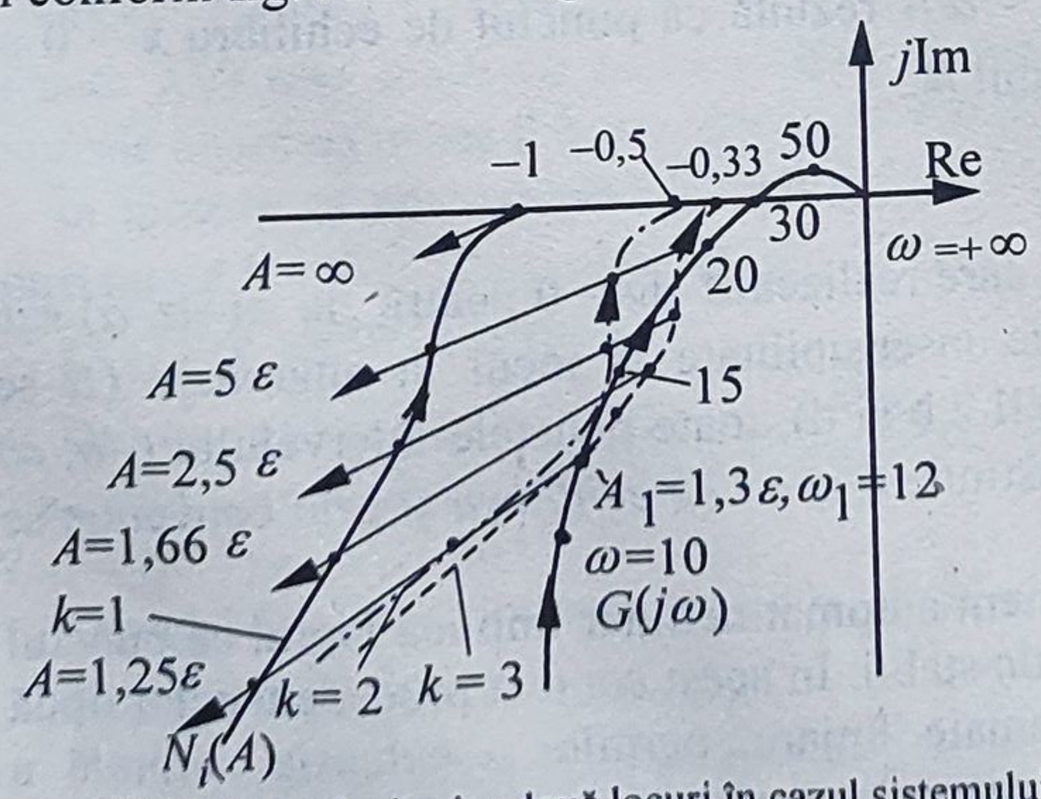


Fig.VII.20. Procedeul celor două locuri în cazul sistemului automat cu neliniaritate de tip joc în angrenaje

Întrucât raportul de transmisie k_2 al reductorului Rm a fost inclus în $G(s)$, se consideră $k = 1$, ceea ce corespunde situaţiei în care locul critic $N_i(A)$ trece prin punctul $-1+j0$. Conform regulei 4 punctul de echilibru este global asimptotic stabil. Dacă raportul de transmisie creşte, şi anume de k ori, atunci locul critic $N_i(A)$ se deplasează omotetic spre dreapta, ajungându-se, pentru $k = 2$, la un punct de tangenţă între hodografele $N_i(A)$ şi $G(j\omega)$. Se trage concluzia că punctul de echilibru este global asimptotic stabil pentru $0 < k < 2$. Pentru $k \ge 2$ în

sistemul automat apar oscilaţii întreţinute; de exemplu pentru $k = 3$ oscilaţiile întreţinute sunt $\Delta u(t) = 1{,}3\,\varepsilon \sin 12t$ şi $\Delta u(t) = 4\,\varepsilon \sin 19t$, prima fiind limită instabilă şi a doua - limită stabilă.

f. Criteriul Bilharz

Ecuaţia balanţei armonice (1.32) mai poate fi utilizată pentru studiul stabilităţii asimptotice pe baza localizării rădăcinilor în planul complex.

Ţinând seama că $G(s) = kz(s)/p(s)$, în care $p(s)$ şi $z(s)$ sunt respectiv polinomul polilor şi polinomul zerourilor (ambele monice şi relativ prime între ele), ecuaţia (1.32), în care se înlocuieşte polinomul polilor (analogul cazului liniar):

$$p_0(s, A) = p(s) + kN(A)z(s). \tag{1.59}$$

Regula 6

Punctul de echilibru unic $\Delta y = 0, \Delta v = 0, \Delta u = 0$ al sistemului automat în forma standard (fig.VII.11) este global asimptotic stabil dacă polinomul $p_0(s,A)$ este hurwitzian pentru toţi $A \geq 0$.■

În cazul neliniarităţilor multivalente $N(A)$ este o funcţie complexă, ceea ce înseamnă că polinomul (1.59) are coeficienţi numere complexe. Pentru aplicarea criteriilor Hurwitz, Routh etc au fost necesare extinderi adecvate. Se prezintă în continuare o generalizare la cazul complex a criteriului Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4).

Fie:

$$\Delta(s) = s^n + (a_{R_1} + ja_{I_1})s^{n-1} + (a_{R_2} + ja_{I_2})s^{n-2} + \ldots + (a_{R_n} + ja_{I_n}), \tag{1.60}$$

în care $a_{R_i}, a_{I_i} \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$, pentru care se defineşte matricea Bilharz de ordinul $2n$:

$$\mathbf{B}_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{I_1} & -a_{R_2} & -a_{I_2} & a_{R_4} & a_{I_5} & -a_{R_6} & -a_{I_7} & \cdots \\ 0 & a_{R_1} & a_{I_2} & -a_{R_3} & -a_{I_4} & a_{R_5} & a_{I_6} & -a_{R_7} & \cdots \\ 0 & 1 & a_{I_1} & -a_{R_2} & -a_{I_3} & a_{R_4} & a_{I_5} & -a_{R_6} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{R_1} & a_{I_2} & -a_{R_3} & -a_{I_4} & a_{R_5} & a_{I_6} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{I_1} & -a_{R_2} & -a_{I_3} & a_{R_4} & a_{I_5} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{R_1} & a_{I_2} & -a_{R_3} & -a_{I_4} & a_{R_5} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

în care $a_{R_i} = a_{I_i} = 0$ pentru $i > n$.

Teorema 4 (Bilharz)

Polinomul (1.60) este hurwitzian dacă şi numai dacă:

$$\det \mathbf{B}_{2k} > 0, k = \overline{1,n}. \blacksquare \tag{1.62}$$

O extindere similară s-a dat şi metodei locului rădăcinilor (cap.V). Utilizarea ei este limitată datorită complicaţiilor pe care le introduce dependenţa zerourilor polinomului (1.59) de amplitudinea A.

Exemplul 1.11

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.11 în care neliniaritatea este un releu tripoziţional cu histerezis (fig.VII.1) şi $G(s)=1/[s(s+1)]$. Acesta este un sistem automat de

poziționare; o simplă comparație cu sistemul de la VI.4.2.b, în care regulatorul este releul (realizabil cu amplificator operațional) şi parametrii părții liniare au valori adecvate, confirmă acest fapt. Se cere să se determine parametrii releului pentru care punctul de echilibru este global asimptotic stabil.

Conform fig.VII.1 sistemul are zona de echilibru $|\Delta u| < a$. Datorită polului $s = 0$ existent în $G(s)$ este posibilă realizarea condițiilor $\Delta v = 0$, $\Delta \dot{u} = 0$ (axul servomotorului în repaus) ceea ce permite tratarea zonei de echilibru ca punct de echilibru unic.

Funcția de descriere a fost determinată la exemplul 1.1. În conformitate cu (1.59) polinomul $p_0(s, A) = s^2 + s + \alpha - j\beta$, în care $\alpha = 2ab(\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2})/(\pi A^2)$, cu $A \geq a$, şi $\beta = 2ab(1-q)/(\pi A^2)$. Matricea Bilharz (1.61) asociată are forma:

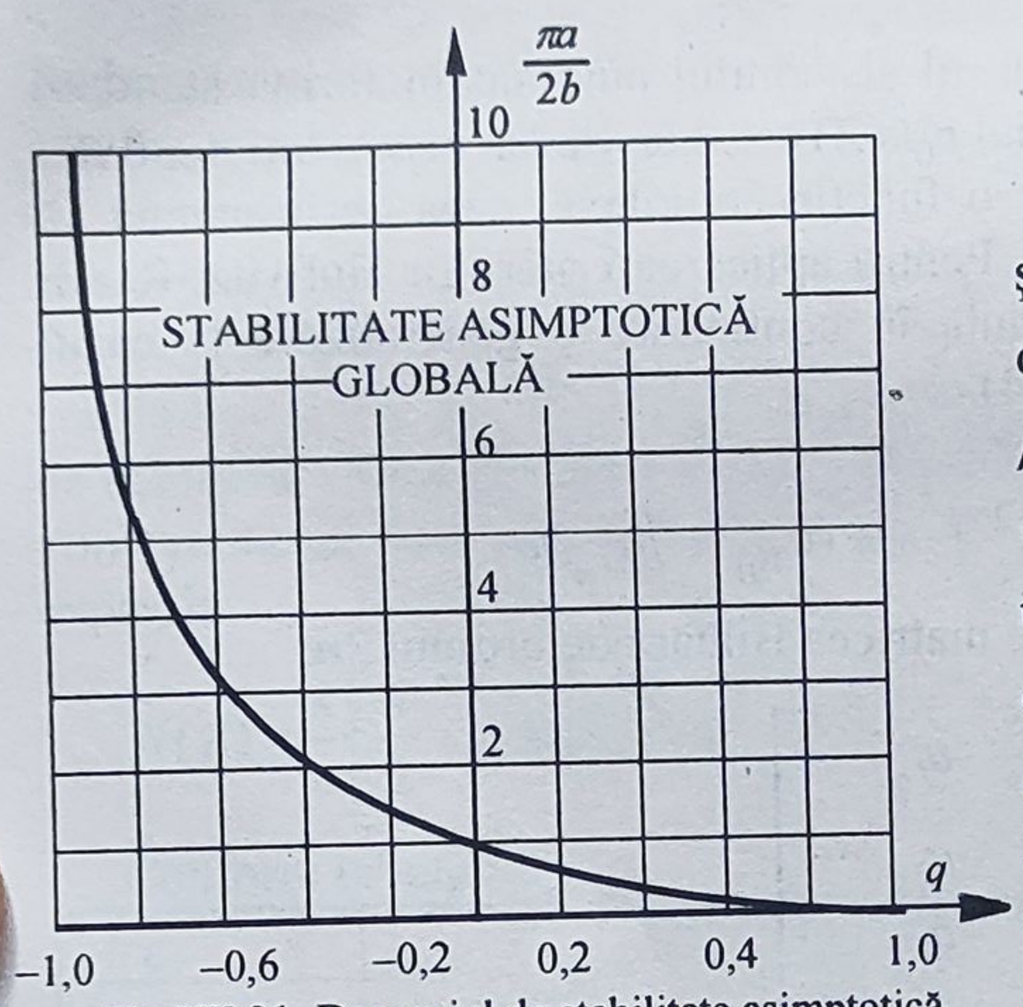


Fig.VII.21. Domeniul de stabilitate asimptotică globală a punctului de echilibru la exemplul 1.11

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{bmatrix}$$

şi conform condiției (1.62) rezultă $\det\mathbf{B}_2 = 1$ şi $\det\mathbf{B}_4 = \alpha - \beta^2 > 0$. Cu notațiile utilizate pentru α şi β din ultima inegalitate rezultă în mod evident: $\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2} > 2ab(1-q)^2/(\pi A^2)$ care trebuie să aibă loc pentru orice $A \geq a$. Întrucât expresia $A^2(\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2})$ este monoton crescătoare pentru $A \geq a$, rezultă că ultima inegalitate are loc pentru orice $A \geq 0$ dacă şi numai dacă ea are loc pentru $A = a$. Aceasta conduce la rezultatul: $a > 2b(1-q)\sqrt{(1-q)/(1+q)}/\pi, |q| \neq 1$. Domeniul corespunzător de stabilitate asimptotică este reprezentat în fig.VII.21.■

g. Stabilitatea asimptotică în mic

În situația în care într-un sistem automat neliniar există oscilații întreținute, în funcție de natura celei mai apropiate de punctul de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$, respectiv a celei de amplitudinea A_1 cea mai mică, se pot face următoarele afirmații:

1° Punctul de echilibru este instabil dacă oscilația de amplitudinea A_1 este limită stabilă sau limită stabilă la stânga - fig.VII.17.b,c.

2° Punctul de echilibru este asimptotic stabil (se spune şi <<în mic>>, adică pentru $0 < A < A_1$) dacă oscilația de amplitudinea A_1 este limită instabilă sau limită instabilă la stânga - fig.VII.17.a,d.

În ambele cazuri amplitudinea A_1 se determină prin procedeul celor două locuri (regula 1 de la 1.1.*e*), iar natura oscilației întreținute se evaluează cu regula lui Loeb (regula 3 de la 1.2.*b*). În cazul 2° determinarea lui A_1 corespunde domeniului $|\Delta u| < A_1$ pentru care punctul de echilibru este asimptotic stabil. Astfel, pentru sistemul de la exemplul 1.6 (în care pentru $\Delta u = 0$ este formal necesar, pentru existența punctului de echilibru, ca $\Delta v = b\,\mathrm{sgn}\,0 = 0$) punctul de echilibru este instabil deoarece singura oscilație întreținută este limită stabilă. În schimb,

sistemul de la exemplul 1.7 are punctul de echilibru asimptotic stabil în mic şi anume pentru $|\Delta u| < 0{,}83$, deoarece oscilaţia întreţinută de amplitudinea cea mai mică ($A_1 = 0{,}83$) este limită instabilă. Şi în cazul sistemului automat de poziţionare de la 1.3.*e*, pentru $k = 3$, punctul de echilibru este asimptotic stabil pentru $|\Delta u| < 1{,}3\varepsilon$ deoarece oscilaţia întreţinută de amplitudinea cea mai mică ($A_1 = 1{,}3\varepsilon$) este limită instabilă (fig.VII.20).

1.4. Problema stabilizării

a. Posibilităţi de stabilizare

Stabilizarea sistemelor automate neliniare constă în satisfacerea regulei 4 şi anume: prin deplasarea spre dreapta a hodografului $G(j\omega)$ şi/sau prin deplasarea spre stânga a hodografului $N_i(A)$ astfel încât distanţa minimă dintre acestea să asigure calităţi de stabilitate satisfăcătoare. Realizarea stabilizării, corespunzător afirmaţiei precedente, constă în introducerea unor elemente de corecţie liniare şi/sau neliniare, plasate adecvat în schema bloc structurală, astfel încât să se producă deplasările necesare ale celor două locuri.

Soluţia cea mai simplă constă în utilizarea unor elemente de corecţie de tip serie. De pildă în cazul sistemului automat de poziţionare de la 1.3.*e*, fig.VII.20, pentru cazul $k = 3$ se poate introduce o neliniaritate de tip zonă de insensibilitate (fig.VII.2, cu parametri adecvaţi), înainte de neliniaritatea de tip joc în angrenaje - fig.VII.2.d (adică între SM şi Rm, fig.VI.35) prin care se produce o deplasare spre stânga a locului de descriere invers negativ rezultant astfel încât cele două locuri să nu se mai intersecteze şi, mai mult, să existe între ele o distanţă suficient de mare astfel încât calitatea stabilităţii asimptotice a punctului de echilibru să fie satisfăcătoare.

O altă soluţie este prezentată în fig.VII.22, în care $N_c(A)$ este funcţia de descriere a elementului corector neliniar şi $G_{c1}(p)$, $G_{c2}(p)$ corespund funcţiilor de transfer $G_{c1}(s)$, $G_{c2}(s)$ ale elementelor corectoare liniare. Conform acestei scheme (în care cele două neliniarităţi au aceeaşi mărime de intrare) ecuaţia balanţei armonice are forma:

$$G_{c1}(j\omega)G_{c2}(j\omega)N_c(A)+G_{c1}(j\omega)G(j\omega)N(A)+1=0. \tag{1.63}$$

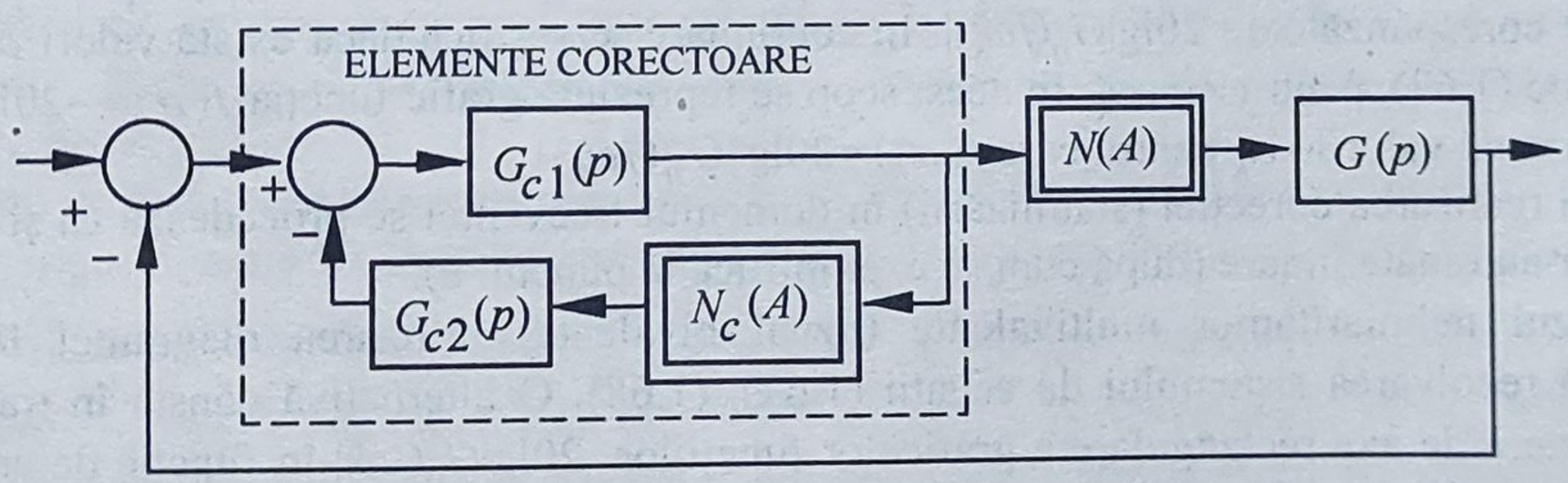


Fig.VII.22. O posibilitate de stabilizare a unui sistem automat neliniar

Dacă se adoptă $N_c(A) = N(A)$, atunci din (1.63) rezultă:

$$G_{c1}(j\omega)[G_{c2}(j\omega)+G(j\omega)]N(A)+1=0,$$

ceea ce permite alegerea adecvată a elementelor de corecţie liniare.

Dacă se adoptă $G_{c2}(j\omega) = G(j\omega)$, atunci din (1.63) se obţine:

$$G_{c1}(j\omega)G_{c2}(j\omega)[N_c(A)+N(A)]+1=0,$$

ceea ce permite alegerea unei neliniarităţi adecvate.

În fine, dacă se adoptă $N_c(A) = 1 - N(A)$, $G_{c2}(j\omega) = G(j\omega)$, atunci din (1.63) rezultă:

$$G_{c1}(j\omega)G_{c2}(j\omega)+1=0,$$

ceea ce este echivalent cu o compensare a neliniarității $N(A)$ și transformarea sistemului într-un sistem automat liniar. Determinarea efectivă a neliniarității de corecție se poate face cu ajutorul formulei de inversiune (1.21) de la 1.1.*b*.

b. Utilizarea diagramei Bode

Utilizarea în proiectare a ecuației balanței armonice și a procedeului celor două locuri este însoțită în primul rând de dificultăți de calcul. Având în vedere că metoda funcției de descriere este esențialmente frecvențială, orientarea spre utilizarea diagramei Bode atât pentru analiza stabilității cât și pentru rezolvarea problemei stabilizării este pe deplin naturală.

Pentru mai multă flexibilitate în manipularea diagramei Bode funcția de descriere se pune sub forma:

$$N(A) = k_n N_n(\alpha), \quad \alpha = A/a, \tag{1.64}$$

unde k_n este un coeficient de normare, a este un parametru al neliniarității, α este amplitudinea normată și $N_n(\alpha)$ este funcția de descriere normată.

Înlocuind (1.64) în (1.32) se obține:

$$N_n(A)G_n(j\omega)+1=0, \tag{1.65}$$

unde:

$$G_n(j\omega) = k_n G(j\omega) \tag{1.66}$$

este răspunsul la frecvență normat al părții liniare.

Ecuația (1.65) este echivalentă cu:

$$20\lg|G_n(j\omega)| = -20\lg|N_n(A)| \tag{1.67}$$

$$\arg G_n(j\omega) = (2k+1)\pi - \arg N_n(A), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{1.68}$$

Dacă neliniaritatea este univalentă, atunci $\arg N_n(\alpha) = 0$ și ecuația (1.68) devine:

$$\arg G_n(j\omega) = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Determinarea oscilațiilor întreținute constă în următoarele. Din diagrama Bode a părții liniare se obțin pulsațiile ω_k pentru care $\arg G_n(j\omega)$ ia valorile: $-\pi$, -3π,...., și apoi se măsoară atenuările corespunzătoare $20\lg|G_n(j\omega_k)|$. În continuare se verifică dacă există valori α_k pentru care are loc (1.67), pentru $\omega = \omega_k$. În acest scop se reprezintă grafic funcția $f(\alpha)=-20\lg|N_n(\alpha)|$ și se determină valorile α_k pentru care $f(\alpha_k)=20\lg|G_n(j\omega_k)|$.

Pentru realizarea corecției (stabilizării) în domeniul frecvenței se procedează ca și în cazul sistemelor automate liniare (după cum se exemplifică la punctul *c*).

În cazul neliniarităților multivalente (uzual bivalente) utilizarea diagramei Bode nu facilitează rezolvarea sistemului de ecuații (1.67), (1.68). O alternativă constă în trasarea în același sistem de axe rectangulare a graficelor funcțiilor $20\lg|G_n(j\omega)|$ în funcție de $\arg G_n(j\omega)$ (diagrama Nichols, utilizabilă și în cazul liniar) și $-20\lg|N_n(A)|$ funcție de $\arg N_n(A)$ și determinarea oscilațiilor întreținute pe baza punctelor de intersecție ale celor două grafice.

c. Aplicație: sistem automat de reglare a temperaturii

Se consideră un sistem automat de reglare a temperaturii unui cuptor, cu schema bloc structurală standard din fig.VII.11, în care $G(s) = 0{,}128e^{-5s}/[s(10s+1)(5s+1)$ și $N(A)$ reprezintă un regulator de tip P cu saturație (neliniaritate accidentală). Conform notațiilor din fig.VII.2.a, $N(A) = 2k[\arcsin(a/A) + a\sqrt{1-a^2/A^2}/A]/\pi, A \geq a$. Se cere să se stabilizeze acest sistem.

Introducând $\alpha = A/a$ și coeficientul de normare $k_n = k = 2{,}5$, se definește $f(\alpha) = -20\lg 2(\arcsin(1/\alpha) + \sqrt{1-1/\alpha^2}/\alpha)/\pi, \alpha \geq 1$, al cărei grafic este reprezentat în fig.VII.23.

Răspunsul la frecvență normat are expresia: $G_n(j\omega) = 0{,}32e^{-5j\omega}/[j\omega(10j\omega+1)(5j\omega+1)]$ și diagrama Bode este reprezentată în fig.VII.24.

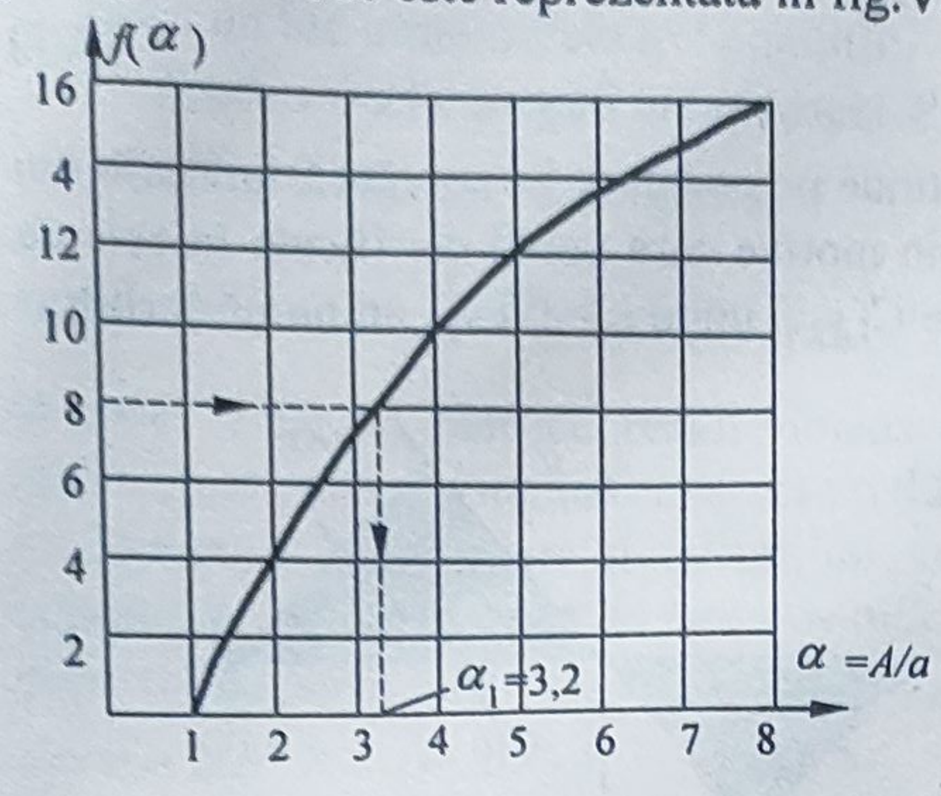


Fig.VII.23. Graficul funcției $f(\alpha)$ la aplicația: sistem automat de reglare a temperaturii

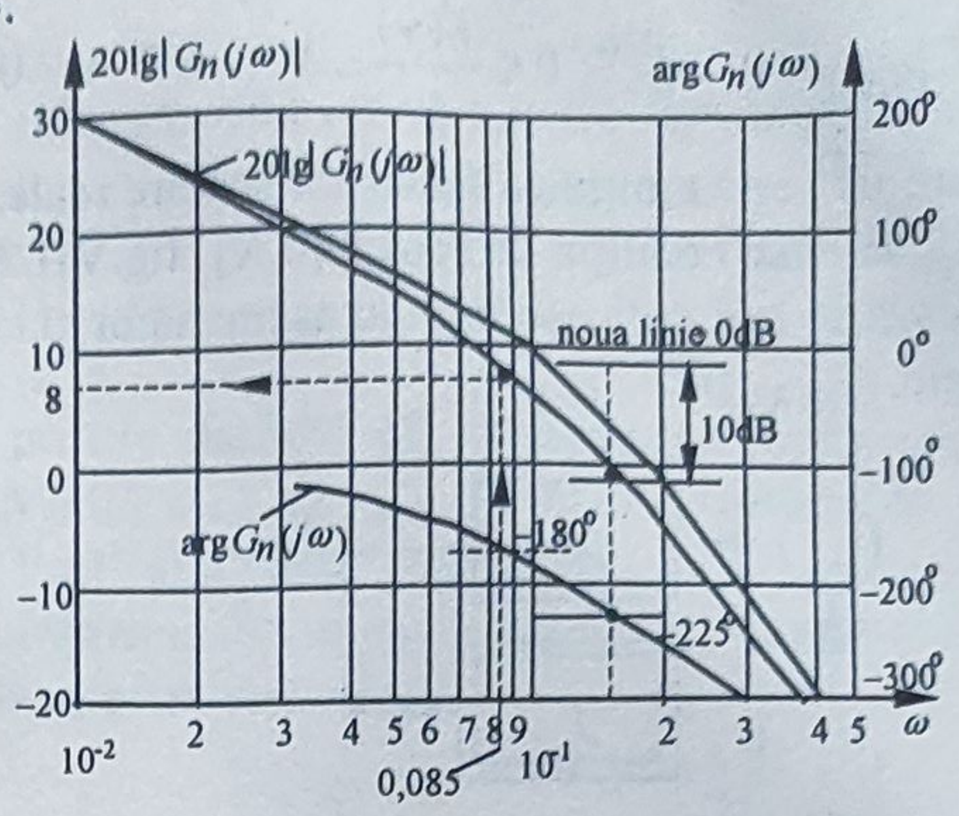


Fig.VII.24. Diagrama Bode la aplicația: sistem automat de reglare a temperaturii

Se face mai întâi o analiză a stabilității și dacă este necesar se realizează o corecție cu un element liniar conectat în serie cu $G(s)$.

Din fig.VII.24 rezultă $\omega_1 = 0{,}085$ rad/sec și $20\lg|G_n(j\omega)| = 8$. Din fig.VII.23 $f(\alpha_1) = 8$, rezultă $\alpha_1 = 3{,}2$, ceea ce înseamnă $A_1 = 3{,}2a$. Sistemul este sediul oscilației limită stabile $\Delta u(t) = 3{,}2a\sin 0{,}08\,t$. Ca urmare punctul de echilibru $\Delta y = 0$, $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$ este instabil.

Pentru stabilizarea sistemului automat există două posibilități:

1° Coborârea caracteristicii $20\lg|G_n(j\omega)|$ sau, echivalent, ridicarea liniei de 0dB. De exemplu prin ridicarea liniei de 0dB deasupra nivelului de 8dB rezultă $20\lg|G_n(j\omega)| < 0$. Cum $f(\alpha) > 0$, pentru $\alpha \geq 1$, urmează că apariția oscilațiilor întreținute este imposibilă. Aceasta înseamnă reducerea amplificării k, ceea ce micșorează rapiditatea răspunsului indicial al sistemului automat.

2° Ridicarea caracteristicii $\arg G_n(j\omega)$ în domeniul frecvențelor medii (zona pulsației de tăiere) astfel încât ω_1 să se deplaseze spre dreapta și anume într-un domeniu în care $20\lg|G_n(j\omega)| < 0$.

În cazul de față acest lucru poate fi realizat cu ajutorul unui regulator PD care la frecvențe medii asigură o ridicare a caracteristicii $\arg G_n(j\omega)$ cu aproximativ 45° (fig.VI.51). De exemplu pentru un element de corecție (regulator) cu $G_c(s) = k_r(7s+1)$ se obține $\omega_1 = 0{,}15$ (la intersecția cu orizontala de –225°, fig.VII.24), căreia, pentru $k_r \leq 0{,}7$, îi corespunde $20\lg|G_n(j\omega)| < 0$. O valoare $k_r \leq 0{,}7$ este echivalentă cu o ridicare a liniei de 0dB. Pentru ridicarea acesteia cu 10dB trebuie să aibă loc: $20\lg k_r\sqrt{(7\omega_1)^2+1} = 10$, de unde rezultă $k_r = 0{,}224$.

2. Stabilitatea absolută

Pentru rezolvarea unor probleme de proiectare este necesară determinarea unor condiții de stabilitate asimptotică globală pentru o clasă largă de neliniarități. O astfel de clasă de neliniarități, semnificativă pentru aplicații în contextul schemei bloc structurale standard modificate din fig.VII.25 (echivalentă cu schema din fig.VII.11, *mutatis mutandis*), naturală

din punct de vedere conceptual şi deosebit de productivă sub aspectul rezultatelor de stabilitate, este:

$$C_{[0,K]} = \{f \in \overline{C}^0;\ 0 \le \frac{f(y)}{y} \le K,\ y \in \mathbf{R},\ y \neq 0\}, \tag{2.1}$$

în care $\overline{C}^0$ este mulțimea funcțiilor scalare reale, continue pe porțiuni. Se spune că funcțiile din $C_{[0,K]}$ satisfac condiția de sector $[0,K]$, fig.VII.26. Din motive care vor fi clarificate în cele ce urmează se mai definesc în mod asemănător şi clasele $C_{[\varepsilon,K]}$, unde $\varepsilon > 0$ este un număr arbitrar de mic, $C_{(0,K)}$ şi $C_{(0,+\infty)}$.

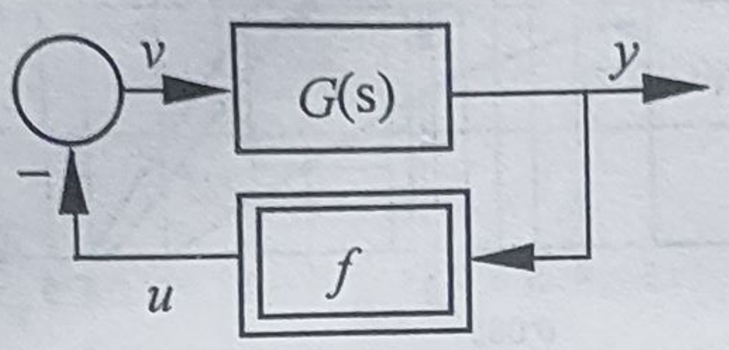


Fig.VII.25 Schema bloc structurală standard modificată (a se vedea şi fig.VII.11)

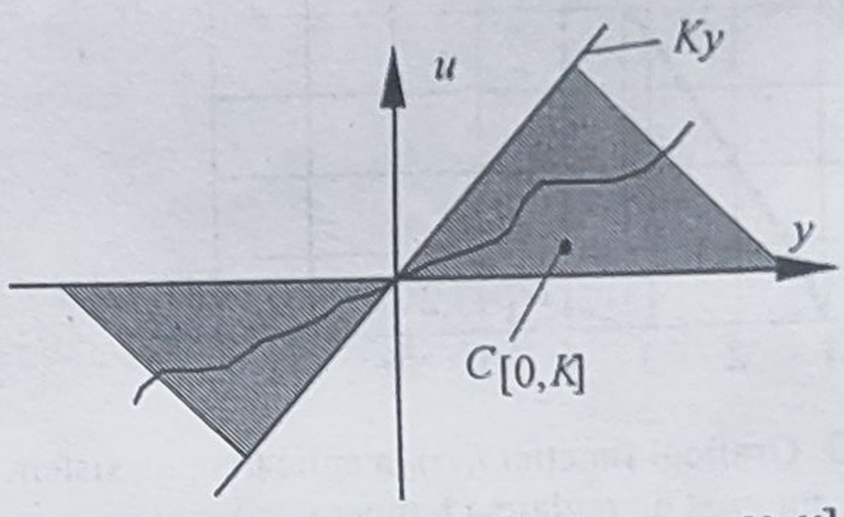


Fig.VII.26 Clasa funcțiilor de tip sector $[0,K]$

Clasele de neliniarități introduse mai sus şi necesitatea ca sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.VII.25, în care $G(s)$ este funcția de transfer a părții liniare, să se caracterizeze prin stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru $y = 0$ au condus la formularea conceptului de stabilitate din definiția următoare.

Definiția 1

Sistemul automat cu structura din fig.VII.25 se numeşte absolut stabil dacă punctul de echilibru $y = 0$ este global asimptotic stabil pentru orice $f \in C_{[0,K]}$ (sau după caz $f \in C_{[\varepsilon,K]}$, $C_{(0,K)}$, $C_{(0,+\infty)}$).■

2.1. Problema lui Lurie

Prima abordare conform definiției 1 a fost problema lui Lurie. Aceasta se bazează pe faptul că partea liniară a sistemului cu structura din fig.VII.25 este descrisă de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - bu, & t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R} \\ y = cx, & y \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

în care A, b, c sunt matrice de dimensiuni adecvate, cu elemente constante, astfel încât:

$$G(s) = c(I_n s - A)^{-1} b = \frac{1}{\det(I_n s - A)} c\,\mathrm{adj}(I_n s - A) b \tag{2.3}$$

este o fracție rațională de ordinul n, ireductibilă (cele două polinoame sunt relativ prime între ele), cu gradul m al numărătorului satisfăcând condiția $m \le n - 1$. Funcția de transfer (2.3) a sistemului (2.2) se obține prin aplicarea transformării Laplace ecuațiilor (2.2) şi eliminarea între ecuațiile obținute a vectorului de stare $X(s)$.

Elementul neliniar al sistemului cu structura din fig.VII.25 este descris de:

$$u = f(y), \tag{2.4}$$

în care f este o funcție din una din clasele definite în introducerea acestui subcapitol.

În aceste circumstanțe se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 1

Dacă au loc următoarele trei condiţii:

1° Toate valorile proprii ale matricei A sunt situate în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$, (A = hurwitziană)

2° $\int_0^{\pm\infty} f(y)dy$ este divergentă,

3° $cb > -(Pb - \frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}c^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(PA + A^{\mathrm{T}}P)(Pb - \frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}c^{\mathrm{T}})$,

în care P este o matrice reală, simetrică şi pozitiv definită (T simbolizează transpunerea matricelor), atunci sistemul cu structura din fig.VII.25, cu $f \in C_{(0,+\infty)}$, este absolut stabil.■

Din punctul de vedere al aplicaţiilor, condiţiile 1° şi 2° fiind îndeplinite, rămâne de realizat condiţia 3°. Aceasta oferă de fapt posibilitatea alegerii matricei c prin care se realizează reacţia după starea părţii liniare. O soluţie relativ simplă în acest sens este:

$$c = 2(b^{\mathrm{T}}P + \sqrt{r}v^{\mathrm{T}}R)A^{-1},$$

în care $r = cb > 0$ este o valoare prestabilită (a produsului cb), v este un vector arbitrar cu proprietatea $v^{\mathrm{T}}v < 1$ şi R este o matrice care se obţine din $R^{\mathrm{T}}R = -(PA + A^{\mathrm{T}}P)$.

2.2. Criteriul Popov

În prima sa formă criteriul Popov a dat o rezolvare diferită a problemei lui Lurie şi anume în domeniul frecvenţelor şi în ipoteze mai largi în sensul că $G(s)$ poate avea un pol în origine, restul polilor fiind situaţi în $\{\mathrm{Re}\ s < 0\}$. Ulterior criteriul a fost extins şi pentru clasele $C_{[0,K]}$, $C_{[\varepsilon,K]}$ etc şi număr arbitrar de poli în origine (ai părţii liniare).

Se consideră sistemul din fig.VII.25, în care funcţia de transfer a părţii liniare are forma:

$$G(s) = \frac{1}{s^{\alpha}} \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + 1}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + 1}. \qquad (2.5)$$

Coeficienţii a_i, b_j sunt numere reale, $\alpha = 1,2,\ldots$ şi $n + \alpha > m$. Coeficientul de amplificare al părţii liniare s-a considerat 1 urmând ca factorul de amplificare al buclei să fie luat în considerare în neliniaritatea (2.4). Ca şi în cazul (2.3) $G(s)$ este ireductibilă.

Din punctul de vedere al distribuţiei polilor lui $G(s)$ în planul complex se disting următoarele două cazuri.

a) *Cazul principal*: toţi polii lui $G(s)$ sunt situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$; acesta implică $\alpha = 0$ şi faptul că polinomul $a_n s^n + \ldots + a_1 s + 1$ este hurwitzian.

b) *Cazul critic*: cel puţin un pol al lui $G(s)$ se află pe axa imaginară $\{\mathrm{Re}\ s = 0\}$, iar restul polilor sunt situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

Raţiunea acestei distincţii îşi are originea în modul în care a fost definită clasa de neliniarităţi $C_{[0,K]}$. Este evident că dacă sectorul adoptat este $[0,K]$, atunci este posibil să se aleagă $f(y) \equiv 0$, ceea ce înseamnă că sistemul cu structura din fig.VII.25 este fără reacţie, funcţionalitatea fiindu-i asigurată numai de partea liniară. În cazul critic partea liniară nu poate avea punctul de echilibru $y = 0$ asimptotic stabil deoarece, în conformitate cu (2.3), $G(s)$ având poli în $\{\mathrm{Re}\ s = 0\}$, matricea A (din (2.2)) are, în mod corespunzător, valori proprii în $\{\mathrm{Re}\ s = 0\}$ (a se vedea şi Teorema 2 de la 1.3.*b*). Ca urmare, în cazul critic şi $C_{[0,K]}$ nu se poate pune problema stabilităţii absolute. Pentru eliminarea acestui inconvenient în cazul critic se va avea în vedere clasa de neliniarităţi $C_{[\varepsilon,K]}$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic. Această abordare implică în mod necesar asigurarea stabilităţii asimptotice globale pentru:

$$f(y) = \varepsilon y \qquad (2.6)$$

(cazul reacţiei liniare), cu $\varepsilon > 0$ oricât de mic. Pentru această situaţie se introduce noţiunea de ε - stabilitate conform definiţiei următoare.

Definiţia 2

Sistemul automat cu structura din fig.VII.25, cu $G(s)$ în cazul critic şi (2.6), se numeşte *ε- stabil* dacă punctul de echilibru $y = 0$ este global asimptotic stabil pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic.■

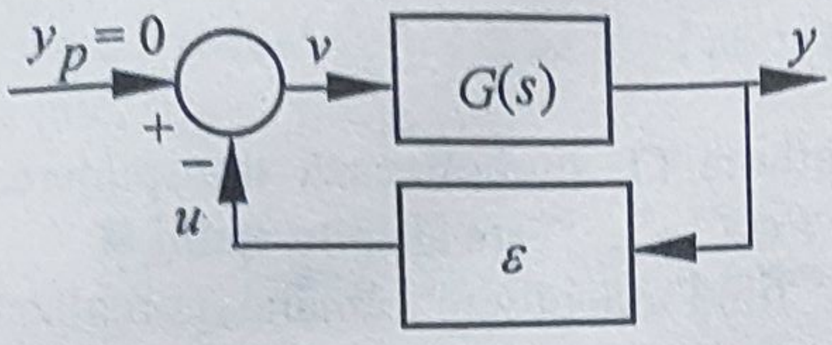


Fig.VII.27 Pentru definirea ε-stabilităţii

Întrucât definiţia 2 se referă la un sistem automat liniar (conform schemei bloc structurale din fig.VII.27), este posibilă formularea următorului rezultat, util pentru aplicarea definiţiei 2. Acest rezultat este sugerat şi de exemplul 1.10 şi de afirmaţia cu caracter general din finalul acestuia.

Teorema 2

Sistemul automat cu structura din fig.VII.25, în care $G(s)$ este ireductibilă (adică raportul a două polinoame relativ prime), este ε-stabil dacă şi numai dacă sistemul automat cu structura din fig.VII.27 este BIBO-stabil pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic.■

D. Din (2.2), (2.4) şi (2.6), după eliminarea mărimilor u şi y, se obţine:

$$\dot{x} = (A - \varepsilon bc)x,$$

ceea ce înseamnă că sistemul cu structura din fig.VII.25 este ε-stabil dacă şi numai dacă matricea $A - \varepsilon bc$ are toate valorile proprii situate în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$ pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic.

Pe de altă parte, pe baza relaţiei (2.3) şi utilizând o formulă a lui Schur, se poate scrie:

$$F(s) = 1 + \varepsilon G(s) = 1 + \varepsilon c(I_n s - A)^{-1} b = \frac{1}{\det(I_n s - A)} \det \begin{bmatrix} I_n s - A & b \\ -\varepsilon c & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(I_n s - A)} \det \begin{bmatrix} I_n & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n s - A & b \\ -\varepsilon c & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(I_n s - A)} \det \begin{bmatrix} I_n s - A + \varepsilon bc & 0 \\ -\varepsilon c & 1 \end{bmatrix} = \frac{\det(I_n s - A + \varepsilon bc)}{\det(I_n s - A)}.$$

Întrucât $G(s)$ este ireductibilă urmează că $F(s)$ este de asemenea ireductibilă.

Rezultă că polinomul polilor sistemului cu structura din fig.VII.27 este $\det(I_n s - A + \varepsilon bc)$ (a se vedea VI.4.2.a) care este chiar polinomul caracteristic al matricei $A - \varepsilon bc$. Evident că ε-stabilitatea este echivalentă cu BIBO-stabilitatea sistemului cu structura din fig.VII.27 pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic.■

Pentru situaţiile uzuale ($\alpha = 1,2$ şi $a_n s^n + \ldots + a_1 s + 1$ hurwitzian) condiţiile ca sistemul automat neliniar să fie ε - stabil sunt uşor de determinat şi respectiv de realizat.

Dacă $\alpha = 1$ locul de transfer $\varepsilon G(j\omega)$ începe, pentru $\omega = +0$, la $-j\infty$ (fig.VI.3) şi pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic punctul $-1+j0$ rămâne în afara şi la stânga locului de transfer. Conform teoremei 7 de la VI.4.2.a şi teoremei 2 sistemul automat neliniar este ε-stabil.

Dacă $\alpha = 2$, pentru $s = j\omega$ din (2.5) rezultă:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{(1 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \ldots..) + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \ldots.)}{(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots..) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots.)},$$

care pentru $\omega > 0$ foarte mic poate fi aproximată prin:

$$G(j\omega) \cong -\frac{1}{\omega^2}\frac{1+jb_1\omega}{1+ja_1\omega} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{1+a_1b_1\omega^2+j\omega(b_1-a_1)}{1+a_1^2\omega^2}.$$

În această situație se poate scrie:

$$\text{Re}\,\varepsilon G(j\omega) \cong -\frac{\varepsilon}{\omega^2},\ \text{Im}\,\varepsilon G(j\omega) \cong -\varepsilon\frac{b_1-a_1}{\omega}.$$

Este acum evident că sistemul cu structura din fig.VII.27 este BIBO stabil pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, respectiv sistemul cu structura din fig.VII.25 este ε - stabil (conform teoremei 2) dacă şi numai dacă $a_1 < b_1$.

Înainte de a enunța criteriul Popov este necesar să se clarifice de ce $G(s)$ nu poate avea poli în $\{\text{Re } s > 0\}$. Dacă $G(s)$ ar avea poli în $\{\text{Re } s > 0\}$, atunci, pentru (2.4) locul rădăcinilor sistemului cu structura din fig.VII.27 ar avea ramuri în $\{\text{Re } s > 0\}$, care pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, ar implica faptul că acest sistem ar avea poli în $\{\text{Re } s > 0\}$. Ca urmare, în cazul că $G(s)$ are poli în $\{\text{Re } s > 0\}$ şi pentru $f \in C_{[\varepsilon,K]}$ nu se poate pune problema stabilității absolute a sistemului cu structura din fig.VII.25.

Teorema 3 (Popov)

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care $G(s)$ este de forma (2.5) şi $f \in C_{[0,K]}$ - în cazul principal ($0 < K \le +\infty$), sau $f \in C_{[\varepsilon,K]}$ în cazul critic (în care sistemul este ε - stabil) şi $0 < K < +\infty$.

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q \in \mathbf{R}$ astfel încât are loc inegalitatea:

$$\text{Re}[(1+jq\omega)G(j\omega)] > -\frac{1}{K},\quad \omega \ge 0.\blacksquare \tag{2.7}$$

În cazul critic pentru $K = +\infty$ se poate utiliza următorul rezultat.

Teorema 4

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care $G(s)$ este de forma (2.5) cu $\alpha = 1$, $a_n s^n + \ldots + a_1 s + 1$ hurwitzian şi $f \in C_{(0,+\infty)}$.

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q \in \mathbf{R}$ astfel încât are loc inegalitatea:

$$\text{Re}[(1+jq\omega)G(j\omega)] \ge 0,\ \omega \ge 0.\blacksquare \tag{2.8}$$

Criteriul Popov a fost extins şi pentru cazul în care partea liniară a sistemului automat neliniar conține şi un element cu timp mort.

Teorema 5

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care partea liniară este descrisă de $G(s)e^{-Ts}$, $T > 0$, cu $G(s)$ de forma (2.5) în cazul principal, şi f este continuă cu $f \in C_{(0,K)}$

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q > 0$ astfel încât are loc inegalitatea (2.7) (*mutatis mutandis*).■

Exemplul 2.1

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.25 cu $f \in C_{(0,+\infty)}$ şi $G(s) = (b_1 s + 1)/[s(a_1 s + 1)]$, cu $a_1 > 0$, $b_1 > 0$. Se cere să se studieze dacă sistemul este absolut stabil.

În acest caz se poate aplica teorema 4. În conformitate cu (2.8) se poate scrie:

$(qa_1b_1\omega^2 + q + b_1 - a_1)/(a_1^2\omega^2 + 1) \geq 0, \quad \omega \geq 0.$

Alegând $q \geq \max(0, a_1 - b_1)$ inegalitatea de mai sus are loc pentru orice $\omega \geq 0$, ceea ce înseamnă că sistemul considerat este absolut stabil pentru $f \in C_{(0,+\infty)}$. ■

Forma inegalităților (2.7) și (2.8) a readus în actualitate noțiunea de *funcție real pozitivă* (utilizată inițial în teoria circuitelor electrice).

Definiția 3

Fracția rațională cu coeficienți reali $F(s)$ se numește *real pozitivă* dacă:

1° nu are nici un pol în $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$;

2° polii din $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$, dacă astfel de poli există, sunt simpli și reziduurile corespunzătoare sunt reale și pozitive;

3° $\mathrm{Re}\, F(j\omega) \geq 0$ pentru toți $\omega \geq 0$. ■

Teorema 6

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care f este continuă și $f \in C_{(0,K)}$.
Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există $q \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$F(s) = (1 + qs)G(s) + \frac{1}{K} \tag{2.9}$$

este real pozitivă. ■

În aplicații este necesar să se verifice condițiile 1°, 2° și 3° din definiția 2. Condiția 3° este asemănătoare cu (2.7) și (2.8). Se poate demonstra că 1° și 2° sunt echivalente cu condiția ca polinomul $P(s) + Q(s)$ să fie hurwitzian, în care P și Q se se identifică din $F(s) = Q(s)/P(s)$. Pentru $F(s)$ de forma (2.9) această condiție trebuie să aibă loc pentru același q pentru care este satisfăcută condiția 3°.

2.3. Forma grafică a criteriului Popov

Efectuând calculele în membrul stâng al inegalității (2.7) pentru $G(j\omega) = \mathrm{Re}G(j\omega) + j\,\mathrm{Im}G(j\omega)$ se obține:

$$\mathrm{Re}\, G(j\omega) - q\omega\, \mathrm{Im}\, G(j\omega) > -\frac{1}{K}. \tag{2.10}$$

Introducând variabilele:

$$v = \mathrm{Re}\, G(j\omega), \quad w = \omega \mathrm{Im}\, G(j\omega), \quad \omega \geq 0, \tag{2.11}$$

se definește funcția:

$$G_P(j\omega) = \mathrm{Re}\, G(j\omega) + j\omega \mathrm{Im}\, G(j\omega), \quad \omega \geq 0, \tag{2.12}$$

al cărui hodograf se numește *locul Popov*, și dreapta:

$$v - q\dot{w} + \frac{1}{K} = 0, \tag{2.13}$$

numită *dreapta Popov*.

Dacă inegalitatea (2.10) are loc, atunci cu (2.11) ea devine:

$$v - qw + \frac{1}{K} > 0. \tag{2.14}$$

Dreapta Popov are panta $1/q$ şi tăieturile $(-1/K,0)$ şi $(0,1/Kq)$, fig.VII.28. Punctele din planul (v,w) situate la dreapta dreptei Popov satisfac inegalitatea (2.14).

Pentru verificarea grafică a condiției (2.10) se procedează în modul următor: se trasează în planul (v,w) locul Popov (conform cu (2.12)) şi în punctul $(-1/K,0)$ se trasează o dreaptă Popov de pantă $1/q$ astfel aleasă încât locul Popov să rămână în întregime la dreapta acesteia, fig.VII.28; dacă şi celelalte ipoteze din teorema 3 sunt satisfăcute, atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil.

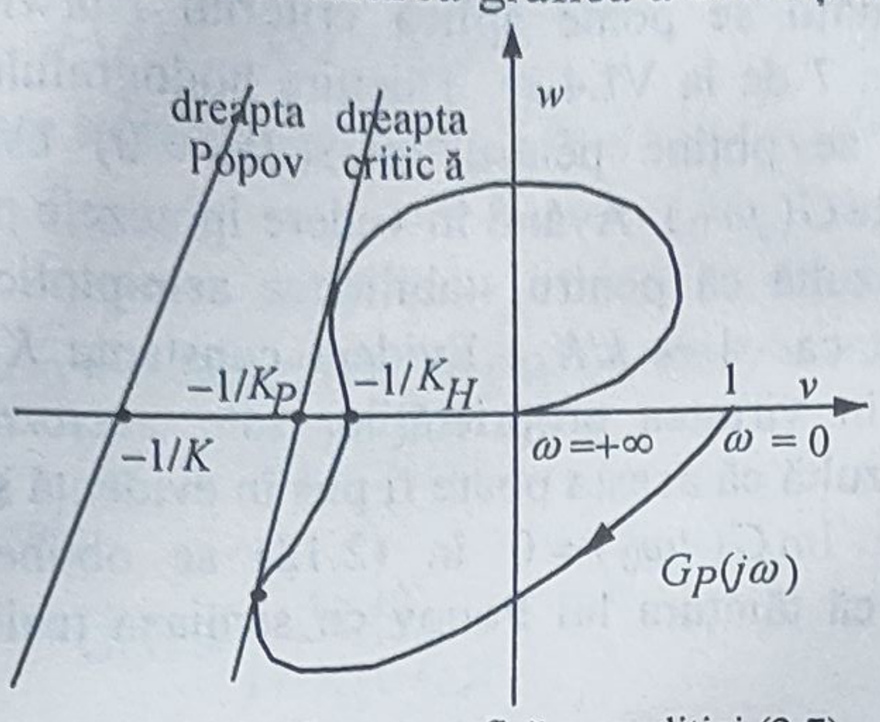


Fig.VII.28. Verificarea grafică a condiției (2.7)

Este evident că punctul $(-1/K,0)$ fiind dat, pot exista o infinitate de drepte Popov pentru care locul Popov rămâne complet la dreapta acestora. Dacă nu există o dreaptă Popov, respectiv nu există nici un $q \in \mathbf{R}$ astfel încât locul Popov să rămână în întregime la dreapta, atunci teorema 4 nu se poate aplica. Acest fapt nu implică concluzia că sistemul automat neliniar avut în vedere nu poate fi absolut stabil, deoarece teorema 4 este doar o condiție suficientă de stabilitate absolută.

Exemplul 2.2

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.25 cu $f \in C_{[\varepsilon,1,5]}$ şi $G(s) = 1/[s(s^2+s+2)$. Se cere să se afle dacă sistemul este absolut stabil.

În conformitate cu (2.11) şi (2.12) locul Popov este descris de ecuațiile parametrice:

$$v = 1/[(\omega^2-2)^2+\omega^2],\ w = (\omega^2-2)/[(\omega^2-2)^2+\omega^2],\ \omega \geq 0.$$

Eliminând $\omega^2 = 2 - w/v$ între aceste ecuații se obține: $2v^2 + w^2 - vw + v = 0$, care reprezintă ecuația unei elipse cu centrul în punctul $(-2/7,\ -1/7)$, cu axa mare rotită cu $3\pi/8$ şi care trece prin punctele $(0,0)$ şi $(-1/2,0)$, fig.VII.29. În aceste condiții prin punctul $(-2/3,0)$ se pot duce o infinitate de drepte Popov. Întrucât sistemul este ε-stabil, conform teoremei 3 acesta este absolut stabil.■

Cu ajutorul inegalității (2.7) sau pe cale grafică se poate determina valoarea maximă K_P a lui K pentru care dreapta Popov este tangentă la locul Popov, fig.VII.28. Acesta se numeşte *dreapta critică*. Întrucât pentru dreapta critică condiția (2.10) nu are loc pentru toți $\omega \geq 0$ rezultă că neliniaritatea se poate situa în sectorul $[0,K_P)$ sau $[\varepsilon,K_P)$, numit *sectorul Popov*. În cazul critic sectorul Popov poate fi şi $[\varepsilon,K_P]$, dar numai dacă locul Popov nu trece prin punctul $(-1/K_P,0)$. În cazul exemplului 2.2 sectorul Popov este $[\varepsilon,2)$, fig.VII.29.

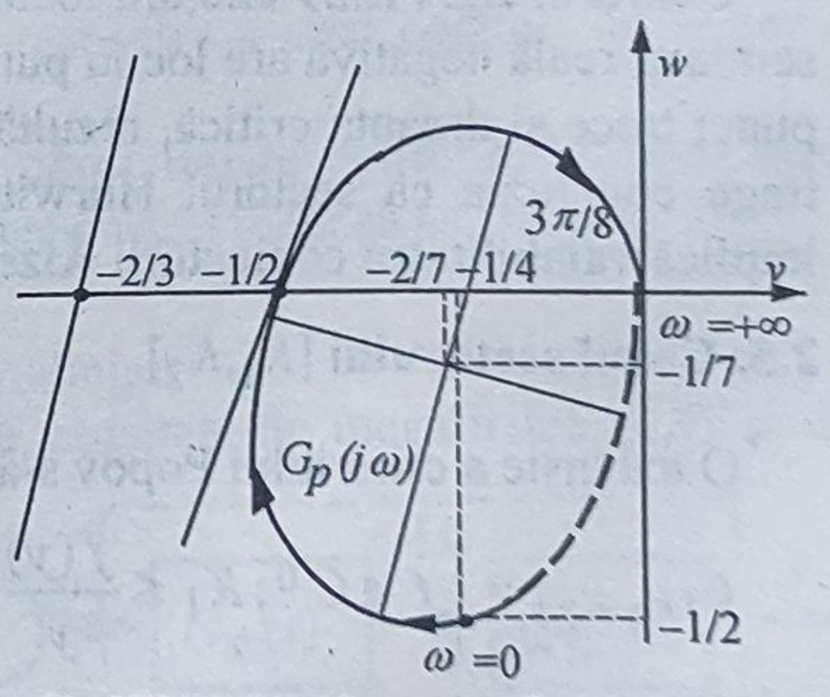


Fig.VII.29. Verificarea grafică a criteriului Popov la exemplul 2.2

Procedeul de verificare grafică expus mai sus se poate aplica (*mutatis mutandis*) şi în cazul teoremelor 4 - 6. În cazul teoremei 4 dreapta Popov trece prin originea planului (v,w). În cazul teoremei 6 trebuie să se verifice condițiile 1° - 3° din definiția 2. Condiția 3° fiind asemănătoare cu (2.7), procedura de verificare grafică rămâne în fond aceeaşi, cu deosebirea că dreapta Popov poate fi şi tangentă la locul Popov.

2.4. Conjectura Aizerman

Pentru sistemul automat cu structura din fig.VII.25 se consideră $f(y) = ky$, $k \geq 0$, $u = ky$. Sistemul automat fiind liniar, pentru studiul stabilităţii se poate aplica criteriul Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) sau criteriul Nyquist (teorema 7 de la VI.4.2). Tăietura hodografului $kG(j\omega)$, $\omega \geq 0$, cu semiaxa reală negativă (care se obţine pentru $\mathrm{Im}\, G(j\omega) = 0$) este $kG(j\omega_0) = k\,\mathrm{Re}\, G(j\omega_0) = -k / K_H$, unde $K_H = -1/\mathrm{Re}\, G(j\omega_0)$. Având în vedere ipotezele pe care le satisface $G(s)$, aplicând criteriul Nyquist, rezultă că pentru stabilitatea asimptotică globală, în cazul $f(y) = ky$, este necesar şi suficient ca $-1 < k/K_H$. Evident constanta K_H defineşte sectorul $[0,K_H)$, respectiv $[\varepsilon,K_H)$, numit, în virtutea proprietăţilor sale, *sectorul Hurwitz*. Conform modului în care a fost definit K_H rezultă că acesta poate fi pus în evidenţă şi cu ajutorul locului lui Popov. Într-adevăr, pentru $\mathrm{Im}\, G(j\omega_0) = 0$ în (2.12) se obţine: $G_P(j\omega_0) = \mathrm{Re}\, G(j\omega_0) = -1/K_H$, ceea ce înseamnă că tăietura lui Popov cu semiaxa reală negativă are abscisa $-1/K_H$, fig.VII.28.

Dacă sistemul automat neliniar trebuie să fie absolut stabil, atunci, în mod evident, el trebuie să fie absolut stabil şi în cazul particular $f(y) = ky$. Se trage concluzia că inegalitatea $k < K_H$ este o condiţie necesară de stabilitate absolută sau, cu alte cuvinte, sectorul $[0,K]$ (respectiv $[\varepsilon,K]$) nu poate fi în nici un caz mai mare ca sectorul Hurwitz $[0,K_H]$ (respectiv $[\varepsilon,K_H)$).

Pornind de la faptul că unele sisteme automate neliniare cu $G(s)$ de ordin redus sectorul maxim de stabilitate absolută coincide cu sectorul Hurwitz (în sensul $\sup[0,K] = K_H$, respectiv $\sup[\varepsilon,K] = K_H$), Aizerman a enunţat următoarea conjectură: sectorul maximal de stabilitate coincide întotdeauna cu sectorul Hurwitz. S-a demonstrat că această afirmaţie este adevărată numai în unele cazuri cum ar fi: $G(s)$ este de ordinul doi, de ordinul trei cu cel mult un zero finit, de ordinul patru fără zerouri finite şi cu poli complex conjugaţi suficient de îndepărtăţi de axa imaginară, de ordin oarecare cu toţi polii reali negativi şi fără zerouri finite. În toate aceste cazuri se poate utiliza criteriul Nyquist şi anume în sensul determinării sectorului Hurwitz. Dacă $[0,K] \subset [0,K_H)$, respectiv $[\varepsilon,K] \subset [\varepsilon,K_H)$ atunci sistemul automat neliniar considerat este absolut stabil.

Exemplul 2.3

Se cere să se verifice conjectura Aizerman în cazul sistemului de la exemplul 2.2.

Conform fig.VII.29 tăietura locului Popov $G_P(j\omega)$, respectiv a locului de transfer $G(j\omega)$, cu semiaxa reală negativă are loc în punctul $(-1/2,0)$, ceea ce înseamnă $K_H = 2$. Întrucât prin acest punct trece şi dreapta critică, rezultă $K_P = 2$. Sectorul Popov coincide cu sectorul Hurwitz; se trage concluzia că sectorul Hurwitz este sectorul maxim de stabilitate absolută, fapt care implică valabilitatea conjecturii Aizerman.■

2.5. Cazul sectorului $[K_1,K_2]$

O extensie a criteriului Popov s-a realizat prin considerarea clasei de funcţii:

$$C_{[K_1,K_2]} = \left\{ f \in \overline{C}^0; K_1 \leq \frac{f(y)}{y} \leq K_2, y \in \mathbf{R}, y \neq 0 \right\}, \tag{2.15}$$

în care $K_1 < K_2$ sunt două constante reale, clasă pentru care se poate formula o definiţie asemănătoare cu definiţia 1.

Pentru clasa de funcţii (2.15), cu referire la sistemul automat cu structura din fig.VII.25, se defineşte:

$$\tilde{u} = u - K_1 y \tag{2.16}$$

şi neliniaritatea:

$$\tilde{f}(y) = f(y) - K_1 y, \tag{2.17}$$

care satisface condiţia $\tilde{f} \in C_{[0,K_2-K_1]}$ în cazul principal, sau $\tilde{f} \in C_{[\varepsilon,K_2-K_1]}$ în cazul critic.

Întrucât

$$Y(s) = -G(s)U(s), \tag{2.18}$$

prin înlocuirea relaţiei (2.16), luată în transformate Laplace, în (2.18) se obţine:

$$Y(s) = -\tilde{G}(s)\tilde{U}(s), \tag{2.19}$$

unde:

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + K_1 G(s)}. \tag{2.20}$$

În acest fel s-a obţinut un nou sistem automat neliniar cu schema bloc structurală de forma aceleia din fig.VII.25, dar în care partea liniară este (2.20) şi partea neliniară este (2.17), cu condiţia de sector $[0,K_2 - K_1]$, respectiv $[\varepsilon,K_2 - K_1]$. În aceste circumstanţe se pot aplica în mod adecvat definiţia 1 şi teoremele 1 - 6.

2.6. Compensarea serie a părţii liniare

Din forma grafică a criteriului Popov (fig.VII.28) rezultă că dacă nu există o dreaptă Popov (respectiv nu există o valoare q astfel încât să aibă loc teorema 3 sau după caz teoremele 4 - 6), atunci se poate proceda în următoarele moduri:

- se reduce valoarea lui K (se reduce condiţia de sector - fig.VII.26), respectiv se deplasează tăietura $(-1/K,0)$ - fig.VII.28 - spre stânga până când este posibilă trasarea unei drepte Popov;
- se compensează partea liniară, descrisă de $G(s)$ - fig.VII.25, prin introducerea unui compensator în serie, în paralel sau în circuit cu reacţie, respectiv se deformează şi se deplasează locul Popov - fig.VII.28 - până când este posibilă trasarea unei drepte Popov;

Primul procedeu este echivalent cu reducerea posibilităţilor de alegere a neliniarităţii, fapt ce, evident, nu este în concordanţă cu motivaţia introducerii definiţiei 1. De regulă demersul sugerat de definiţia 1 constă în a determina valoarea maximă a lui K (în sensul sectorului Hurwitz, dar pentru a se putea trasa o dreaptă Popov), respectiv a unei condiţii de sector - fig.VII.26 - cât mai cuprinzătoare posibil.

În cazul obişnuit se utilizează compensarea serie a părţii liniare conform schemei bloc structurale din fig.VII.30. Compensatorul serie $G_S(s)$ se alege astfel încât să se asigure:

- satisfacerea criteriului Popov;
- îmbunătăţirea calităţilor impuse sistemului automat neliniar.

Pentru satisfacerea criteriului Popov o soluţie simplă, sugerată de inegalitatea (2.7) şi de corecţia în domeniul frecvenţelor a sistemelor automate liniare (a se vedea VI.4.3), constă în utilizarea unui compensator de tipul PD:

$$G_S(s) = k_S(\tau s + 1). \tag{2.21}$$

Efectul acestuia constă în rotirea locului lui Popov, pe măsura creşterii frecvenţei, în sens antiorar, cu unghiuri de la 0° la 90°. În acest fel locul lui Popov suferă o deplasare spre dreapta la

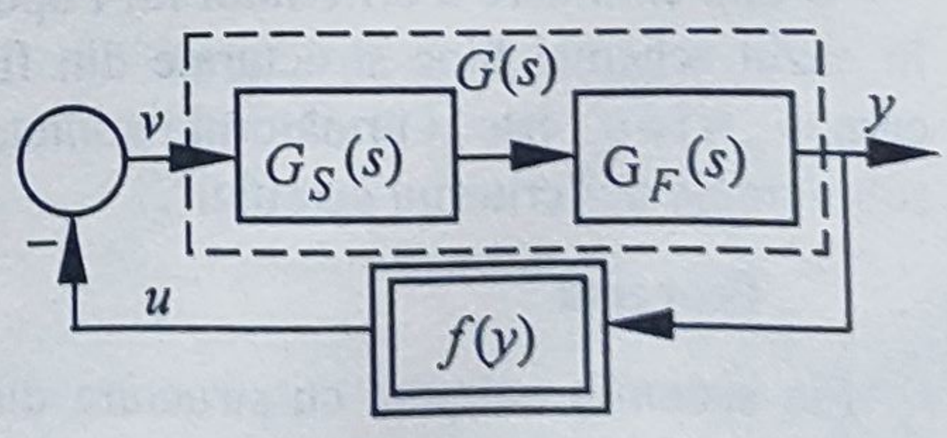


Fig.VII.30. Compensarea serie a părţii liniare

frecvențe medii şi înalte (în cadranele 3 şi/sau 2 ale planului locului lui Popov) ceea ce facilitează trasarea unei drepte Popov prin punctul $(-1/K,0)$ cu condiția ca acest punct să rămână suficient de departe la stânga noului loc Popov.

Pentru realizarea calităților impuse sistemului automat se utilizează în primul rând neliniaritatea f. În acelaşi timp pentru unele corecții ale acestor calități compensatorul serie poate conține factori suplimentari adecvați de tipul PID ai căror parametri se aleg de regulă ca în cazul corecției sistemelor automate liniare (a se vedea VI.4.3).

Exemplul 2.4

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.30 în care $G_F(s) = 1/[s(s+1)^2]$. Se cere să se determine $G_S(s)$ astfel încât sistemul să fie absolut stabil pentru clasa $C_{(0,4]}$.

Pentru $G(s) = G_S(s)\, G_F(s)$ şi $G_S(s) = k_S$, $k_S > 0$, ecuațiile parametrice (2.11) ale locului lui Popov sunt: $v = -2k_S/[4\omega^2 + (1-\omega^2)^2] < 0$, $w = -k_S(1-\omega^2)/[4\omega^2 + (1-\omega^2)^2] < 0$. Eliminând ω^2 între aceste ecuații se obține: $w = v - \sqrt{-k_S v/2}$, $v < 0$; locul Popov este reprezentat în fig.VII.31(a). Tăietura acestui loc cu axa $\omega = 0$ este $(-k_S/2,0)$. Pentru a fi posibilă trasarea unei drepte Popov prin $(-1/4,0)$ este necesar ca $-1/4 < -k_S/2$, respectiv $k_S < 1/2$. Această condiție constituie de fapt o reducere, prin partea liniară, a sectorului $(0,4]$ la sectorul $(0,4\, k_S] \subset (0,2)$.

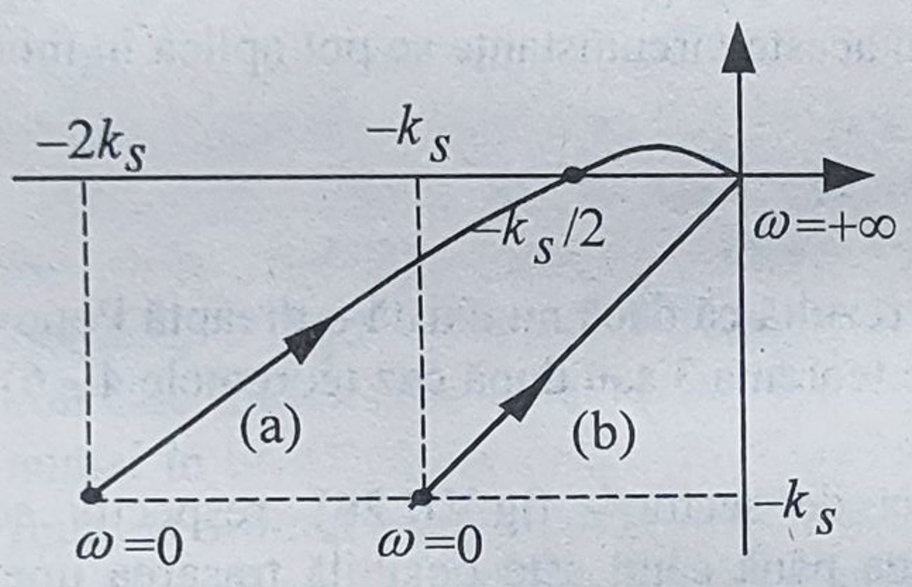


Fig.VII.31. Compensarea serie la exemplul 2.4:
(a) $G_S(s) = k_S$; (b) $G_S(s) = k_S(s+1)$

Pentru $G(s) = G_S(s)\, G_F(s)$ şi $G_S(s) = k_S(s+1)$, $k_S > 0$, ecuațiile parametrice ale locului lui Popov sunt: $v = -k_S/(\omega^2+1) < 0$, $w = -k_S/(\omega^2+1) < 0$ Eliminând $\omega^2 + 1$ între aceste ecuații se obține ecuația locului lui Popov: $w = v$, $v < 0$, a cărei imagine este dată în fig.VII.31(b). Tăietura acestui loc cu axa $w = 0$ este acum (0,0). Conform teoremei 4 se poate trasa o dreaptă Popov de pantă $1/q \le 1$ în orice punct $(v,0)$ cu $v < 0$. În consecință sistemul este absolut stabil pentru clasa $C_{(0,+\infty)}$ şi $k_S > 0$.■

2.7. Criteriul cercului

Criteriul Popov generalizează criteriul Nyquist (VI.4.2) şi anume în sensul că în cazul sistemului automat neliniar locul de trasfer al sistemului în circuit deschis se înlocuieşte cu locul Popov şi punctul critic se înlocuieşte cu dreapta critică (fig.VII.28). Totodată se asigură o libertate destul de mare în alegerea neliniarității (clasa de funcții (2.1) cu variantele ei şi extensia (2.19)) cu o restrângere corespunzătoare a posibilităților de alegere a părții liniare (şi anume conform unor condiții suficiente: teoremele 3 - 6).

O altă extindere a criteriului lui Popov, şi anume în cazul schemei bloc structurale din fig.VII.32, în care $y_p(t) \not\equiv 0$, este şi următorul rezultat, cunoscut şi sub numele de "criteriul cercului".

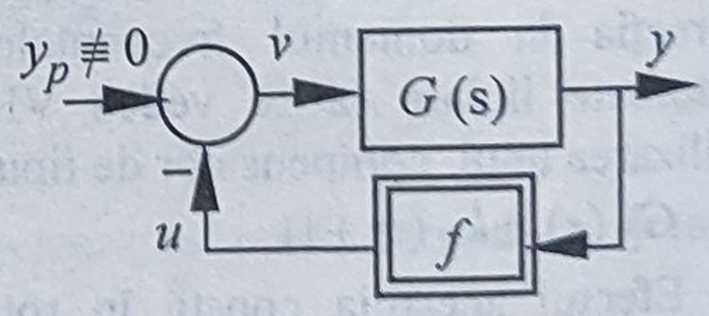


Fig.VII.32. Schema bloc structurală la criteriul cercului

Teorema 7

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.32 în care $G(s)$ este de forma (2.5) şi f satisface

condiţiile:

$$f(0) = 0 \tag{2.22}$$

$$K_1 \le \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} \le K_2,\ y_1, y_2 \in \mathbf{R},\ y_1 \ne y_2, \tag{2.23}$$

cu $K_1, K_2 \in \mathbf{R}$, $K_1 \le K_2$.

Atunci punctul de echilibru $y = 0$ este global asimptotic stabil dacă, după caz, are loc una din următoarele trei condiţii:

1° Pentru $K_1 = 0$ locul de transfer $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, este situat la dreapta unei drepte care trece prin $(-1/K_2 + \varepsilon, 0)$, cu $\varepsilon > 0$.

2° Pentru $K_1 > 0$ locul de transfer $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, este situat în exteriorul unui cerc care trece prin punctele $(-1/K_2 + \varepsilon, 0)$ şi $(-1/K_1 - \varepsilon, 0)$, cu $\varepsilon > 0$.

3° Pentru $K_1 < 0$ locul de transfer $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, este situat în interiorul unui cerc care trece prin punctele $(-1/K_2 + \varepsilon, 0)$ şi $(-1/K_1 - \varepsilon, 0)$, cu $\varepsilon > 0$.■

Situaţiile corespunzătoare celor trei condiţii din teorema 7 sunt ilustrate în fig.VII.33.

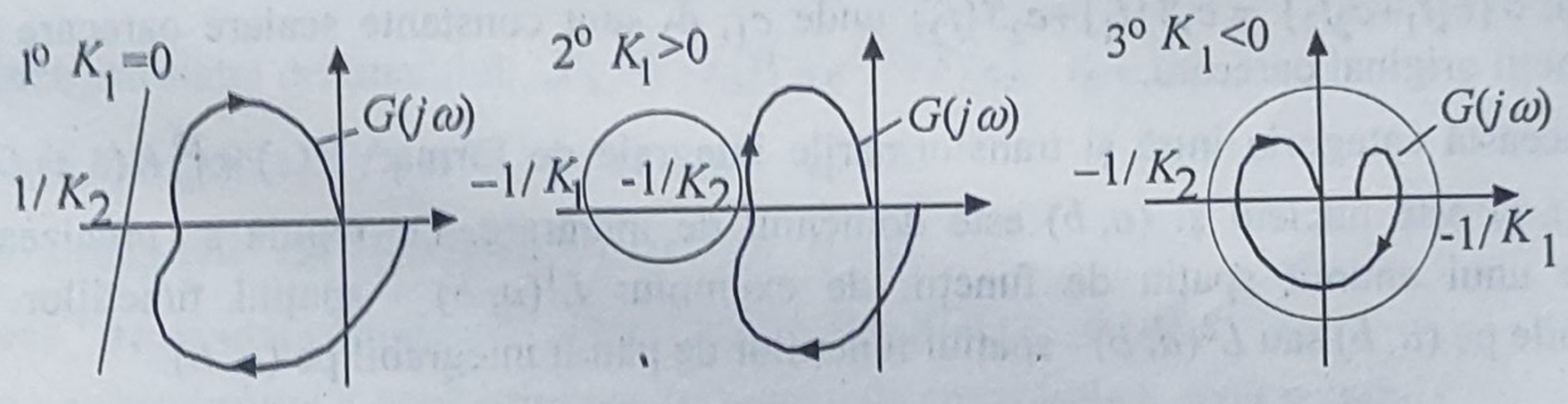


Fig.VII.33. Ilustrarea celor trei condiţii din teorema 7

Condiţia (2.23) este de tip Lipschitz şi este mai tare decât condiţia de tip sector ((2.1) sau (2.15)). Într-adevăr, pentru $f(y)$ continuă şi derivabilă, conform formulei lui Lagrange, există $y \in (y_1, y_2)$ astfel încât:

$$f(y_1) - f(y_2) = (y_1 - y_2) f'(y). \tag{2.24}$$

Înlocuind (2.24) în (2.23) se obţine:

$$K_1 \le f'(y) \le K_2, \tag{2.25}$$

care în mod evident este mai tare decât aceea de tip sector (2.15).

Condiţia mai tare (2.23) are ca efect, conform teoremei 7 şi fig.VII.33, o relaxare a condiţiilor pe care trebuie să le satisfacă partea liniară a sistemului automat neliniar. Cu referire la (2.5), în care $a_n s^n + \ldots + a_1 s + 1$, $b_m s^m + \ldots + b_1 s + 1$ sunt hurwitziene şi $n + p > m$, conform teoremei 7 şi pentru K_1 şi K_2 adecvat aleşi, este suficient ca: $p = 0,1$ (pentru 1°), $p = 0,1,2$ (pentru 2°) şi $p = 0$ (pentru 3°).

Anexa

A

TRANSFORMĂRI INTEGRALE

Prin *transformare funcţională* se înţelege o corespondenţă între două mulţimi de funcţii. Se scrie $F = \mathcal{F}\{f\}$, adică transformarea $\mathcal{F}$ aplicată funcţiei *original* f este funcţia *imagine* F. $\mathcal{F}^{-1}$ este transformarea inversă şi $f = \mathcal{F}^{-1}\{F\}$.

Transformările funcţionale au calitatea că în mulţimea funcţiilor imagine anumite relaţii dintre funcţiile original se exprimă în forme mult mai simple. Se pot obţine astfel o serie de rezultate care în mulţimea funcţiilor original sunt mai dificil de demonstrat.

O clasă specială de transformări funcţionale o constituie transformările *liniare* care satisfac condiţia: $\mathcal{F}\{c_1f_1+c_2f_2\} = c_1\mathcal{F}\{f_1\}+c_2\mathcal{F}\{f_2\}$ unde c_1, c_2 sunt constante scalare oarecare şi f_1, f_2 sunt funcţii original oarecare.

În această categorie intră şi transformările integrale de forma: $F(s) = \int_a^b K(t,s)f(t)dt$, în care $K(t, s)$ este nucleul şi (a, b) este domeniul de integrare. De regulă se precizează că f aparţine unui anumit spaţiu de funcţii, de exemplu: $L^1(a, b)$ - spaţiul funcţiilor absolut integrabile pe (a, b) sau $L^2(a, b)$ - spaţiul funcţiilor de pătrat integrabil pe (a, b).

1. Transformarea Laplace

1.1. Transformarea directă

Definiţia 1. Fie $f(t)$ o funcţie original, de variabila reală t, care satisface condiţiile:

1° $f(t) = 0$, $t < 0$;

2° $f(t)$ este continuă pe porţiuni; pe orice interval finit are cel mult un număr finit de discontinuităţi; în punctele t de discontinuitate există limite laterale finite $f(t-0), f(t+0)$;

3° există $M > 0$ şi $a \in \mathbf{R}$ astfel ca $|f(t)| \le Me^{at}$, $t \ge 0$.

Funcţia imagine de variabila complexă $s = \sigma + j\omega$:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s \in \mathbf{C},$$

este transformata Laplace.■

a. Observaţii

1° Transformarea conform definiţiei 1 se mai numeşte şi Laplace directă unilaterală, deoarece domeniul de integrare este $(0, +\infty)$; se face totodată distincţia faţă de transformarea Laplace bilaterală pentru care domeniul de integrare este $(-\infty, +\infty)$.

2° Variabila t este de regulă timpul. În acest caz, din punct de vedere dimensional, $|s|$ este o pulsaţie, motiv pentru care variabila s se numeşte şi *"frecvenţa" complexă*. $\mathcal{L}$ realizează o transformare din domeniul timpului în domeniul "frecvenţelor" complexe.

3° Ipoteza 1° din definiţia 1 poate fi eventual omisă. $f(t)$ fiind definită pentru $t \in \mathbf{R}$, din definiţia 1 rezultă că $F(s)$ corespunde numai restricţiei lui f la intervalul $[0,+\infty)$, inclusiv

condițiile inițiale $f^{(i)}(-0)$, $i = 0,1,2,...$, cum este cazul transformatei derivatei generalizate a originalului (a se vedea b.3°); evident, toate aceste condiții inițiale sunt nule dacă ipoteza 1° (din definiția 1) este îndeplinită.

b. Teoreme

1° Liniaritatea este asigurată prin definiție.

2° Imaginea derivatei originalului:

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s) - f(+0)s^{k-1} - ... - f^{(k-1)}(+0), \qquad k = \overline{1,n}.$$

3° Imaginea derivatei generalizate a originalului:

$$\mathcal{L}\{D^k f(t)\} = s^k F(s) - f(-0)s^{k-1} - ... - f^{(k-1)}(-0), \qquad k = \overline{1,n}.$$

Derivata generalizată este prezentată în anexa B la 2.2, definiția 5, iar transformata ei la 4.b.

4° Imaginea derivată: $\mathcal{L}\{(-t)^k f(t)\} = F^{(k)}(s), \quad k = \overline{1,n}.$

5° Imaginea integralei originalului: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t ..... \int_0^t f(t)dt^k\right\} = \frac{1}{s^k} F(s), \qquad k = \overline{1,n}.$

6° Imaginea translatei originalului: $\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} F(s); \quad t_0 \in \mathbf{R}.$

7° Imaginea translată: $\mathcal{L}\{f(t)e^{s_0 t}\} = F(s-s_0); \quad s_0 \in \mathbf{C}.$

8° Scalarea timpului: $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \alpha^{-1} F(\alpha^{-1} s); \quad \alpha > 0.$

9° Scalarea "frecvenței complexe": $\mathcal{L}\{\alpha^{-1} f(\alpha^{-1} t)\} = F(\alpha s); \quad \alpha > 0.$

10° Imaginea produsului a două originale (produsul de convoluție a două imagini):

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z)F_2(s-z)dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-z)F_2(z)dz.$$

Detalii privind alegerea constantei c se prezintă la 1.2.a.3°.

11° Imaginea produsului de convoluție a două originale (produsul imaginilor):

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s).$$

1.2. Transformarea inversă

Definiția 2. În condițiile definiției 1 funcția f de variabilă reală t:

$$\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

se numește transformata Laplace inversă a funcției $F(s)$.■

a. Observații

1° În punctele t de continuitate ale funcției f, membrul stâng al formulei din definiția 2 este $f(t)$. În punctele t de discontinuitate ale lui f, aceeași formulă furnizează media aritmetică a limitelor laterale $f(t-0), f(t+0)$.

2° Integrala generalizată din definiția 2 se calculează prin trecere la limită sub forma: $\lim_{R\to+\infty}\int_{c-jR}^{c+jR} F(s)e^{st}ds = V.P.\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$, adică simultan pentru ambele limite de integrare, respectiv ca *valoare principală* (V.P.).

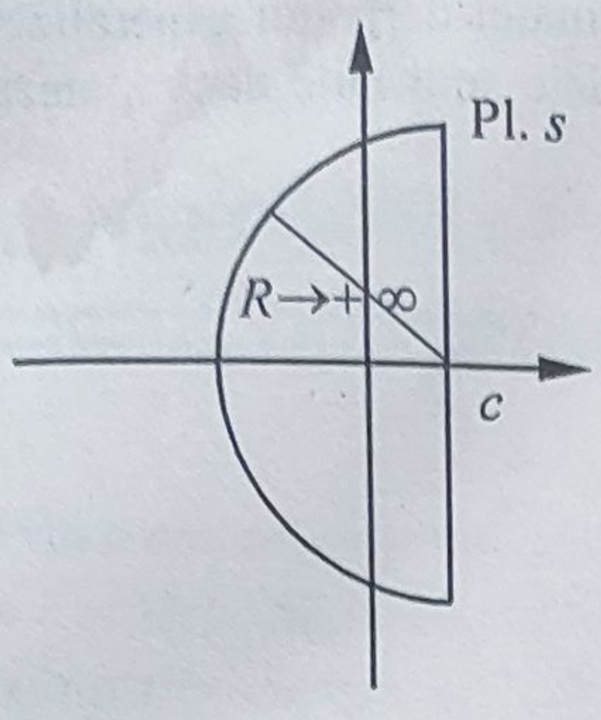


Fig. A.1. Conturul de integrare pentru aplicarea teoremei reziduurilor la calculul transformatei Laplace inverse

3° Pentru calculul integralei din definiția 2 se folosește teorema reziduurilor. Constanta c se alege astfel încât toți polii $p_k, k=\overline{1,n}$, ai lui $F(s)$ să fie situați în $\{Res<c\}$. Integrarea se face pe conturul închis din fig. A.1. Trecând la limită pentru $R\to+\infty$ și ținând seama de anularea integralei pe semicerc se obține:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}\,ds=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}z_{p_k}\left[F(s)e^{st}\right]$$

b. Teoreme importante

1° Originalul unei funcții raționale (teorema dezvoltării)

Pentru $F(s)=Q(s)/P(s)$, fracția rațională cu grad $Q=m<$ grad $P=n$, având polii distincți p_i, fiecare de multiplicitate q_i, $i=\overline{1,r}$, cu $\sum_{i=1}^{r}q_i=n$, originalul este:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{K_{ij}}{(q_i-j)!}t^{q_i-j}e^{p_it},\quad t\ge 0,$$

în care:

$$K_{ij}=\frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}[(s-p_i)^{q_i}F(s)]\right\}_{s=p_i},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,q_i}.$$

2° Valoarea inițială a originalului și a derivatelor sale:

$$f^{(k)}(+0)=\lim_{s\to\infty}s\left[s^kF(s)-f(+0)s^{k-1}-\ldots-f^{(k-1)}(+0)\right],\quad k=0,1,2,\ldots.$$

3° Valoarea finală a originalului și a derivatelor sale:

$$f^{(k)}(+\infty)=\lim_{s\to 0}s\left[s^kF(s)-f(+0)s^{k-1}-\ldots-f^{(k-1)}(+0)\right],\quad k=0,1,2,\ldots.$$

2.Transformarea Fourier

2.1. Transformarea directă

Definiția 1. Transformata Fourier directă a unei funcții (reale sau complexe), de variabila reală $t\in\mathbf{R}$, are expresia: $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}\{f(t)\}$, $\omega\in\mathbf{R}$. ■

a. Observații

1° O condiție suficientă ca să existe transformata Fourier este $f\in L^1(-\infty,+\infty)$. În acest caz $F(j\omega)$ este uniform continuă, mărginită și $\lim_{\omega\to\pm\infty}F(j\omega)=0$. Transformata Fourier directă este univocă.

2° Dacă $f_1, f_2\in L_1(-\infty,+\infty)$ au aceeași transformată $F(j\omega)$, atunci: $\int_0^t[f_1(\tau)-f_2(\tau)]d\tau\equiv 0$, $t\in\mathbf{R}$. În punctele de continuitate $f_1\equiv f_2$.

3° Variabila t este de regulă timpul. În acest caz ω este o pulsație. Se spune că $\mathcal{F}$ realizează o transformare din domeniul timpului în domeniul frecvențelor. Dacă $f(t)$ este un semnal, atunci $F(j\omega)$ se numește *densitatea spectrală* și $|F(j\omega)|$ - *densitatea spectrală de amplitudine*.

b. Teoreme

Formal transformarea Fourier directă se obține (*mutatis mutandis*) din transformarea Laplace (bilaterală) directă pentru $s = j\omega$. În aceste condiții teoremele de la 1.1.b. 1°, 4°, 5°, -7°, 8°, 9° (cu $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$) și 11° rămân valabile.

În continuare se prezintă câteva rezultate specifice transformării Fourier.

1° Imaginea derivatei originalului: $\mathcal{F}\{f^{(k)}(t)\} = (j\omega)^k F(j\omega)$, $k = \overline{1,n}$, în condițiile:

$f^{(i)} \in L^1(-\infty,+\infty)$ și $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f^{(i)}(t) = 0$, $i = \overline{0,n-1}$.

2° Simetria: $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-j\omega)$.

3° Inversarea evoluției timpului: $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$.

4° Imaginea conjugatei originalului: $\mathcal{F}\{f^*(t)\} = F^*(-j\omega)$.

5° Imaginea originalului funcție pară: $F(-j\omega) = F(j\omega)$.

6° Imaginea originalului funcție impară: $F(-j\omega) = -F(j\omega)$.

7° Imaginea originalului funcție reală: $F(j\omega) = F^*(-j\omega)$, $F^*(j\omega) = F(-j\omega)$,

$\operatorname{Re} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt$ este o funcție pară,

$\operatorname{Im} F(j\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt$ este o funcție impară.

8° Imaginea originalului funcție reală pară: $F(j\omega) = F^*(j\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt$, $\operatorname{Im} F(j\omega) \equiv 0$.

9° Imaginea originalului funcție reală impară:

$F(j\omega) = -F^*(j\omega) = -2j\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt$, $\operatorname{Re} F(j\omega) \equiv 0$.

10° Pentru $f(t) = f_p(t) + f_i(t)$, f_p și f_i fiind părțile pară și respectiv impară, rezultă:

$\operatorname{Re} F(j\omega) = F\{f_p(t)\} = 2\int_0^{+\infty} f_p(t)\cos\omega t dt$,

$j\operatorname{Im} F(j\omega) = \mathcal{F}\{f_i(t)\} = -2j\int_0^{+\infty} f_i(t)\sin\omega t dt$.

11° Dacă $f(t) \geq 0$, $t \in \mathbf{R}$, atunci $|F(j\omega)| \leq F(0)$, $\omega \in \mathbf{R}$.

12° Formula lui Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega) F_2^*(j\omega) d\omega$. Pentru $f_1 = f_2 = f$

se obține $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$.

13° Imaginea produsului a două originale:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}(F_1 * F_2)(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega - j\eta) F_2(j\eta) d\eta.$$

2.2. Transformarea inversă

Definiția 2. Corespunzător definiției 1, funcția f (reală sau complexă) de variabila reală t:

$$\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

se numește transformata Fourier inversă a funcției $F(j\omega)$. ■

Observațiile de la 1.2.a și rezultatele de la 1.2.b rămân valabile, *mutatis mutandis*.

3. Transformarea Fourier-Plancherel

Este posibil ca pentru $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ prin utilizarea transformării Fourier directe să se obțină $F \notin L^1(-\infty, +\infty)$. În acest caz nu este posibilă utilizarea transformării Fourier inverse. Transformarea de tip Fourier, definită pentru $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ se numește Fourier-Plancherel și se simbolizează cu $\mathcal{F}^2$. Principala deosebire față de $\mathcal{F}$ constă în faptul că este înlocuită convergența punctuală pentru $\omega \in \mathbf{R}$ prin *convergența în medie* (limes in medio - scris prescurtat l.i.m.):

$$F(j\omega) = \underset{\alpha\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \mathcal{F}^2\{f(t)\}, \quad \omega \in \mathbf{R},$$

adică în formă explicită:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(j\omega) - \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \right|^2 d\omega = 0.$$

Formula de inversiune are forma:

$$f(t) = \underset{\alpha\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \mathcal{F}^{-2}\{F(j\omega)\}.$$

Dacă $f \in L^2(-\infty, +\infty)$, atunci $F \in L^2(-\infty, +\infty)$. Fiecare funcție $F \in L^2(-\infty, +\infty)$ este transformata unei funcții $f \in L^2(-\infty, +\infty)$.

Dacă există $\mathcal{F}\{f(t)\}$ (nefiind necesar ca $f \in L^1(-\infty, +\infty)$), atunci există și $\mathcal{F}^2\{f(t)\}$ aproape peste tot. În consecință afirmațiile de la 2.1.b rămân valabile și pentru transformarea Fourier-Plancherel (*mutatis mutandis*).

Anexa B

NOȚIUNI DE TEORIA DISTRIBUȚIILOR

1. Elemente introductive

În tehnică se utilizează adesea noțiuni care reprezintă idealizări ale unor clase de fenomene identificabile în lumea reală. Pare paradoxal, dar tocmai sub această formă respectivele noțiuni devin mai operante în descrierea şi analiza fenomenelor reale. Din această categorie face parte şi *impulsul Dirac.* Într-o formă naiv-intuitivă impulsul Dirac se caracterizează prin (a se vedea şi II.3.1):

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, t=0\\ 0,\ t\neq 0\end{cases},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

În acest caz aplicarea metodelor analizei matematice clasice nu este posibilă deoarece impulsul Dirac nu este o funcție.

Acest impas a fost depăşit prin introducerea noțiunii de *distribuție* sau *funcție generalizată.* Ea permite o abordare riguroasă a fenomenelor de tip impuls Dirac şi înlătură unele dificultăți, cum ar fi problema derivabilității funcțiilor discontinue.

O funcție este o corespondență, astfel încât fiecărui element dintr-o anumită mulțime îi corespunde exact un element dintr-o altă mulțime. Ca exemplu se poate avea în vedere dependența unei tensiuni electrice x de timpul t, $x=f(t)$, în sensul că fiecărui t îi corespunde un x. Tensiunea x este o mărime fizică măsurabilă. Numai că ceea ce se măsoară nu este în realitate tensiunea x, ci *efectul* ei asupra unui dispozitiv. Acest efect poate fi reprezentat printr-o *funcție-test* $\varphi(t)$. O calitate esențială a unei măsurări o constituie repetabilitatea cu dispozitive diferite. Aceasta conduce la afirmația că există arbitrar de multe funcții-test $\varphi(t)$.

Pentru a caracteriza matematic simultan fenomenul $x=f(t)$ şi mulțimea efectelor sale se poate utiliza integrala:

$$\int f(t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

pe un anumit interval. În acest fel se realizează o caracterizare *globală* a funcției $f(t)$, respectiv a *distribuției* funcției $f(t)$ pentru toți t din intervalul considerat.

1.1. Noțiunea de funcțională

Fie $f(t)$ o funcție definită pe **R**, local integrabilă în sens Lebesgue şi fie în **R** o mulțime compactă (închisă şi mărginită).

Definiția 1. Suportul unei funcții $\varphi(t)$, continuă pe **R**, este cea mai mică mulțime închisă care conține punctele t cu proprietatea $\varphi(t)\neq 0$. Mulțimea complementară suportului este cea mai mare dintre mulțimile deschise în care $\varphi(t)=0$.■

Exemplu. Fie

$$\varphi(t)=\begin{cases}\sin t, & t\in(-\pi,\pi)\\ 0, & t\in(-\infty,-\pi]\cup[\pi,+\infty)\end{cases},$$

continuă pe **R**. Pentru $t\in(-\pi, 0)\cup(0, \pi)$, $\varphi(t)\neq 0$, deci suportul este $[-\pi, \pi]$. Complementara suportului este $(-\infty, -\pi)\cup(\pi, +\infty)$. Punctele $-\pi$, 0, π, pentru care $\varphi(t)=0$, aparţin suportului. ■

Pentru a opera uşor cu funcţiile-test $\varphi(t)$, acestea se aleg cu suport compact, adică $\varphi(t)\neq 0$ în sensul definiţiei 1. În aceste condiţii integrala (1.1) se poate concretiza ca integrală generalizată:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt, \qquad (1.2)$$

deşi în fapt se execută pe un interval finit.

Pentru cele ce urmează se admite că $\varphi(t)$ este infinit derivabilă pe **R**.

Definiţia 2. Funcţiile $\varphi(t)$ definite pe **R**, cu suport compact şi infinit derivabile pe **R**, formează un *spaţiu de funcţii* $\mathcal{D}$. ■

Definiţia 3. Spaţiul $\mathcal{D}_K$ este format de funcţiile $\varphi\in\mathcal{D}$ al căror suport face parte dintr-un anumit compact K. ■

Definiţia 4. Integrala (1.2), care există pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$, este un număr (real sau complex), care poate fi considerat ca rezultatul produsului scalar al funcţiilor f şi φ. Se scrie:

$$<f,\varphi>=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt. \blacksquare$$

Definiţia 5. Corespondenţa $\mathcal{D}\to\mathbf{C}$ (sau **R**), realizată explicit prin aceea că fiecărui $\varphi\in\mathcal{D}$ i se ataşează un număr complex (sau real) se numeşte funcţionala determinată de $f(t)$. ■

Funcţionala conform definiţiei 4 este liniară pe $\mathcal{D}$ dacă pentru orice $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}$ şi orice $c_1, c_2\in\mathbf{C}$ are loc : $<f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2>= c_1<f, \varphi_1> + c_2<f, \varphi_2>$. ■

2. Noţiunea de distribuţie

Conform definiţiei 5 de la 1.1 rezultă că este posibil ca fenomenele care din punct de vedere matematic nu pot fi încadrate în sfera noţiunii de funcţie, cum este în cazul impulsului Dirac, să fie reprezentate cu ajutorul noţiunii de funcţională. O astfel de reprezentare permite o generalizare a noţiunii de funcţie. Pentru o abordare generală, în funcţionala din definiţia 4 de la 1.1 se înlocuieşte funcţia f cu o funcţională T definită pe $\mathcal{D}$.

2.1 Continuitatea unei funcţionale

Definiţia 1. Un şir $\varphi_n\in\mathcal{D}$ *converge* la $\varphi\in\mathcal{D}$ dacă există un compact K astfel încât $\varphi_n\in\mathcal{D}_K\subset\mathcal{D}$ şi dacă pentru fiecare $k=0,1,2,\ldots.$ $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{uniform în } K} \varphi^{(k)}(t)$ pentru $n\to+\infty$.

În spiritul acestei definiţii se scrie: $\lim_{n\to+\infty}(\mathcal{D})\varphi_n=\varphi$. ■

Definiţia 2. O funcţională T este *continuă* în $\varphi\in\mathcal{D}$ dacă pentru fiecare şir $\varphi_n\in\mathcal{D}$, care satisface definiţia 1, are loc: $\lim_{n\to+\infty}\langle T, \varphi_n\rangle=\langle T, \varphi\rangle$. ■

2.2. Definiţia distribuţiei

Definiţia 3. O funcţională T definită pe $\mathcal{D}$, liniară şi continuă se numeşte *distribuţie*.

Distribuţia determinată de o funcţie f se notează cu $[f]$. ■

Propoziţia 1. Orice funcţională $<T, \varphi>$ este nulă pentru $\varphi\equiv 0$, adică: $<T, 0>=0$.

Definiţia 4. Mulţimea tuturor distribuţiilor formează un spaţiu $\mathcal{D}'$, (*dualul* spaţiului $\mathcal{D}$). ■

Definiţia 5. Derivata de ordinul k, D^kT, a unei distribuţii T este dată de expresia:

$\langle D^kT, \varphi\rangle=(-1)^k<T, \varphi^{(k)}>$. ■

Propoziţia 2. Orice distribuţie este infinit derivabilă. ■

2.3. Distribuția Dirac

Definiția 6. Pentru $T = \delta$ funcționala $<\delta,\varphi>$ care satisface condiția $<\delta,\varphi> = \varphi(0)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ se numește *distribuția Dirac.* Explicit se scrie: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$. ■

Pentru un impuls Dirac cu o localizare la $t = \tau$ se scrie: $\langle\delta_\tau,\varphi\rangle = \varphi(\tau)$, sau în mod explicit: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\varphi(t)dt = \varphi(\tau)$.

Definiția 7. Distribuția determinată de funcția treaptă unitară $\sigma(t)$ are expresia: $\langle\sigma,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt$. ■

Pentru derivata distribuției $[\sigma]$ se scrie:

$\langle DT,\varphi'\rangle = (-1)\langle\sigma,\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\sigma(t)\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt = \varphi(0) = \langle\sigma,\varphi\rangle$, adică $D[\sigma] = \delta$, respectiv $D\sigma(t) = \delta(t)$.

Pentru o funcția treaptă unitară translată, $\sigma(t-\tau)$, se scrie: $\langle\sigma_\tau,\varphi'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(t-\tau)\varphi'(t)dt = \int_\tau^{+\infty}\varphi'(t)dt$, iar pentru derivata acesteia: $\langle D\sigma_\tau,\varphi\rangle = (-1)\langle\sigma_\tau,\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(t-\tau)\varphi(t)dt = \int_\tau^{+\infty}\varphi(t)dt = \varphi(\tau) = \langle\delta_\tau,\varphi\rangle$, adică $D[\sigma_\tau] = \delta_\tau$, respectiv, $D\sigma(t-\tau) = \delta(t-\tau)$.

Derivata de ordinul k, $D^k\delta_\tau$, a distribuției Dirac δ_τ are expresia:

$\langle D^k\delta_\tau,\varphi\rangle = (-1)^k\langle\delta_\tau,\varphi^{(k)}\rangle = (-1)^k\varphi^{(k)}(\tau)$.

Propoziția 3. Fie o funcție $f(t)$ care admite la stânga și la dreapta punctului $t = \tau$ derivate până la ordinul k, ceea ce înseamnă că există limitele: $f(\tau-0), f'(\tau-0),\ldots, f^{(k-1)}(\tau-0)$, $f(\tau+0), f'(\tau+0),\ldots, f^{(k-1)}(\tau+0)$.

Atunci derivata $D^k[f]$ are expresia:

$$D^k f(t) = f^{(k)}(t) + (f^{(k-1)}(\tau+0) - f^{(k-1)}(\tau-0))\delta(t-\tau) +$$
$$+ f^{(k-2)}(\tau+0) - f^{(k-2)}(\tau-0))D\delta(t-\tau) + \ldots + \big(f(\tau+0) - f(\tau-0)\big)D^{k-1}\delta(t-\tau).$$

2.4. Produsul de convoluție

Fie distribuțiile $<f_1,\varphi>$, $<f_2,\varphi>$. Produsul de convoluție are forma:

$$\langle f_1 * f_2,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\theta)f_2(t-\theta)d\theta\right)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\theta)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\theta)\varphi(t)dt\right)d\theta.$$

Utilizând schimbarea de variabilă $t-\theta = \eta$ se obține:

$$\langle f_1 * f_2,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\theta)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\eta)\varphi(\theta+\eta)d\eta\right)d\theta = \langle f_1(\theta),\langle f_2(\eta),\varphi(\theta+\eta)\rangle\rangle.$$

Definiția 8. Fie $S, T \in \mathcal{D}'$. Produsul de la convoluție are forma:

$$\langle S*T,\varphi\rangle = \big\langle S_\theta,\big\langle T_\eta,\varphi(\theta+\eta)\big\rangle\big\rangle = \big\langle T_\eta,\big\langle S_\theta,\varphi(\theta+\eta)\big\rangle\big\rangle.$$ ■

Propoziția 4. Dacă una din distribuțiile S, T are suport compact, atunci produsul de convoluție $S*T$ există. ■

Exemple: a. $\big\langle f*\delta,\varphi\big\rangle = \big\langle f(\theta),\big\langle\delta(\eta),\varphi(\theta+\eta)\big\rangle\big\rangle = \big\langle f(\theta)\varphi(\theta)\big\rangle$, respectiv: $f*\delta = f$, ceea ce înseamnă că distribuția Dirac este *elementul unitate* în cadrul produsului de convoluție.

b. $\big\langle f*D^k\delta,\varphi\big\rangle = \big\langle f(\theta),\big\langle D^k\delta(\eta),\varphi(\theta+\eta)\big\rangle\big\rangle = \big\langle f(\theta),(-1)^k\varphi^{(k)}(\theta)\big\rangle = \big\langle D^k f,\varphi\big\rangle$, adică: $f*D^k\delta = D^k f$.

c. $\left\langle D^m\delta * D^n\delta, \varphi\right\rangle = \left\langle D^m\delta_\theta, \left\langle D^n\delta_\eta, \varphi(\theta+\eta)\right\rangle\right\rangle = \left\langle D^m\delta(\theta), (-1)^n\varphi^{(n)}(\theta)\right\rangle = \left\langle D^{m+n}\delta, \varphi\right\rangle$.

Urmează că : $f * \delta_\tau = f_\tau$, respectiv, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta)\delta(\theta-\tau)d\theta = f(t-\tau)$.

3. Transformarea Fourier

3.1. Distribuţii temperate

Definiţia 1. O funcţie $f(t)$, $t\in$R, se numeşte rapid descrescătoare dacă este infinit derivabilă şi dacă aceasta şi oricare din derivatele sale tind la zero mai repede ca orice putere cu exponenţi negativi pentru $t\to+\infty$, adică: $t^m f^{(n)}(t)\to 0$ pentru $t\to+\infty, m,n=1,2,\ldots$. ■

Mulţimea funcţiilor rapid descrescătoare se notează cu $\mathcal{S}$.

Propoziţia 1. Transformata Fourier a unei funcţii rapid descrescătoare este rapid descrescătoare. ■

Cu alte cuvinte dacă $f\in\mathcal{S}_t$ atunci $F\in\mathcal{S}_\omega$, cu $F(j\omega) = F\{f(t)\}$.

Definiţia 2. Un şir $\varphi_i\in\mathcal{S}$ *converge* la zero dacă pentru toţi m, $n = 0, 1, 2, \ldots$ are loc:

$t^m\varphi_i^{(n)}(t) \xrightarrow{\text{uniform pe } \mathbf{R}} 0$ pentru $i\to+\infty$. ■

Propoziţia 2. Dacă un şir $\varphi_i\in\mathcal{S}_t$ satisface definiţia 2, atunci şirul $\mathcal{F}\{\varphi_i(t)\} = \Phi_i(j\omega)$, $\Phi_i\in\mathcal{S}_\omega$, converge la zero în $\mathcal{S}_\omega$. ■

Propoziţia 3. Operaţia de integrare (implicată de transformarea Fourier) poate fi comutată cu operaţia de trecere la limită, adică pentru $\varphi_i\in\mathcal{S}$ şi $\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(t) = \varphi(t)$, $\varphi\in\mathcal{S}$, se poate scrie: $\mathcal{F}\{\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(t)\} = \lim_{i\to+\infty}\mathcal{F}\{\varphi_i(t)\}$. ■

Operaţia de trecere la limită se înţelege în sensul topologiei lui $\mathcal{S}$.

Întrucât orice funcţie din $\mathcal{D}$ este nulă în afara unui interval, rezultă că aceasta este o funcţie rapid descrescătoare. Ca urmare $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$.

Definiţia 3. Funcţionala $<T, \varphi>$ se numeşte continuă dacă $\varphi_i\in\mathcal{S}$ şi $\lim_{i\to+\infty}\varphi_i = 0$ (în sensul definiţie 2) implică $\lim_{i\to+\infty} < T, \varphi_i >= 0$ în sensul obişnuit.

Definiţia 4. O distribuţie definită prin $<T, \varphi>$ se numeşte *temperată* sau cu *creştere lentă* dacă $<T, \varphi>$ este liniară şi continuă cu $\varphi\in\mathcal{S}$. ■

Mulţimea distribuţiilor temperate se notează cu $\mathcal{S}'$.

Funcţionalele din $\mathcal{S}'$ sunt definite pentru toate funcţiile din $\mathcal{S}$, respectiv din $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$, ceea ce justifică utilizarea denumirii de distribuţie în definiţia 4. Evident, are loc relaţia dual ă $\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}'$.

Propoziţia 4. O distribuţie $T\in\mathcal{D}'$ cu suport mărginit este temperată. ■

Conform acestei propoziţii, distribuţiile $D^k\delta$, $k = 0,1,2\ldots.$ sunt distribuţii temperate.

Propoziţia 5. Dacă $T\in\mathcal{S}'$ atunci şi $D^kT\in\mathcal{S}'$, $k = 1,2,3,\ldots.$ ■

Definiţia 5. O funcţie se numeşte *lent crescătoare* dacă este egală cu produsul dintre un polinom şi o funcţie mărginită local integrabilă. ■

Propoziţia 6. Distribuţiile temperate se pot reprezenta prin: $T = \sum_1^n D^k f_k(t)$, în care f_k, $i=\overline{1,n}$, sunt lent crescătoare.

Propoziţia 7. Dacă $m(t)$ este o funcţie mărginită şi infinit derivabilă şi T este o distribuţie temperată, atunci $m(t)T$ este o distribuţie temperată. ■

3.2 Pseudofuncţii

Funcţiile $t^{-1}, t^{-2}, \ldots, t^{-3/2}, t^{-5/2}, \ldots$ nu determină distribuţii deoarece nu sunt local integrabile. Pentru astfel de funcţii se apelează la noţiunea de *parte finită* (Pf) a unei funcţionale.

Exemplu

Fie funcţionala: $<t^{-3/2}\sigma(t),\varphi(t)>=\int_{-\infty}^{+\infty}t^{-3/2}\sigma(t)\varphi(t)dt=\int_{0}^{+\infty}t^{-3/2}\varphi(t)dt$. Această integrală este divergentă dacă $\varphi(0)\neq 0$. Totuşi ultima integrală are şi o parte finită. Se poate scrie: $\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{-3/2}\varphi(t)dt=2\varepsilon^{-1/2}\varphi(\varepsilon)+2\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{-1/2}\varphi'(t)dt$, $\varepsilon>0$. Întrucât $\varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+\varepsilon\varphi'(\theta\varepsilon)$, $0<\theta<1$, rezultă: $\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{-3/2}\varphi(t)dt-2\varphi(0)\varepsilon^{-1/2}=2\varphi'(\theta\varepsilon)\varepsilon^{1/2}+2\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{-1/2}\varphi'(t)dt$. Trecând la limită pentru $\varepsilon\to 0$ se obţine: $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{-3/2}\varphi(t)dt-2\varphi(0)\varepsilon^{-1/2}\right)=2\int_{\varepsilon}^{+\infty}t^{-1/2}\varphi'(t)dt$. Membrul drept există deoarece $t^{-1/2}$ este local integrabilă. Urmează că partea finită a funcţionalei este: $\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{-3/2}\sigma(t)\varphi(t)dt=2\int_{0}^{+\infty}t^{-1/2}\varphi'(t)dt$.

Definiţia 6. Dacă funcţionala $<f,\varphi>$, în care f nu este local integrabilă, este divergentă şi posedă o parte finită care coincide cu o funcţională determinată de o distribuţie T, adică: $\mathrm{Pf}<f,\varphi>=<T,\varphi>$, se spune că funcţia f defineşte distribuţia T şi se scrie $\mathrm{Pf}\, f(t) = T$. $\mathrm{Pf}\, f(t)$ se numeşte *pseudofuncţie*.■

Pentru funcţia considerată în exemplul de mai sus se poate scrie: $\mathrm{Pf}\,[t^{-3/2}]=2t^{-1/2}$.

Definiţia 7. Dacă $\mathrm{Pf}\, f(t) = T$, atunci $D^k\{\mathrm{Pf}\, f(t)\} = D^kT$, $k = 1,2,\ldots\ldots$. ■

3.3. Transformarea Fourier a distribuţiilor şi a pseudofuncţiilor

Definiţia 8. Transformarea Fourier $\mathrm{F}\{T\}$ a unei distribuţii temperate $T \in \mathcal{S}'$ se defineşte prin $<\mathcal{F}\{T\},\varphi(\omega)>=<T,\mathcal{F}\{\varphi(t)\}>=<T,\Phi(\omega)>$. ■

$\mathcal{F}\{T\}$ este o distribuţie temperată, liniară şi continuă în sensul definiţiei 3.

În cazul distribuţiilor determinate de funcţii se poate scrie:

$$\langle T,\mathcal{F}\{\varphi(t)\}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}dt\right)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right)dt=\langle\mathcal{F}\{f(t)\},\varphi(t)\rangle.$$

Propoziţia 8. Dacă $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'$ şi $\mathcal{F}\{T_1\} = \mathcal{F}\{T_2\}$, atunci $T_1 = T_2$.■

Propoziţia 9. Transformata Fourier a unei distribuţii cu suport mărginit este o funcţie infinit diferenţiabilă, care poate fi reprezentată sub forma: $U(j\omega)=<T,e^{j\omega t}>$ şi care se poate prelungi printr-o funcţie întreagă de tip exponenţial.■

Propoziţia 10 (derivata originalului). Dacă există $\mathcal{F}\{T\}$ atunci: $\mathcal{F}\{D^kT\}=(j\omega)^k\mathcal{F}\{T\}$. ■

Propoziţia 11. Transformata Fourier a unei distribuţii integrabile de forma $T=\sum_{n=0}^{m}D^n f_n(t)$ este o funcţie lent crescătoare: $\mathcal{F}\{T\}=\sum_{n=0}^{m}(j\omega)^n\mathcal{F}\{f_n(t)\}$. ■

Propoziţia 12. Dacă există $\mathcal{F}\{T\}$ şi $\mathcal{F}\{z^{-\tau}T\}$, unde $z^{-\tau}$ este operatorul de translaţie, atunci: $\mathcal{F}\{z^{-\tau}T\}=e^{-j\omega\tau}\mathcal{F}\{T\}$. ■

Propoziţia 13 (produsul de convoluţie). Dacă T este o distribuţie temperată şi S este o distribuţie cu suport mărginit, atunci există produsul de convoluţie $T*S$ care este o distribuţie temperată. Atunci are loc: $\mathcal{F}\{T*S\} = \mathcal{F}\{T\}\cdot\mathcal{F}\{S\}$.■

Propoziția 14 (Parseval). Dacă există $\mathcal{F}\{T\}$, atunci:

$$<T,\varphi(t)>=\frac{1}{2\pi}<\mathcal{F}\{T\},\mathcal{F}\{\varphi(-t)\}>. \blacksquare$$

O categorie importantă de pseudofuncții o formează cele definite ca derivate ale distribuțiilor determinate de funcții local integrabile: $\mathrm{Pf}\,f(t) = D^k g(t)$. Dacă distribuția determinată de $g(t)$ este temperată, atunci există $\mathcal{F}\{\mathrm{Pf}\,f(t)\}$ și conform propoziției 10 se scrie:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Pf}\,f(t)\}=(j\omega)^k\mathcal{F}\{g(t)\}.$$

3.4. Transformate Fourier ale unor distribuții

a. Pentru $T=\delta_\tau=z^{-\tau}\delta$ din (3.10) se obține:

$$<\mathcal{F}\{\delta_\tau\},\varphi>=<\delta_\tau,\mathcal{F}\{\varphi(\theta)\}>=<\delta_\tau,\Phi(j\omega)>=\Phi(j\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega\tau}\varphi(\omega)d\omega=<e^{-j\omega\tau},\varphi(\omega)>,$$

ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}\{\delta(t-\tau)\}=e^{-j\omega\tau}$.

Pentru $\tau=0$ rezultă $\mathcal{F}\{\delta(t)\}=1$.

b. Pentru $T=e^{j\omega_0 t}$ din (3.10) rezultă:

$$<\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\},\varphi>=<e^{j\omega_0\theta},\mathcal{F}\{\varphi\}>=<e^{j\omega_0 t},\Phi(j\theta)>=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_0 t}\Phi(j\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\Phi(j\theta)e^{j\omega_0\theta}=2\pi\varphi(\omega_0)=<2\pi\delta(\omega-\omega_0),\varphi(\omega)>.$$

Aceasta înseamnă că $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.

Pentru $\omega_0=0$ se obține: $\mathcal{F}\{1\}=2\pi\delta(\omega)$.

c. Pentru funcțiile trigonometrice $\sin\omega_0 t$ și $\cos\omega_0 t$, pe baza formulelor lui Euler și în conformitate cu rezultatul de la b, se poate scrie: $\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\}=-j\pi(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0))$, $\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\}=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$.

d. Pentru $T=t^k$ din (3.10) rezultă: $\mathcal{F}\{t^k\}=2\pi j^k D^k\delta(\omega)$.

e. Pentru $T=D^k\delta(t-\tau)$ din (3.13) se obține: $\mathcal{F}\{D^k\delta(t-\tau)\}=(j\omega)^k e^{-j\omega\tau}$.

Pentru $\tau=0$ rezultă $\mathcal{F}\{D^k\delta(t)\}=(j\omega)^k$.

f. Pentru $T=\mathrm{Pf}\frac{1}{t}$ se poate scrie:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Pf}\frac{1}{t}\}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon}e^{-j\omega t}\frac{1}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{+\infty}e^{-j\omega t}\frac{1}{t}dt\right)=-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)\frac{dt}{t}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}2j\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{t}dt=-2j\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{t}dt=-\pi j\,\mathrm{sgn}\,\omega.$$

g. Pentru $T=\mathrm{sgn}\,t$, din rezultatul precedent, conform proprietății de simetrie a transformării Fourier (anexa A, 2.1.b.2°), se poate scrie $\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}t\}=\frac{2}{j}\mathrm{Pf}\frac{1}{\omega}$.

h. Funcția treaptă unitară poate fi exprimată cu ajutorul funcției signum sub forma: $\sigma(t)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}t)$. Conform rezultatului de la g se obține $\mathcal{F}\{\sigma(t)\}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j}\mathrm{Pf}\frac{1}{\omega}$.

4. Transformarea Laplace unilaterală

Întrucât domeniul de integrare al transformării Laplace unilaterale este $[0,+\infty)$, se au în vedere distribuţii pe $(-\infty,+\infty)$ cu suport în $[0,+\infty)$. Mulţimea acestor distribuţii se notează cu $\mathcal{D}_+$, iar a distribuţiilor temperate corespunzătoare cu $\mathcal{D}'_+$.

Dacă pentru $T \in \mathcal{D}'_+$ există un număr real a astfel încât $e^{-at}T \in \mathcal{D}'_+$, atunci pentru $\mathrm{Re}\, s = \sigma > a$ se defineşte transformata Laplace a distribuţiei T prin: $\mathcal{L}\{T\} = \langle T, e^{-st} \rangle$.

a. Distribuţia Dirac şi derivatele sale ($\delta(t)$, $\delta(t-\tau)$, $D^k\delta(t)$ şi $D^k\delta(t-\tau)$) sunt distribuţii temperate. Prin urmare se poate scrie $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \langle \delta(t), e^{-st} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$,

$$\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = \langle \delta(t-\tau), e^{-st} \rangle = e^{-\tau s}, \quad \mathcal{L}\{D^k\delta(t)\} = \langle D^k\delta(t), e^{-st} \rangle = \langle \delta(t), (-1)^k \frac{d^k e^{-st}}{dt^k} \rangle =$$

$$= \langle \delta(t), s^k e^{-st} \rangle = s^k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = s^k, \quad \mathcal{L}\{D^k\delta(t-\tau)\} = \langle D^k\delta(t-\tau), e^{-st} \rangle = s^k e^{-\tau s}.$$

b. În cazul derivatei generalizate a unei distribuţii determinată de o funcţie $f(t)$, discontinuă în $t = 0$, conform propoziţiei 3 de la 2.3 şi conform anexei A, 1.1.b.2°, se poate scrie:

$$\mathcal{L}\{D^k f(t)\} = s^k F(s) + [f^{(k-1)}(+0) - f^{(k-1)}(-0)] + \ldots + [f(+0) - f(-0)]s^{k-1} - f(+0)s^{k-1} - \ldots$$
$$- f^{(k-1)}(+0) = s^k F(s) - f(-0)s^{k-1} - \ldots\ldots - f^{(k-1)}(-0).$$

5. Tabel de transformate Laplace uzuale

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\delta(t-\tau);\ \tau>0$	$e^{-\tau s}$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t-\tau);\ \tau>0$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts+1}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sh}\, at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathrm{ch}\, at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$
$t^{k-1}e^{at}$	$\frac{(k-1)!}{(s-a)^k}$	$Pf\frac{1}{t}\sigma(t)$	$-\log s - C$

Bibliografie

1. Banks, P.S., *Control Systems Engineering*, Prentice Hall Int., Englewood Cliffs, 1986
2. Barbu, V., *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, Iaşi, 1985
3. Belea, C., *Teoria sistemelor; sisteme neliniare*, Ed, Did. şi Ped., Bucureşti, 1985
4. Călin, S., *Regulatoare automate,* Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1976
5. Corduneanu, A., Pletea, Adriana Lucia, *Ecuaţii diferenţiale*, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi, 1996
6. D'Azzo, J.J., Houpis, H.C., *Linear Control System Analysis and Design; Conventional and Modern*, Mc Graw Int., New York, 1988
7. Dumitrache, I., *Tehnica reglării automate*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1980
8. Doetsch, G., *Funktional Transformationen. Mathematische Hilfsmittel des Inginieurs.*, R. Sauer, I. Szabo (Ed.), Springer, Berlin, 1967
9. Dorf, C.R., *Modern Control Systems*, Addison-Wesley Publ., Reading, 1989
10. Dranfield, P., Haber, F.D., *Instruire programată în metoda locului rădăcinilor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980
11. Föllinger, O., *Regelungstechnik*, AEG-Telefunken, Berlin, 1980
12. Föllinger, O., *Nichtlineare Regelungen*, Oldenbourg, München, 1979
13. Franklin, F.G., Powell, D.J., Emami-Maeini, Abbas, *Feedback Control of Dynamic Systems,* Addison-Wesley Publ., Reading, 1986
14. Ionescu, Vl., *Teoria sistemelor; sisteme liniare*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1985
15. Jaeger, C.J., Newstead, H.G., *Introducere în teoria transformării Laplace*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1971
16. Kraniauskas, P., *Transforms in Signals and Systems*, Addison-Wesley Publ., Workingham, 1992
17. Popov, V.M., *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, Ed. Acad., Bucureşti, 1985
18. Răsvan, Vl., *Teoria stabilităţii*, Ed. Şt. şi Encicl., Bucureşti, 1987
19. Truxal, J.G., *Automatic Feedback Control System Synthesis,* Mc Graw-Hill, New York, 1955
20. Voicu, M., *Teoria sistemelor*, Inst. Politehnic "Gh. Asachi", Iaşi, 1980
21. Voicu, M., *Tehnici de analiză a stabilităţii sistemelor automate*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986
22. Voicu, M., *Sisteme automate multivariabile* , Ed. "Gh. Asachi", Iaşi, 1993

TIPARUL : S.C. „DOSOFTEI" S.A. – IAŞI

Ingineria, în sens larg, constă în cunoaşterea şi utilizarea materialelor şi forţelor naturii pentru beneficiul umanităţii, de regulă cu ajutorul unor construcţii, maşini şi instalaţii (în general – sisteme fizico-tehnice) concepute, realizate şi utilizate în cadrul unor organizaţii socio-economice. În acest cadru inginerul automatist *are menirea ca, pe baza cunoaşterii sistemelor fizico-tehnice, să conceapă şi să realizeze automatizarea acestora. În mod firesc această profesie este inter- şi multidisciplinară deoarece exercitarea ei competentă necesită cunoştinţe de matematică, fizică, chimie, biologie, electrotehnică, electronică, tehnică de calcul, informatică şi, nu în ultimul rând, de automatică, toate adecvat operante în conceperea, realizarea şi utilizarea automatizărilor. Cu alte cuvinte, inginerul automatist trebuie să aibă o vastă cultură ştiinţifică şi tehnică dublată de o autentică viziune sistemică astfel încât să-i permită abordarea şi soluţionarea problemelor de automatizare a celor mai diverse sisteme fizico-tehnice (mecanice, electrice, termice, fluidice, chimice, biologice sau combinaţii ale acestora).*

ISBN 973–9135–60–9